AVIS DE RECHERCHE

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet, ou, beaucoup mieux, sur disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL - 6, rue des annelets
75019 PARIS.

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

AVIS DE RECHERCHE N° 27 de Gilles Oudet (Besançon).
Le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par contraposition ne sont-ils pas, en fait, un même mode de raisonnement ? Existe-t-il des démonstrations où seul un des deux types de raisonnement convient ?

Commentaires par le rédacteur de la rubrique, qui n'est pas du tout spécialiste.

Je répondrais *oui* si l'on considère que les trois formes de raisonnement : direct, par contraposition et par l'absurde sont trois façons de montrer une même implication, disons $H \Rightarrow C$: soit on part de H et on arrive à C; soit on part de non C et on arrive à non H ; soit on part de (H et non C) et on arrive à une contradiction.

Cependant il me semble que les formes de raisonnements sont bien distinctes, même si je pense que l'absurde contient la contraposition : lorsque l'on part de (H et non C) et que la contradiction consiste justement à montrer non H, on fait un raisonnement par contraposition déguisé.

Par exemple, montrer que si le carré d'un entier n est pair, alors n est pair relève de la contraposition mais peut se faire par l'absurde (je mettrais alors sur la copie : maladroit), tandis que montrer que le double d'un carré ne peut être un carré relève du raisonnement par l'absurde (la contraposée : un carré ne peut être le double d'un carré est du même ordre que l'énoncé direct).

Mais la deuxième question de M. Oudet soulève le problème suivant : peut-on montrer qu'un raisonnement donné est impossible? J'étendrais alors la question à d'autres types de raisonnement comme les récurrences. Tout le monde dira qu'il est impossible de démontrer par une récurrence *simple* que la suite de Fibonacci est, par exemple, formée d'entiers naturels. Mais que signifie cette impossibilité ?

AVIS DE RECHERCHE N° 28
Pourquoi les suites et moyennes arithmétiques, géométriques, harmoniques s'appellent-elles ainsi ?

AVIS DE RECHERCHE N° 29 de Marc Roger (Montélimar).

Soit S_p le polynôme tel que $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$; existe-t-il des relations générales entre S'_p et S_{p-1} comme je l'ai constaté sur des cas particuliers?

Réponse du rédacteur de la rubrique:

La réponse est OUI ! Remarquons que $S_p(X) - S_p(X-1) = X^p$. Par conséquent, en dérivant, on obtient: $S'_p(X) - S'_p(X-1) = p(S_{p-1}(X) - S_{p-1}(X-1))$, ce qui peut aussi s'écrire : $(S'_p - pS_{p-1})(X) = (S'_p - pS_{p-1})(X-1)$, ce qui montre que $S'_p - pS_{p-1} = cte = u_p$. Il reste à savoir ce que sont les mystérieux nombres u_p. On constate que $S'_2 = 2S_1 + 1/6$; $S'_3 = 3S_2$; $S'_4 = 4S_3 - 1/30$ ... Reconnaîtrez-vous les fameux (?) nombres de Bernoulli ?

Soit (B_p) la suite de fonctions polynômes, définie par (il faut vérifier l'existence et l'unicité) :

(*i*) $B_0 = 1$; (*ii*) $\forall p \geq 1 \quad B'_p = pB_{p-1}$; (*iii*) $\forall p \geq 2 \quad B_p(1) = B_p((0)(=b_p)$.

Les B_p sont les polynômes de Bernoulli et les b_p les nombres de Bernoulli. On peut montrer que: $S_p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(X+1) - b_{p+1}\right)$, donc $u_p = b_p$.

Les nombres de Bernoulli peuvent se calculer à partir de la relation de récurrence:

$b_0 = 1$ et $\forall p \geq 2 \quad \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k b_k = 0$. Lorsque p est impair $\geq 3\, b_p$, donc u_p est nul.

RÉPONSES AUX AVIS PRÉCÉDENTS

AVIS DE RECHERCHE N° 19
Pourquoi, ou sous quelle influence, les Français (contrairement aux Suisses et aux Belges) ont-ils abandonné l'usage des mots septante, octante et nonante et les ont remplacés par soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix ? Et quand ?

Réponse de Jacques Verdier (Nancy).

Je ne crois pas que les Français aient abandonné l'usage des mots septante, octante et nonante, contrairement aux Suisses et aux Belges; ce serait plutôt le contraire.

En effet, dans le substrat de la plupart des langues indo-européennes, on voit apparaître, dès le huitième siècle, un décompte par vingtaines (comme dans le très célèbre hospice des "Quinze-Vingts" datant de 1254). Les expressions les plus courantes sont des équivalents de "deux-vingts" pour 40, "trois-vingts" pour soixante, et "quatre-vingts" pour 80, et les dizaines intermédiaires formées comme "vingt et dix", "deux-vingts et dix", "trois-vingts et dix", "quatre-vingts et dix" pour 30, 50, 70 et 90.

C'est notamment le cas dans la forme récente des langues celtiques (gallois, breton, irlandais et même basque). A noter cependant, en breton, une "curiosité", qui, à ma connaissance, ne se retrouve dans aucune autre langue indo-européenne ni sémitique: l'utilisation de la **division** dans la dénomination de 50, qui se dit **"hanter kant"**, ce qui littéralement signifie "demi-cent" (peut-être trouvera-t-on la l'origine de notre pièce de 1/2 F, assez étonnante elle aussi !).

Un remarquable exemple des restes de cette base 20 se trouve en danois, où 50 se dit **"halvtreds"**, ce qui littéralement signifie "moitié de la troisième" (troisième vingtaine, bien sur) ; 70 s'y dit **"halvfjerds"** (moitié de la quatrième) et 90 **"halvfems"** (moitié de la cinquième) ; 60 s'y dit "tres" (de tre = 3) et 80 **"firs"** (de fire = 4).

J'ai eu la chance de travailler cette année avec des professeurs roumains nommés dans notre académie, et leur système de dénomination des nombres a ceci d'exceptionnel qu'il ne souffre aucune exception : 11 se dit **"un spre zece"** (un et dix), 12 **"doi spre zece"** (deux et dix), et ainsi de suite jusqu'à 19 **"noua spre zece"**; 20 s'y dit **"doua zeci"** (deux dix), 30 **"trei zeci"** (trois dix), et ainsi de suite jusqu'à 90, **"noua zeci"** (neuf dix), sans aucune anomalie... heureux écoliers roumains !

Je n'ai pas répondu à la question de J.-Y. Le Cadre, mais je crois qu'il faudrait la reformuler ainsi : quand les Belges, les Suisses, etc. ont-ils effacé ces vestiges de base 20 ? et pourquoi ? par souci d'harmonisation ?

Je signale pour l'anecdote que j'ai fait mes classes primaires à Lyon dans les années 50, et que j'y ai appris "septante, octante, nonante", cette pratique étant encore courante en Savoie.

NDLR : il me semble que cette interprétation (qui est fort intéressante) est contredite par le fait que le latin, dont le français est issu, n'utilise pas la base 20, mais bien la base 10. Grévisse (*Le bon usage*, p. 926) dit que Vaugelas a condamné septante et nonante comme des archaïsmes ; alors, quelqu'un pourra-t-il trancher avec certitude ?

AVIS DE RECHERCHE N° 20 **d'une fonction dérivable sur R et monotone sur aucun intervalle de R.**

Réponse de Gustave Choquet (Antony).

Il semble que la première construction rigoureuse de telles fonctions soit due à Denjoy :

A. Denjoy : "*Sur les fonctions dérivées sommables*", bull. Soc. Math. France 43, 1915, pages 210-235 (et L.G. Vidiani a envoyé la référence du même auteur : Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse, Gauthier-Villard, 1954, pages 210-235)

On peut, plus simplement procéder comme suit:
On construit d'abord une partition de [0, 1] en deux sous-ensembles mesurables A, B dont chacun intersecte tout sous-intervalle suivant un ensemble de mesure non nulle ; et on désigne par f la fonction qui vaut 1 sur A et -1 sur B . La fonction $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ a presque partout une dérivée égale à f; notons X l'ensemble des x en lesquels F n'est pas dérivable ; la mesure de X est nulle.

Soit G une fonction continue strictement croissante, de [0,1] sur lui-même, partout dérivable au sens large avec $G'(x) = +\infty$ pour $x \in X$ et G' partout ≥ 1. La fonction G^{-1} inverse de G a partout une dérivée finie, nulle pour tout x tel que $G(x) \in X$.
La fonction $F \circ G^{-1}$ est la fonction recherchée.
La construction de A , B est assez facile, par contre celle de G l'est nettement moins.

Autres références envoyées par Michel Bataille (Rouen):
- "*Everywhere Differentiable, Nowhere Monotone functions*", Y. Katznelson et Karl Stromberg, the American Mathematical Monthly, avril 1974 , pages 349 à 354.
- Karl Stromberg : "*An introduction to classical real analysis*", pages 216 - 218.

AVIS DE RECHERCHE N° 23

Est-il possible de disposer *n* reines sur un échiquier de taille (*n*, *n*) de sorte que deux quelconques de ces reines ne soient jamais en prise mutuelle ?

Voici d'autres références concernant ce problème:
- Martin Gardner : *jeux d'échec féériques, la mathématique des jeux*, BELIN, bibliothèque pour la science (signalé par M. Hébraud).
- The American Mathematical Monthly, Août 94 pages 629 à 639, avec 35 références bibliographiques (signalé par L.G. Vidiani).

Par ailleurs, Vincent Graux (18, rue Rambuteau 75003 Paris) a envoyé une disquette commentée donnant des programmes de recherche d'une solution en Pascal et en Lisp. Vous pouvez les obtenir en lui envoyant une disquette PC, trois timbres et une enveloppe retour.

AVIS DE RECHERCHE N° 24 **Exemples de situations où $A \cap B = C$.**

J. Epremian (Champigny) propose :

1) maths

A = ensemble des nombres pairs.
B = ensemble de multiples de 3.
C = ensemble de multiples de 6.

2) orthographe

A = ensemble des noms terminés par "al".
B = ensemble des noms prenant un "s" au pluriel.
C = {bal, cal, carnaval, chacal, festival, récital, régal}

3) conjugaison

A = ensemble des verbes terminés par "ir" à l'infinitif.

B = ensemble des verbes terminés par "issant" au participe présent.

C = ensemble des verbes du deuxième groupe.

Remarque : C ≠ B car lisser donne lissant ! (NDLR : il n'est pas le seul !)

4) Sciences naturelles

A = ensemble des conifères.

B = ensemble des arbres à feuilles caduques.

C = ensemble des mélèzes.

AVIS DE RECHERCHE N° 25

Les personnes intéressées par du papier gausso-arithmétique ainsi que du semi-logarithmique, du log-log, du papier pour la loi de Weibull ... peuvent en obtenir auprès des établissements GUYOT GRAPHCO SA avenue de la république tel: 85 78 54 11 - fax : 85 78 08 39 (adresse envoyée par M. Roblet (lycée Carnot, Dijon), qui possède aussi un programme Pascal pouvant "tracer" ce type de papier).

Vous pouvez cesser les envois de ce papier, je le connais maintenant très bien !

AVIS DE RECHECHE N° 26 Problème de Kimberling : un triangle quelconque ABC étant donné, déterminer le point K isopérimétrique, c'est-à-dire tel que les triangles KAB, KAC, KBC ont le même périmètre.

Réponse de Fransisco Bellot Rosado (Valladolid, Espagne).

Le Professeur Clark Kimberling travaille à l'Université d'Evansville en Indiana. Il est bien connu par ses problèmes de géométrie classique, publié dans CRUX MATHEMATICORUM AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL ou MATHEMATICS MAGAZINE. Plus précisément, dans le numéro 3, juin 1994 du MATHEMATICS MAGAZINE, l'article *central points and central lines in the plane of a triangle* (page 181) est publié , où le professeur Kimberling donne la caractérisation avec des coordonnées trilinéaires de plus de 100 points notables du triangle. Dans cet article, le point isopérimétrique est identifié comme un point d'un article plus ancien, par Veldkamp dans AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY 1985, pp. 546-558.

Ce point a été aussi étudié par Peter Yff (lettre privée, 1991) et par Noam Elkies dans le problème E3236 de l' AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, 1990, pp. 529-531 (problème proposé en 1987).

Il y a quelques années, le Professeur Kimberling a créé le programme d'ordinateur nommé *The Geometric Constructor* (1985) pour faire toutes les constructions euclidiennes, publié aussi par l'Université d'Evansville.

Pour ce qui concerne la seconde partie de l'avis de recherche 26, je ne connais pas d'autres solutions que celles que Clark Kimberling donne dans son article, et celles de Veldkamp et Elkies & Jiro Fukuta. Je crois que serait difficile l'attribution du mot "élémentaire" pour elles, au moins dans le sens que les pédagogues donnent à ce mot...