3, 4 ou 5 : partout !

Henri CAMOUS
La Garde-Freinet (83)

Vous n'imaginez peut-être pas la présence des naturels 3, 4 et 5, dans la mesure des côtés d'une multitude de triangles rectangles, et pas seulement du 3-4-5.
Cette particularité est ici mise en évidence, à partir d'une résolution particulière de la fameuse équation de Pythagore.

L'équation de Pythagore

Rappelons ce résultat dont on peut trouver la démonstration dans la solution du problème 180 par P. SAMUEL (*Bulletin* n° 384, p. 358) :

Si x, y, z sont trois naturels premiers dans leur ensemble tels que $x^2 + y^2 = z^2$, ils sont premiers entre eux deux à deux , l'un des nombres x et y est pair, l'autre est impair ainsi que z.

Les solutions de *l'équation de Pythagore* $x^2 + y^2 = z^2$, où x, y, z sont des naturels premiers entre eux dans leur ensemble, avec x pair, sont fournies par les formules :

$$x = 2mn$$
$$y = m^2 - n^2$$
$$z = m^2 + n^2$$

où m et n sont deux naturels premiers entre eux, de parités différentes et tels que $m > n$.

Exemple : $(m,n) = (7,2)$ $\quad x = 28,\ y = 45,\ z = 53$

$$x^2 + y^2 = 28^2 + 45^2 = 2\,809$$

$$z^2 = 53^2 = 2\,809$$

Résolution partielle

Voici le tableau des solutions obtenues pour $m = 2, m = 3, \ldots, m = 9$:

m	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9
n	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	7	2	4	8
x	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	112	36	72	144
y	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	15	77	65	17
z	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	113	85	97	145

Ce tableau fournit les dix-huit premiers couples (m, n) et triplets (x, y, z) associés, et il débute par le 3-4-5 attendu, mais dans le «désordre».

Intervention des facteurs 3, 4, 5

Commençons par remarquer que, vu les conditions faites à x, y et z, si l'un des trois est multiple d'un entier supérieur à 1, aucun autre ne peut l'être. **(Propriété P1)**

La relation $x = 2mn$ avec m et n de parités différentes, implique que x **est multiple de 4** (**Propriété P2**).

Pour ce qui est d'une éventuelle relation avec le nombre 3,

* si m ou n sont multiples de 3, alors x l'est aussi,
* si ni m ni n ne le sont, alors qu'on ait $m \equiv 1$ [3] ou $m \equiv -1$ [3], on a toujours $m^2 \equiv 1$ [3]. De même pour n^2. Ainsi, $y \equiv 0$ [3] et $z \equiv 2$ [3]. Donc y est multiple de 3, et pas z. On résumera complètement la situation dans la propriété :

Ou x ou y sont multiples de 3 mais pas z. (Propriété P3)

Examinons enfin la relation avec le nombre 5 :

* si m ou n sont multiples de 5, alors x l'est aussi,
* si aucun des deux ne l'est, alors que m soit congru à $1, -1, 2$ ou -2 modulo 5, m^2 est congru soit à 1, soit à -1. De même pour n^2.

On résumera les différentes situations possibles dans le tableau ci-contre (écrit modulo 5) :

n^2 \ m^2	-1	1
-1	$y \equiv 0$ $z \equiv -2$	$y \equiv 2$ $z \equiv 0$
1	$y \equiv -2$ $z \equiv 0$	$y \equiv 0$ $z \equiv 2$

On le traduira par la propriété :

x, y ou z sont multiples de 5 (Propriété P_5).

On peut résumer les conclusions de cette discussion en disant :

x est toujours multiple de 4, il peut, de surcroît être multiple de 3 ou 5.

* Si x est multiple de 3 et 5	alors, ni y, ni z n'est multiple de 3 ou 5.
* Si x est multiple de 3 et non de 5	alors, soit y soit z est multiple de 5.
* Si x est multiple de 5 et non de 3	alors y est multiple de 3
* Si x n'est multiple ni de 3, ni de 5	alors soit y est multiple de 3 et 5 soit y est multiple de 3 et z de 5

En conclusion :

Les propriétés (P_1), (P_2) et (P_3) prouvent que les trois célèbres naturels 3, 4 et 5 sont des coefficients qui affectent nécessairement les composants de tout triplet (x, y, z) des équations pythagoriciennes retenues.