Calcul littéral

Groupe de travail "APRES EVAPM"

«Malgré sa complexité - due, nous semble-t-il à l'impossibilité de ramener les différents aspects à un seul point de vue - , l'utilisation du calcul littéral est l'un des domaines essentiels du cours de mathématiques en collège... Sans trop schématiser, on peut estimer que l'élève ne sait rien de ses techniques lorsqu'il entre en Sixième et qu'il doit absolument avoir acquis un minimum de compétences à sa sortie de Troisième. Encore convient-il de s'accorder sur ces compétences. Il est assez facile de faire le tour des "savoirs" indispensables : équations de droites, identités remarquables, etc... Il est nettement plus difficile d'inventorier les "savoir-faire" et d'en délimiter les contours précis».

Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (G.R.E.M.)
«Sur l'introduction du calcul littéral» (Décembre 1988)

Ce texte du G.R.E.M, d'où nous avons tiré l'observation ci-dessus a largement alimenté notre réflexion et mériterait d'être davantage diffusé tellement l'analyse qui y est faite est, à notre sens, pertinente ; aussi y ferons-nous souvent référence. La tâche concernant l'apprentissage du calcul littéral est en effet vaste, complexe et difficile, à la fois pour l'élève et l'enseignant. Les programmes actuels du Collège semblent avoir modifié les connaissances et les compétences de nos élèves ainsi que nos pratiques enseignantes. Les analyses faites à partir des opérations EVAPM en Quatrième et Troisième incitent en effet à penser que " ... *un des effets de l'application des nouveaux programmes est le développement d'une certaine autonomie des élèves, d'une attitude positive les conduisant à attaquer les problèmes proposés en y investissant leurs compétences. Par contre, les aspects algorithmiques seraient moins développés.* " (EVAPM 3/90 p. 66). Il est vrai que les apprentissages de pure technique sont moins développés ; les programmes à ce sujet sont en effet restrictifs :

- En Quatrième, *"le calcul littéral sera introduit avec prudence " ; et plus loin dans les commentaires, à propos du développement de $(a + b)(c + d)$, "On évitera de donner à ce paragraphe une place excessive ".*
- En Troisième, *"L'entraînement au calcul littéral se poursuit et doit aboutir à une relative autonomie ".*

Il semble que les concepteurs des programmes actuels aient misé sur une certaine familiarisation des élèves avec les lettres, dès la Sixième, à l'occasion des activités liées au domaine "Gestion de données", en particulier avec les calculs d'aires et de volumes. Mais on peut regretter que des documents d'accompagnement des programmes ne proposent pas des stratégies ou ne présentent pas des activités qui permettraient de mieux appréhender le calcul littéral en insistant sur les questions de sens. Les brochures ou articles que nous citons en annexe pourront combler cette lacune.

Statut des lettres.

Le texte du G.R.E.M. insiste sur les différents statuts de la lettre : inconnue, indéterminée, variable.

Evidemment il n'est pas question d'en faire une "leçon" à nos élèves, mais il faut être conscient qu tous ces statuts sont présents dès la Sixième et tout au long de l'apprentissage. Bien sûr, dès la Sixième et même avant, les grandeurs sont désignées par l'initiale de l'objet qu'elles mesurent : **c** pour côté du carré, **l** pour la largeur du rectangle et **L** pour sa longueur (étant bien entendu que **L** est donc plus grand que **l** !). De ce fait, il y a, dans la lecture, dans l'interprétation des lettres, un risque de confusion entre l'objet et sa mesure. Combien de fois avons-nous vu des mises en équation du style : " Soit x la chemise, et y le pantalon" ! De même, à propos d'un exercioe de développement/factorisation (EVAPM4/89 M13-14, p. 54), l'analyse des copies d'élèves fait constater *"... le rôle statique attribué aux lettres x et S. La lettre est conçue comme une abréviation stéréotypée. Est-ce une conséquence des notations utilisées dans l'écriture des formules ?".* A priori, il n'apparaît pas pertinent de modifier cette façon d'écrire les formules, à condition de faire remarquer, à chaque occasion, qu'on utilise les initiales seulement pour pouvoir mieux mémoriser les éléments de la formule. Mais, dans un même exercice, on évitera absolument d'utiliser la même lettre, sans indice, pour désigner des grandeurs de même nature relatives à des objets différents. D'ailleurs, les auteurs de la brochure : "Algébrisation - 4ème" de l'IREM de LORRAINE font aussi observer les habitudes que nous avons de lier souvent le choix de la lettre à son statut : *"les lettres x ou y représentent une inconnue ou une variable, les lettres a, b ou c représentent des constantes, la lettre m représente un paramètre, etc... "*. Loin de condamner ce choix, les auteurs privilégient volontairement les lettres x et y dans les équations, pour éviter d'accentuer les difficultés des élèves, tout en étant *"conscients que cette restriction aux lettres x et y pourra s'avérer plus tard contraignante et que l'élève qui s'engagera dans une filière scientifique devra apprendre à la dépasser"* .

On peut penser que l'apprentissage au calcul formel est comparable à celui du langage. Comme les parents vis à vis de leurs jeunes enfants à propos du langage, les enseignants doivent exercer une vigilance permanente et avoir des exigences "éclairées" vis à vis de leurs "jeunes élèves" à propos de l'usage des lettres et du calcul littéral.

Algèbre et arithmétique.

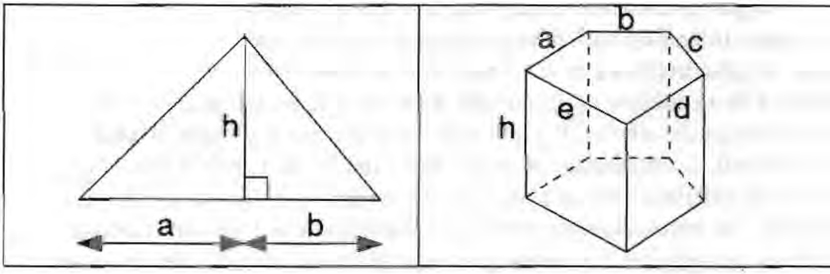
Si un certain nombre de compétences spécifiques à l'arithmétique ont été "bannies" des programmes actuels, c'est manifestement pour ne pas tomber dans l'écueil des calculs systématiques de PGCD et PPCM omniprésents ou envahissants dans les anciens programmes. Pourtant, l'interaction entre l'algèbre et l'arithmétique est très forte. Le G.R.E.M., dans son texte cité en référence, insiste sur ce fait : *«Encore faut-il que la lettre ne soit pas dès le départ déconnectée de la notion de nombre, que "l'algèbre" reste ancrée dans l'esprit de l'utilisateur sur la réalité numérique qu'elle permet de dépasser»*. Par ailleurs, les analyses d'EVAPM 4/3 font observer une tendance initiale naturelle des élèves à traiter les problèmes par l'arithmétique : *«Redisons ici (à propos de la question EVAPM4/89 Q1-2-3) que la modélisation algébrique ne s'impose certainement pas pour traiter une telle question. 7% des élèves posent une équation. Ils sont 42 % à réussir, la plupart utilisant une démarche arithmétique»*. Pour une autre question dans EVAPM4/91, 31 % des élèves choisissent une démarche arithmétique et 9 % une démarche algébrique ; il est vrai qu'aucune consigne n'était donnée. Mais lorsque la consigne de mise en équation est donnée, (Question B25-26 d'EVAPM 4/89), ils sont 53 %à écrire cette équation, mais beaucoup ne s'en servent pas pour trouver la réponse. On voit bien à travers ces remarques que le calcul littéral est loin d'être opérationnel. Il inspire manifestement encore une certaine méfiance et c'est peut-être en étant utilisé souvent et en faisant preuve de sa fiabilité et de son **efficacité** qu'il finira par gagner l'adhésion et la confiance des élèves. Il s'agit donc pour les élèves d'«**apprivoiser**» le calcul littéral. La démarche proposée par l'IREM de LORRAINE (reprise du texte du GREM) avec le raisonnement analogique répond-elle à ce voeu à propos des résolutions de problèmes par équations ? *«L'idée consiste pour l'élève à remplacer l'inconnue par une valeur particulière simple, (éventuellement plusieurs fois) et faire alors "fonctionner" le problème sur un support numérique concret. Le problème devient alors de type arithmétique tout en conservant la même structure que dans son énoncé initial. Par analogie, l'élève se rendra compte alors de ce qui est "pareil" dans les variantes du problème et pourra de ce fait en percevoir la structure.»* Le GREM parle, à ce sujet, d'une phase d'exploration numérique à connotation fonctionnelle suivie d'une phase d'algébrisation à partir de la mise en évidence de l'ossature commune des calculs précédents.

On le voit, **c'est à travers le développement** de processus mentaux de calculs numériques (transformations d'écritures) et la reconnaissance de structures d'expressions numériques que passera l'appropriation des concepts et des compétences concernant le calcul littéral.

Développement - factorisation.

Cette notion est traitée "progressivement" au collège : $k(a + b)$ en Cinquième, $(a + b)(c + d)$ en Quatrième et les identités remarquables en Troisième. Le programme de Cinquième prévoit : *«Etude de $k(a + b)$ et $k(a - b)$»*. Or cette étude semble minorée par les compléments qui ne la prennent en compte que sous la forme de la compétence exigible : *«Enoncer sous leur formulation littérale et utiliser uniquement sur des exemples numériques les égalités : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$»* . Cela pourrait induire une connaissance purement formelle et une utilisation presque aveugle de cette "formule". Pourquoi les textes officiels ne préconiseraient-ils pas une découverte de cette propriété de distributivité en proposant une présentation synthétique de situations où on la rencontre, par exemple :

- calcul mental : $542 \times 19 = 542 \times (20 - 1) = 542 \times 20 - 542 \times 1$;
- divisibilité : 84 est divisible par 7 car $84 = 70 + 14 = 7 \times 10 + 7 \times 2 = 7 \times 12$
- Aire d'un triangle comme somme des aires deux triangles rectangles sur une situation de simple. *(figure page suivante)*
- Aire latérale d'un prisme comme somme des aires des faces latérales ou comme aire du rectangle de côtés h et (a+b +c + d+e).*(figure page suivante)*.



- Résolution de problèmes du type : " un commerçant achète 30 livres, 50 F chacun. Il veut faire un bénéfice de 10 F sur chaque livre. Quel est le prix de vente total ?" avec les deux méthodes : prix de vente d'un livre puis de 30 livres ou prix d'achat total "plus" bénéfice total.

A ce sujet, il faudrait faire comprendre à nos élèves la différence entre une activité mathématique et un travail professionnel. Dans les trois derniers exemples, ce ne sont pas les résultats à proprement parler qui sont intéressants, mais les structures de calcul que l'on rencontre et qui sont communes à toutes ces situations. Là est la véritable activité mathématique et l'apprentissage du calcul littéral passe par de telles activités.

Equations

Comme les développements-factorisations, la résolution d'équations est traitée très progressivement : opérations "à trou" en Sixième, le nombre manquant est remplacé par une lettre en Cinquième, équations du premier degré en Quatrième et systèmes d'équations en Troisième.

Une première remarque concerne la compétence exigible de Cinquième suivante : *«Mettre en équation un problème dont la résolution conduit à une équation à coefficients numériques de l'un des types : $a + x = b$, $ax = b$».* En effet, les problèmes qui aboutissent à de telles équations peuvent être facilement résolus par l'arithmétique; et, comme nous l'avons déjà remarqué, les élèves ne s'en privent pas. De ce fait, ils ne voient pas du tout l'intérêt de la mise en équation d'un problème. Là encore c'est donc un exercice de "style" que nous leur demandons, exercice qui donne le pas à la méthode sur le résultat. Or ceci est très difficile à admettre de leur part, d'autant plus que nous leur demandons aussi de vérifier leur résultat, ce qui accentue encore son importance.

En effet, vérifier que des nombres sont solutions d'équations est très important. Cela permet de faire fonctionner le concept même d'équation. Ainsi une telle compétence : «Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation» pourrait tout-à-fait être proposée dès la Sixième, sans nécessiter pour autant une résolution d'équation.

Les opérations "à trou" étant utilisées dès le CP, ne pourrait-on pas remplacer les trous par des lettres dès la Sixième, et proposer de traduire des énoncés suffisamment "compliqués" par des équations avec des lettres, comme nous le faisons actuellement pour les formules de volumes, d'aires et de périmètres ?

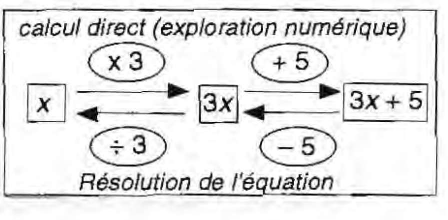
Les analyses d'EVAPM font apparaître une relative réussite au niveau de la mise en équation (par exemple 50% pour l'exercice EVAPM 4/89 A14-16) mais des difficultés importantes au niveau de la résolution (25 % pour le même exercice). Et pour cet exercice, l'analyse poursuit : «L'équation est souvent bien posée, mais on assiste souvent, en direct, à la perte de sens progressive caractéristique de la modélisation algébrique. Ainsi, privés du contrôle du sens, les élèves en arrivent-ils à confondre, sans s'en rendre compte, les x (inconnues) avec le signe de la multiplication. Il est manifeste que les règles de calcul formel n'ont de sens que si on les contrôle par le sens.

Avec ce même souci du sens, le GREM, dans son texte cité en référence, suggère quelques étapes significatives pour résoudre un problème nécessitant une mise en équation :

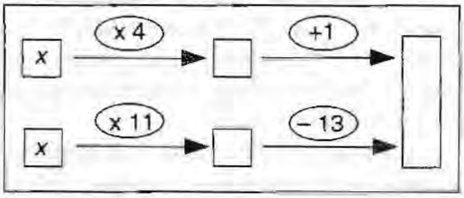
- **une phase d'exploration numérique à connotation fonctionnelle** : il s'agit ici de donner à priori des valeurs numériques à la variable et mettre ainsi en oeuvre les processus de calcul. On peut aussi, à partir de tels calculs, avoir une idée de l'ordre de grandeur de la solution, éventuellement à l'aide d'un graphique.
- **une phase d'algébrisation** qui aboutit à l'écriture de l'équation à partir de la mise en évidence de l'ossature commune des calculs précédents.
- **le registre formel** qui comprend les transformations éventuelles d'écritures et la résolution proprement dite de l'équation.

Les commentaires des programmes pourraient en effet insister davantage sur l'aspect fonctionnel des équations qui à notre sens est très formateur.

Par exemple, pour des équations du type $3x+5 = 8$, la chaîne d'opérateurs est établie à partir du calcul direct (exploration numérique) avec explicitation des priorités des opérations, et la résolution de l'équation est alors mise en évidence par le processus inverse des opérations.



Ceci met aussi en évidence la prise en compte inversée des priorités des opérations dans la résolution d'équations. Signalons aussi que ce type de traitement des équations favorise la résolution, sans développement des équations du type $2(x + 5) = 8$, en explicitant le sens de l'algorithme utilisé.



Pour des équations du type $4x+1 = 11x-13$, suivant le même principe d'exploration numérique, on fait des "essais" pour un certain nombre de valeurs de x et on "ajuste" pour trouver le même résultat.

Si ces méthodes sont bien sûr limitées quant à leur "efficacité" au sens "productif" du terme, elles sont certainement efficaces au niveau de l'appropriation du concept d'équation. Et comme nous le disions précédemment, l'acquisition du sens permettra une meilleure maîtrise des procédures de plus haute technicité.

Lecture, expression et sens.

Ces trois aspects sont indissociables et c'est bien sûr à ce niveau que les élèves rencontrent le plus de difficultés. Le paradoxe de l'apprentissage du calcul algébrique est que le calcul fonctionne sans référence à la signification des lettres manipulées, mais que, pour le mettre en place et le contrôler, donner ou maintenir du sens est indispensable.

Ainsi, quand on utilise des formules pour calculer sur des grandeurs ou qu'on utilise les grandeurs comme référence dans un calcul, les lettres ont chacune leur dimension et on doit faire attention à l'homogénéité des écritures : si a et b sont des longueurs, leur produit est une aire ...

Par contre, pour un polynôme à coefficients numériques, l'indéterminée ne peut pas avoir le sens d'une longueur (ou alors il faut attribuer aux différents coefficients numériques des dimensions cachées).

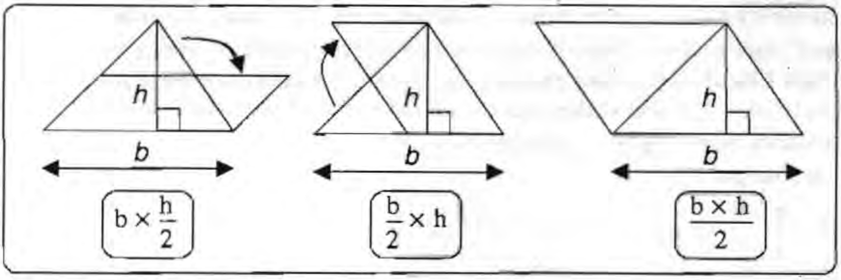
Les remarques que nous faisions dans notre texte "Connaissance des nombres - Calcul numérique" sur l'usage de la calculatrice et sur la lecture des expressions sont bien entendu tout aussi pertinentes pour le calcul littéral : *«L'utilisation systématique de la calculatrice n'incite pas toujours à une "lecture" préalable au calcul, à une analyse de la structure de l'expression numérique.»* Comment espérer alors un transfert ou une extension de cette compétence aux expressions littérales ? Dans ce même texte nous incitions à une lecture réfléchie (raisonnée ?) : *«il faudrait inscrire en quatrième une compétence de type traductif : passage d'une expression numérique ou littérale à un texte écrit en français et réciproquement (sur des expressions* *simples bien sûr), pour inciter les élèves à lire en "compréhension" et non pas "mot à mot".»* Nous observons souvent les confusions liées à une lecture "mot à mot", confusions encore plus grandes si l'information est uniquement orale sous une forme défectueuse ne prenant pas en compte de nécessaires silences manifestant les groupements, silences traduits dans les exemples ci-dessous par : "...".

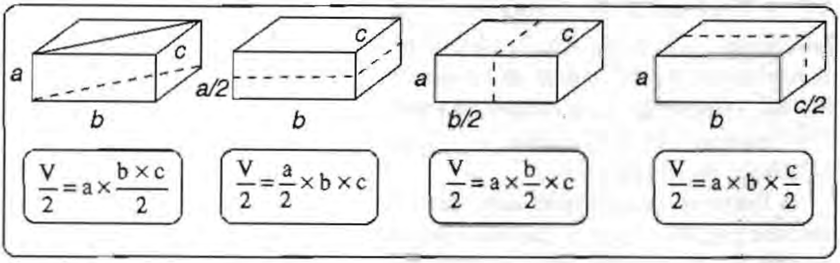
$3+\dfrac{5}{2}$ ["3 plus ... 5 sur 2"] et $\dfrac{3+5}{2}$ ["3 plus 5 ... sur 2"] ;

$\sqrt{9}+7$[radical de 9 ... plus 7] et $\sqrt{9+7}$ ["radical de ... 9 plus 7"] ; $3x+5$ [$3x$ ... +5] et $3(x+5)$ [3 facteur de ... $x+5$]. Nous pourrions multiplier de tels exemples. De même, la lecture "mot à mot" de "$-$y" ("moins y" au lieu de "opposé de y") n'est pas étrangère au fait que les élèves pensent que "$-$y" est nécessairement négatif. (Tout le monde sait que plus il y a de signes "$-$" plus c'est négatif !!!).

A l'inverse, on rencontre aussi des écritures fausses qui expriment malgré tout une pensée correcte ; par exemple, pour le calcul du périmètre d'un carré de côté $2x+3$, on trouve : $4\times 2x+3=8x+12$. Même si les parenthèses n'ont pas été écrites, elles sont manifestement présentes à l'esprit de l'élève. On ne dira jamais assez à nos élèves de prendre le temps de lire, prendre le temps d'observer et de réfléchir avant d'écrire, et que, de ce fait, ils prendront le temps de méditer. *"Un calcul ne s'effectue pas, il se médite"* (André Revuz). Combien d'élèves se lancent immédiatement dans le développement de $(2x+5)(x+3)$ pour résoudre l'équation $(2x+5)(x+3)=0$? Combien d'élèves développent l'expression $(2x+3)^2-5(2x+3)$ alors qu'on leur demande de factoriser ! Les "automatismes" prédominent dans leur comportement vis-à- vis de l'activité mathématique. Il ne s'agit pas de les bannir, mais de les faire précéder d'activités permettant d'atteindre le sens.

Dans notre texte "Connaissance des nombres - Calcul numérique" , nous écrivions : *«En quatrième, les commentaires des programmes devraient inciter à faire établir les "formules" qui régissent développements et factorisations à partir d'activités géométriques.»* Il est bien évident que les développements et factorisations ne sont pas les seuls concernés. Les transformations d'écritures telles que $\dfrac{a\times b}{2}=\dfrac{a}{2}\times b=a\times\dfrac{b}{2}$ peuvent être introduites ou commentées à l'aide de situations analogues à celles que nous présentons ci-dessous : aire d'un triangle, et demi-volume d'un parallélépipède.





De tels exemples d'activités devraient fourmiller dans des documents officiels d'accompagnement des programmes comme il est question d'en faire en ce qui concerne l'évaluation. Mais bien sûr il faut aussi donner le temps de faire, et de multiplier, de telles activités.

Conclusion.

Nous comparions l'apprentissage au calcul littéral à l'apprentissage du langage chez les jeunes enfants. Comme ces enfants qui s'expriment maladroitement sans une réelle maîtrise du langage, nos "jeunes" élèves manient maladroitement les expressions littérales ; mais c'est à travers ces maladresses qu'ils pourront acquérir progressivement cette maîtrise, à condition qu'on leur en donne, qu'on nous en donne le temps et les moyens. Et c'est dans le texte du GREM que nous irons chercher le mot de la fin : *«Comme pour tous les grands paliers de l'activité mathématique où l'hétérogénéité des modes d'appropriation est considérable, il est essentiel que l'enseignement sache "laisser du temps au temps" : c'est une affaire de programmes ; c'est aussi une affaire de pratique. ». Et derechef, une affaire d'horaires...*