

# SCIONS DU BOIS

## Pour faire dodécaèdres et ico- saèdres en taillant dans des cubes

Françoise PÉCAUT  
Avignon

### 1 - Introduction

L'origine de ce travail réside dans le désir de fabriquer artisanalement en bois plein, les deux solides de Platon les plus « compliqués », à savoir le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers. En effet, malgré leur importance en géométrie euclidienne à trois dimensions, il ne semble pas que les modèles en soient facilement accessibles dans le commerce.

Beaucoup d'enseignants les font fabriquer à leurs élèves avec du bristol et du scotch : c'est rapide, précis et facile, mais peu durable, évidemment fragile. Plus grave, le polyèdre obtenu est vide, on ne peut pas le recouper. On connaît [9] le "filicoupeur" de Charles PEROL qui découpe du polystyrène expansé à l'aide d'un fil d'acier chauffé par un courant électrique ; pédagogique par excellence, cet appareil permet un travail à trois dimensions avec de jeunes élèves ; il procure beaucoup de plaisir par l'apparente facilité du découpage, comme dans du beurre ! Pour ma part j'ai choisi le bois et la scie à onglet. J'ai travaillé du platane, du tilleul, du bossé (bois exotique), suffisamment isotropes, pas trop durs ni cassants. Dans cet article, j'explique com-

ment découper des cubes pour obtenir des icosaèdres et des dodécaèdres et comment utiliser systématiquement les chutes pour découvrir des pavages périodiques comprenant ces polyèdres. Un cube peut être inscrit dans un dodécaèdre ([1] p. 106 ; [3] p. 56 ; [5] p. 38) ; le contact se fait le long de l'ensemble des arêtes du cube (figure 1). Un dodécaèdre peut aussi être inscrit dans un cube, qu'il touche suivant trois couples d'arêtes parallèles dans trois directions perpendiculaires (figure 2). Je propose donc de se procurer, auprès d'un menuisier, une vingtaine de cubes, de 7 cm de côté au moins. Une première méthode consiste à pratiquer douze coupes successives sur un

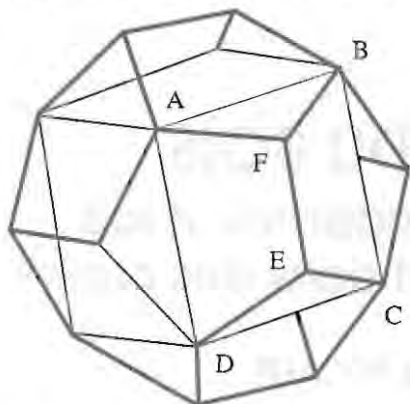


figure 1 : cube inscrit dans un dodécaèdre régulier.

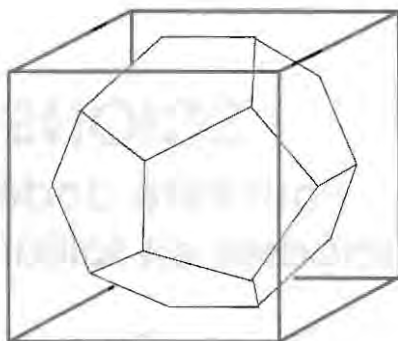


figure 2 : dodécaèdre régulier inscrit dans un cube.

cube (figure 2). Une deuxième méthode consiste à coller sur un cube les douze "toits" tels que *ABCDEF* (figure 1), découpés par ailleurs dans un autre cube. Dans les deux cas, on obtient le polyèdre voulu et quelques résultats intéressants par dessus le marché. Dans cet article, on n'expose que la première méthode.

## 2 - Dodécaèdre inscrit dans le cube : indications pratiques.

Le dièdre d'un dodécaèdre régulier est  $\arccos -\frac{1}{\sqrt{5}} = 116^\circ 56'$

a) Première série de quatre coupes :

Le cube est fixé sur la scie à onglet comme l'indique la figure 3. Le bâti de la scie sera indiqué par la suite par deux plans perpendiculaires, dits horizontal et vertical, et la lame de scie par un trait en "dents de scie". L'angle de coupe est fixé pour les douze coupes de manière que :

$\alpha = (180^\circ - 116^\circ 6') + 2 = 31^\circ 7'$ . (voir figure)

On fait la coupe  $AB$ , puis, en tournant le cube de  $180^\circ$  autour de son axe vertical, la coupe  $CD$ ; enfin, en mettant le cube sens dessus dessous, sans toucher à l'angle de la scie, les coupes  $CE$  et  $AF$  (figure 3).

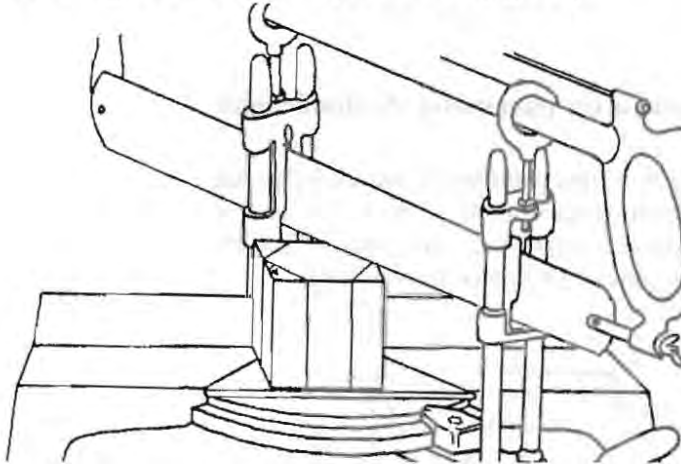


figure 3 : la scie à ongles et la première série de quatre coupes

On obtient un prisme droit à base hexagonale.

b) Deuxième série de quatre coupes.

Les faces hexagonales sont placées dans des plans verticaux de bout. La pièce repose sur le plan horizontal par une de ses deux faces rectangulaires les plus étroites, elle ne s'appuie sur la partie verticale du bâti que par une arête horizontale. On pratique les quatre coupes indiquées comme au a).

Le solide obtenu a quatre faces pentagonales égales, deux faces hexagonales qui seules subsistent de la surface initiale du cube, et quatre faces égales trapèzes isocèles (figure 4).

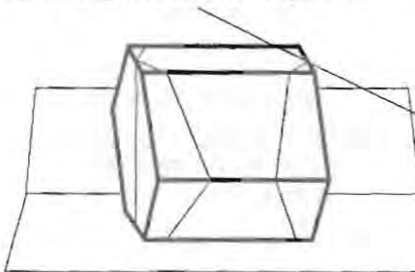


figure 4 : deuxième série de quatre coupes

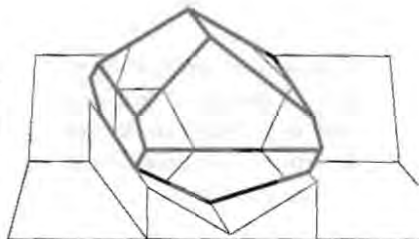


figure 5 : troisième série de quatre coupes

c) Troisième série de quatre coupes.

Les faces hexagonales doivent être de bout. Il faut faire une cale pour maintenir le polyèdre pendant la coupe (figure 5).

On garde soigneusement toutes les chutes, dont la forme est visible sur les figures 3, 4 et 5.

### 3 - Famille à un paramètre de dodécaèdres inscrits dans un cube.

Les douze coupes précédentes pouvaient être faites avec n'importe quel angle  $\alpha$  compris entre  $0^\circ$  et  $45^\circ$ . Pour  $\alpha = 0^\circ$ , on a le cube ; pour  $\alpha = 31^\circ 7'$ , c'est le dodécaèdre régulier du paragraphe 2 ;  $\alpha = 45^\circ$  conduit au dodécaèdre rhomboïdal comme il résultera des considérations qui suivent.

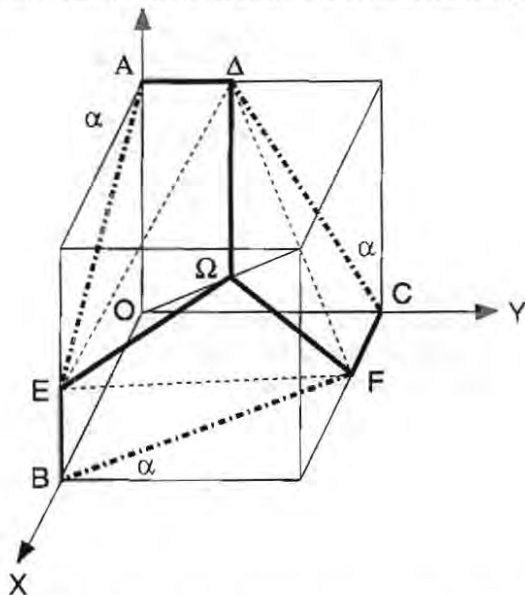


Figure 6

Calcul des coordonnées des sommets du dodécaèdre appartenant au premier quadrant. En traits mixtes, la trace des plans de coupe sur les plans de coordonnées.

Prenons trois axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  et le cube de centre  $O$ , d'arête  $2a$ . Limitons le dessin (figure 6)) au premier quadrant. Les trois plans de coupe concernés (un de chaque série du §2) ont en commun le point  $\Omega$  dont les trois coordonnées sont la solution du système :

$$x + y \tan \alpha = a$$

$$y + z \tan \alpha = a$$

$$z + x \tan \alpha = a$$

$$\Omega \left( \frac{a}{1 + \tan \alpha}, \frac{a}{1 + \tan \alpha}, \frac{a}{1 + \tan \alpha} \right)$$

$$E(a, 0, a(1 - \tan \alpha)).$$

Pour  $0 < \alpha < 45^\circ$ , le solide obtenu est un dodécaèdre dont les douze faces sont égales, mais en général pas régulières. La face est un pentagone admettant un axe de symétrie (figure 7) :

$$\Omega E = \Omega F = \frac{a \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}}{1 + \tan \alpha}$$

$$EB = a(1 - \tan \alpha)$$

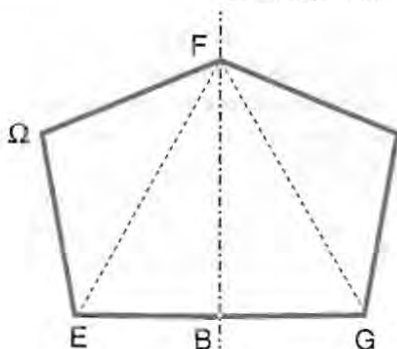


figure 7

en vraie grandeur, la face pentagonale du dodécaèdre défini par  $\alpha = 20^\circ 9'$  et  $a = 7$  cm. Le triangle EFG est équilatéral. L'enlèvement des 8 pyramides telles que  $\Omega DEF$  donnera l'icosaèdre.

Ce dodécaèdre est régulier si et seulement si ses faces sont régulières, condition qui se traduit par  $2EB = \Omega E$ , soit :

$$2(1 - \tan^2 \alpha) = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}$$

Le trinôme bicarré obtenu en élevant au carré a deux racines positives dont une seule est inférieure à 1,  $\tan^2 \alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ . Notons  $\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  le nombre d'or ;  $\tan \alpha = 1/\tau$  est l'unique racine qui convient. On vérifie qu'alors  $\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  qui correspond au dièdre du dodécaèdre régulier

$$\left( \text{arc cos} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Cas particuliers :

$\alpha = 0^\circ$  ; on ne fait aucune coupe, le solide obtenu est le cube, qui doit être considéré comme ayant douze faces, chacune égale à un demi-carré.

$\alpha = 45^\circ$  ; le point E est confondu avec B,  $\Omega = (a/2, a/2, a/2)$  ; la face du dodécaèdre est un losange, dont le grande diagonale mesure  $a\sqrt{2}$  et la petite

$\alpha$ , double de la distance de  $\Omega$  au plan  $xOz$ . Le polyèdre obtenu est le dodécaèdre rhomboïdal.

Dans le cas général  $0 < \alpha < 45^\circ$ , le groupe d'isométries du polyèdre est le sous-groupe à 24 éléments du groupe du cube qui contient la symétrie centrale. Dans le langage de la cristallographie, c'est la classe dite "hémiedrie centrée" du système cubique ([8] p. 70). Dans les cas particuliers  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 45^\circ$ , le groupe d'isométries est le groupe du cube.

#### 4 - Famille à un paramètre d'icosaèdres inscrits dans un cube

Reprenons la figure 6. Faisons, à la scie, une coupe qui élimine la pyramide de sommet  $\Omega$  dont la base est le triangle équilatéral  $DEF$ , et de même dans les sept autres quadrants. Huit faces triangles équilatéraux s'ajoutent ainsi aux douze faces pentagonales précédentes, qui, recoupées, sont devenues des triangles isocèles. Je ne m'étends pas sur la pratique de l'opération ; comme chacun sait, il suffit de placer la pièce de manière que l'une des droites  $(DE)$ ,  $(EF)$ ,  $(FD)$ , soit verticale pour que le plan de coupe soit vertical. La difficulté est de fixer le polyèdre de manière qu'il ne bouge pas pendant la coupe.

Le solide obtenu a 20 faces.

Pour  $0^\circ < \alpha < 15^\circ$ , on trouve

$$EB = a(1 - \tan \alpha) \quad EF^2 = 2a^2(1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha)$$

Pour que le solide soit un icosaèdre régulier, il faut et il suffit que  $2EB = EF$ , égalité qui se traduit par une équation du second degré en  $\tan \alpha$  dont la

seule racine carrée inférieure à 1 est  $\tan \alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

Donc  $\alpha = 20^\circ 9'$ , et le dièdre du polyèdre est tel que  $\sin \beta = \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2}{3}$ .

On retrouve bien le dièdre de l'icosaèdre régulier,  $\beta = 138^\circ 2'$ .

Cas particuliers :

$\alpha = 0^\circ$  ; l'élimination des 8 pyramides triangulaires fournit un cuboctaèdre.

$\alpha = 45^\circ$  ; alors  $EF = a\sqrt{2}$  et  $E$  est en  $B$ .

Le solide obtenu est l'octaèdre régulier, les douze triangles isocèles sont aplatis suivant les douze arêtes.

Parmi les solides de Platon, le tétraèdre seul échappe aux deux familles à un paramètre mises en évidence.

**5 - Utilisation des chutes, compléments de pavage du dodécaèdre dans le système cubique simple.**

Remplissons l'espace de cubes et imaginons chacun d'eux découpé comme il est dit au paragraphe 1. On a un pavage de l'espace à deux motifs, dodécaèdre et (figure 8) polyèdre à centre de symétrie obtenu en recollant les chutes aux centres des vides laissés par les dodécaèdres. Précisément :

1) en chaque centre de cube, c'est-à-dire en chaque nœud d'un réseau cubique simple, se trouve le centre d'un dodécaèdre ; les dodécaèdres sont deux à deux mitoyens, la mitoyenneté consistant en une arête commune. Le dessin (figure 9) représente 4 dodécaèdres d'une couche horizontale vue de dessus.

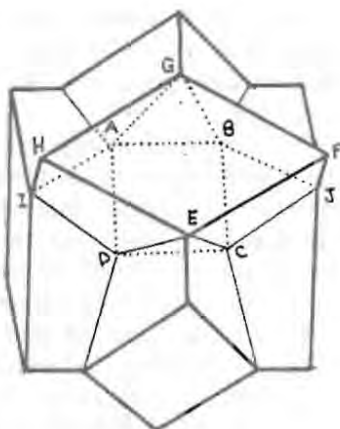


figure 8

Complément de pavage du dodécaèdre régulier

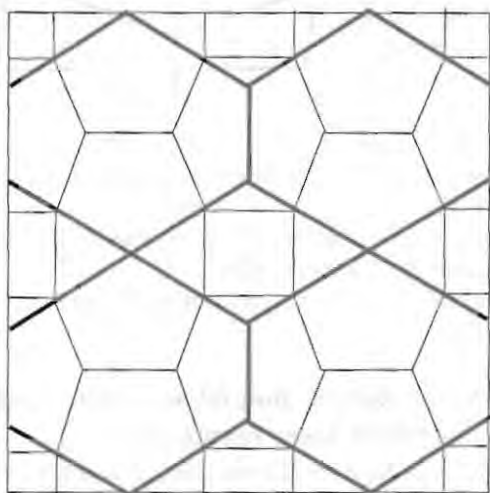


figure 9

rangement de dodécaèdres réguliers en réseau cubique simple (vue de dessus des éléments du pavage dont les centres sont dans un plan de symétrie)

2) en chaque point occupé avant découpage par un sommet d'un cube se trouve le centre d'un polyèdre non convexe dessiné figure 8. Ces centres occupent aussi les nœuds d'un réseau cubique simple décalé par rapport au premier.

La classe de symétrie du nouveau polyèdre est l'hémiédrie centrée du système cubique. Ce polyèdre a 6 faces losange, dont le rapport des diagonales est le nombre d'or, et 24 faces égales chacune à la moitié d'un pentagone régulier.

En fait, quand on range une infinité de dodécaèdres dans l'espace euclidien à trois dimensions en réseau cubique simple, deux d'entre eux se touchant par une arête, la partie complémentaire est un polyèdre infini avec une infinité de trous, dont toutes les faces sont des pentagones réguliers. En collant un nombre suffisant de polyèdres représentés figure 8 par leurs faces losange, on peut se faire une idée de ce polyèdre infini, beaucoup plus précise qu'en regardant les vides laissés par un rangement de dodécaèdres, d'autant plus qu'il est difficile de faire tenir ceux-ci dans la position voulue, quelle que soit la matière dont ils sont faits.

On peut dire la même chose d'un réseau cubique simple d'icosaèdres, le motif complémentaire (figure 10) ayant une forme analogue. Les losanges sont plus allongés ; dans chacun des 8 creux, il y a un triangle équilatéral et trois demi triangles équilatéraux. On le construit très facilement en collant convenablement les chutes des 20

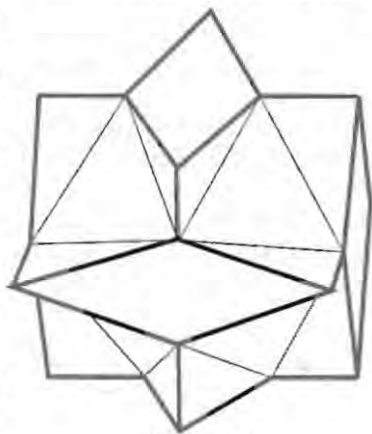


figure 10  
complément de pavage de l'icosaèdre  
régulier

coupes du paragraphe 4. En le recoupant de manière qu'il devienne convexe, on trouve l'icosaèdre de PEARCE ([7] p.177) à 8 faces équilatérales et 12 faces isocèles.

N.B. les chutes du b) et du c) (cf. §2) doivent être coupées suivant leur axe de symétrie avant réorganisation.

## 6 - Un pavage avec trois types de polyèdres : cube, dodécaèdre, et un polyèdre convexe à faces régulières.

Le complément de pavage du dodécaèdre régulier dessiné figure 8 mérite qu'on s'y intéresse de plus près. Soient  $A, B, C, D$  les quatre points où les axes d'ordre 3 du polyèdre rencontrent la surface vue de dessus.  $ABCD$  est un carré à cause des symétries de la figure ; d'autre part, les quatre triangles  $DEC, CJB, BGA, AID$  sont équilatéraux comme il résulte d'un calcul simple. Isolons le polyèdre convexe dont les dix sommets sont nommés sur la figure



8, et découpons la pièce en six morceaux isométriques à ce polyèdre. Il reste un cube central. Ensuite, collons les morceaux deux à deux par leur face losange. On obtient trois polyèdres convexes tels que celui dessiné en 11 b), qui n'est autre que le bilune-birotonde de JOHNSON [6] ou le  $M_8$  de PLOT [4]. Ce collage est compatible avec la structure du polyèdre infini complémentaire de la partie de l'espace occupée par les dodécaèdres rangés en réseau. Le polyèdre de la figure 8 est une période du polyèdre infini, choisie pour son maximum de symétries ; le cube, convenablement réuni à trois polyèdres 11 b), est une autre période, qui a l'avantage d'être l'union de polyèdres convexes très simples.

Il est possible que les pavages dont l'un des motifs est un icosaèdre ou un polyèdre à symétrie icosaédrale aient un intérêt en métallurgie (alliages, cristaux) et surtout en biologie puisque l'une des formes d'architecture des virus est fondée sur la symétrie icosaédrale ([3] p.13 et préface à la 3<sup>e</sup> édition ; [2] p 27).

#### Références bibliographiques.

- [1] BERGER, M. *Géométrie, vol 3, convexes et polytopes...* Cedic Paris 1978.
- [2] CORNUET, P. *Eléments de virologie végétale.* INRA, Paris 1987.
- [3] COXETER, H.S.M. *Regular polytopes.* Dover publications, New York 1973.
- [4] DARCHE, M., et PITOU, F., *Polyèdres dans l'espace.* Dossiers du PLOT mai 1984.
- [5] HOLDEN, A. *Formes et symétries.* Cedic Nathan. Distracts n°2, 1977.
- [6] JOHNSON, N.W. *Convex Polyhedra with regular faces.* Canadian Journal of math. n° 18, 1966.
- [7] PEARCE, P., *Structure in nature is a Strategy for Design.* The MIT Press, 1978.
- [8] PÉCAUT, F., *Pavés et bulles.* Brochure de l'APMEP n°23, 1978.

#### Matériel pédagogique.

Le FILICOUPEUR, fabrication : Régionale APMEP de Clermont. Commandes à Monique GARAND, 11, rue Etienne Boileau, 63800 Courmon (350 F + 55 F de port) POLYDRON, polygones réguliers en matière plastique de couleur permettant de construire très rapidement la plupart des polyèdres à faces régulières : ODMF, 64 rue Rodier, 75009 PARIS (930 F pour 100 triangles, 50 carrés, 12 pentagones et 12 hexagones).

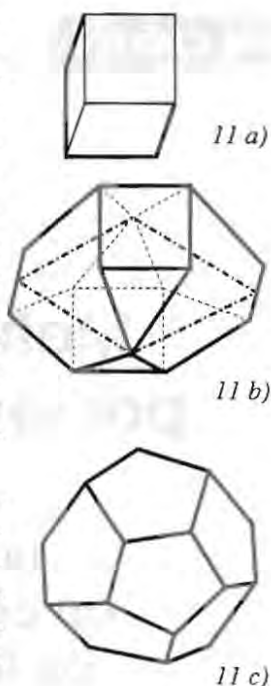


figure 11