Mathématiques en Terminales ES

Sylviane GASQUET-Raymond CHUZEVILLE
Grenoble

L'ensemble des programmes de mathématiques de terminales ne sont pas encore parus fin mars 94. Ils ont été soumis au vote du Conseil Supérieur de l'Education le 10 Mars, lequel a voté contre. Ce vote n'étant que consultatif il est probable que les projets présentés sortiront tels quels.

En ce qui concerne le programme de la série ES il s'inspire d'assez près du projet laissé en juin par le groupe technique disciplinaire, mais certaines retouches en modifient quelque peu l'esprit.

Voici quelques remarques qui n'engagent que leurs auteurs.

I. Qu'en est-il de la continuité avec le programme de première ES ?

Dans la formation d'un élève, il s'agit de lui donner à la fois des outils (par exemple des techniques) qui sont de l'ordre des savoirs statiques et aussi de lui apprendre des savoirs dynamiques (savoir choisir tel ou tel outil à bon escient). C'est-à-dire lui apprendre à changer de cadre, à faire croiser des domaines différents. C'est le préparer à une pensée plus complexe, celle de la société dans laquelle il va vivre. Est-ce que le programme de terminale poursuit dans cet esprit ?

- Apprendre à choisir.

Dans le programme de première on proposait plusieurs outils pour le sens de variation d'une fonction et on se proposait d'éduquer au choix en terminale. Qu'en est-il advenu ? Pourquoi cela a-t-il disparu ?

- L'information chiffrée.

Cette rubrique concernait plus la formation du consommateur critique de statistiques que celle du producteur. Or justement le seul paragraphe qui poursuivait cet objectif a disparu (les flux et les stocks). Il s'agissait seulement de faire percevoir qu'il existe des informations de nature différente et que des erreurs de raisonnement naissent du fait de leur confusion fréquente.

- L'approche graphique.

Elle est un peu gommée. L'idée de connaître une fonction par sa représentation graphique n'apparaît plus. L'approche graphique permet pourtant de donner du sens à ce que les élèves manipulent. Un apprentissage technique, un automatisme libère la pensée seulement s'il peut s'insérer dans un contexte plus large ayant du sens pour l'élève. Sinon, il abêtit celui qui s'entraîne sans comprendre.

Pourquoi séparer : les contenus "techniques" qui seraient décrits dans le programme et les attitudes mentales à développer qui, elles, seraient du ressort de la "pédagogie", donc de ce fait systématiquement exclues des programmes. Un programme scolaire n'est-il pas une base pour coordonner les objectifs de formation au sens large ?

Mieux vaut un contenu un peu ambitieux dans les aptitudes à développer, que des contenus techniques isolés d'une pensé réelle. Là réside le vrai partage du savoir.

2. Le plus nouveau en terminale ES

La partie la plus nouvelle concerne la croissance relative et la dérivée logarithmique.

Sur ce thème, nous n'avons pas trouvé un livre qui fasse le lien entre mathématiques et économie comme on peut espérer le faire avec des élèves (sinon nous donnerions le titre ici!). Nous avons donc rédigé 30 pages sur ce thème, sous forme de cinq dialogues entre un économiste et un "prof de math" (chapitre 9 de ***Fenêtre sur courbes****. CRDP de Grenoble). Voici un extrait qui concerne directement les définitions posées dans le projet de terminale.*

• A propos des fonctions affines.

- Vous trouvez que $x \mapsto 2x+1$ a la même croissance que $x \mapsto 2x+10$? s'étonne l'économiste.
- Mais oui, ces deux fonctions sont représentées par des droites parallèles, donc de même pente.
- Pensez-vous, rétorque l'économiste, que si les salaires augmentent comme les prix alors votre pouvoir d'achat est stable ?
- Euh, oui, dit le Professeur de mathématiques (qui vient de faire grève pour son maintien !)
- Alors si vous dites que $x \mapsto 2x+10$ augmente comme $x \mapsto 2x+1$, expliquez-moi pourquoi vous allez trouver que le quotient $x \mapsto (2x+10)/(2x+1)$ décroît ?
- Mais pour une fonction $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$, c'est le signe de "$ad-bc$" qui compte !
- Mais justement, pourquoi les constantes interviennent-elles ici ? Quel est donc leur rôle ? Pourquoi les oubliez-vous quand vous parlez d'une fonction affine ?

On ne parle pas de la même croissance...

- Tout vient de ce que votre taux d'accroissement en mathématiques, ce n'est pas vraiment un taux ... dit l'économiste distingué.

En effet, quand on calcule [population (91) – population (90)] c'est une augmentation absolue, et quand on calcule $\dfrac{\text{pop}(93)-\text{pop}(90)}{3}$ ou $\dfrac{\text{pop}(93)-\text{pop}(90)}{93-90}$ cela reste dans le domaine des augmentations absolues, par opposition aux augmentations relatives. Ce serait ici l'augmentation moyenne annuelle.

- Pour un matheux, si on note $p(t)$ l'effectif de la population en fonction du temps, le rapport que vous venez d'écrire est le taux d'accroissement de la fonction p entre 90 et 93.
- Justement ! Pour nous, un taux résulte d'un rapport homogène : il y a dans le calcul un numérateur et un dénominateur exprimés avec la même unité. Ce rapport sans unité fait apparaître le pourcentage, mais n'exclut pas les autres unités ; par exemple, on parlera de taux annuel en faisant intervenir l'inverse du temps. Tandis que le rapport précédent s'exprimerait par un nombre "d'habitants par an".
- Alors, quand on passe à la limite...
- Passer à la limite ne change pas la nature du rapport. Le nombre dérivé reste lié aux augmentations absolues. Ce n'est pas un hasard si le coût marginal (qui est un prix unitaire, celui de la "dernière" unité fabriquée)

correspond au nombre dérivé. Le coût marginal n'a rien à voir avec un taux...

- Est-ce qu'on pourrait s'accorder pour dire que le nombre dérivé correspond à la variation absolue en un point (la croissance absolue s'il s'agit de croissance) ?

  Alors oui, $x \mapsto 2x+10$ et $x \mapsto 2x+1$ ont la même croissance absolue.

  Vrai aussi que $x \mapsto 2x+1$ a une croissance absolue indépendante de x ;

  Vrai encore que $x \mapsto 2x+1$ a une croissance absolue plus forte que $x \mapsto x+10$.

- Oui, mais la croissance absolue ne préjuge rien de la variation relative, qui intéresse plus souvent les économistes pour analyser une évolution.

Comment décrire une variation relative ?

f étant une fonction à valeurs strictement positives,

la variation relative de f sur $[a,b]$ est $\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}$ ou $\dfrac{f(b)}{f(a)}-1$

On dira par exemple qu'une production a augmenté de 30% en 5 ans.

Pour communiquer, pour comparer, les économistes privilégient le "taux annuel". Soit, si la variable désigne le temps compté en années

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{f(a)}.$$

Mais lorsqu'on passe du discret au continu, lorsqu'on étudie un phénomène sur le long terme et qu'un an est alors "un petit accroissement de la variable", ce taux annuel qui peut s'écrire aussi

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{1.f(a)} \text{ ou } \frac{f(a+1)-f(a)}{[(a+1)-a].f(a)}$$

prend la forme $\dfrac{[f(b)-f(a)]}{(b-a).f(a)}$ qui devient par passage à la limite : $\dfrac{f'(a)}{f(a)}$

C'est donc la *dérivée logarithmique de f en a* (autrement dit le nombre dérivé de $\ell n f$ en a). Cette dérivée logrithmique de f en a peut être considérée comme **la mesure de la variation relative de f en a**. C'est une mesure instantanée. Elle est peu usitée pour "communiquer" à propos de l'évolution d'un phénomène puisque les économistes utilisent plutôt les taux annuels. La dérivée logarithmique intervient surtout quand on s'intéresse à des variables produit ou rapport.

Les représentations graphiques sont alors extrêmement explicites pour comprendre la différence entre dérivée logrithmique et taux annuel (le signe de cet écart, mais aussi son importance. La notion d'approximation apparaît).

Si A (a ; $f(a)$) et B ($a+1$; $f(a+1)$), le taux annuel s'illustre par le rapport pente de la corde [AB] / valeur initiale .

La dérivée logrithmique de f en a s'illustre, elle, par le rapport pente de la tangente en A / valeur initiale.

3. Quels styles de problèmes peut-on poser ?

Si les sujets du bac 95 sont des sujets du bac B, tout l'effort de rénovation de cette série sera vain Mais il faut se garder aussi d'innover un jour d'examen. Serait-il possible de faire circuler avant que les commissions de choix ne se réunissent des exemples de textes dans l'esprit du nouveau programme ? Dans notre idée, il s'agit d'éviter les applications trop économiques, de garder la spécificité des mathématiques en s'ouvrant à d'autres genres de questions... Le plus simple est sans doute de donner un exemple.

Exemple de problème à introduction économique *(extrait de* ***Fenêtres sur courbes.*** *CRDP de Grenoble)*

A cette occasion on retrouvera des questions classiques comme l'intersection d'une courbe et d'une droite, la recherche d'une tangente de direction donnée pour minimiser une différence, ou encore l'équation d'une tangente issue d'un point donné, mais cette recherche aura un sens : déterminer le maximum d'un rapport..

TEXTE:

Introduction : lorsque les économistes comparent deux phénomènes (deux productions, deux populations...), soit ils observent l'évolution de la différence, soit celle du rapport. A propos de fonctions très simples, nous allons donc voir si ces deux évolutions sont indépendantes ou non.

- On considère les fonctions v et u définies par :

" Pour tout $x \geq 0$, $x \mapsto v(x) = x + 3$ et $x \mapsto u(x) = \sqrt{4x+1}$ "

Les valeurs des fonctions u et v en 0 seront appelées les valeurs initiales. Construire dans un même repère les représentations graphiques G_u et G_v des fonctions u et v .

a) A propos de la différence $v - u$

La parallèle à G_v passant par A(0,1) recoupe G_u en B. Quelle est l'abscisse de B ? Que peut-on dire de la fonction $v - u$ pour la valeur 2 ?

Comparer suivant les valeurs de x les nombres $(v-u)(x)$ et $(v-u)(0)$.

Déterminer graphiquement pour quelle valeur de x la fonction $v - u$ présente un minimum.

Justifier algébriquement le sens de variation de v-u et retrouvez les coordonnées du minimum.

b) A propos du rapport u/v

* *Comparaison avec la valeur initiale.* .

G_v coupe *Ox* en T de coordonnées (-3,0). Déterminer une fonction U qui aurait la même valeur initiale que *u* (U(0)=1) et telle que le rapport U/*v* soit constant, c'est-à-dire toujours égal à U(0)/*v* (0) ? Construire la droite correspondante (D'). Comparer graphiquement *(u/v)(x)* et *(u/v)* (0) pour *x* appartenant à [0;5].

Est-ce que (D') et G_u se recoupent ? Graphiquement, peut-on le prouver ? le conjecturer ? Compléter algébriquement.

Finalement sur quel intervalle le rapport u/v est-il supérieur à la valeur initiale *u*(0)/*v*(0) ?

* *Sens de variation de u/v*

Peut-on trouver graphiquement le sens de variation de *u/v* (avec une valeur approchée des coordonnées de l'extremum). Expliquez votre construction.

Déterminer l'équation de la tangente à G_u issue de T et les coordonnées du point de contact C.

Déterminer algébriquement le sens de variation de u/v.

c) Bilan. Compléter le tableau ci-dessous en indiquant toutes les valeurs frontières.

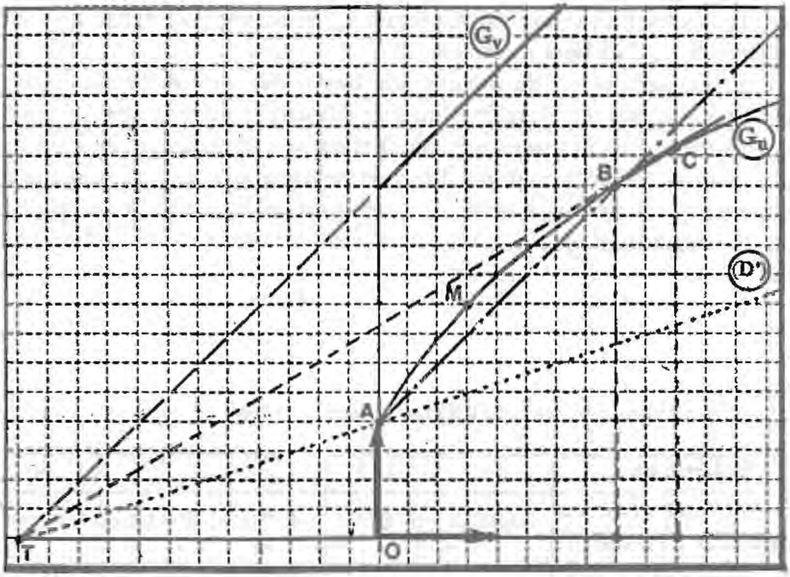
Valeurs de *x*	0				
(v–u)(x) inférieur ou supérieur à (v–u)(0)?					
sens de variation de la différence (v–u)					
(u/v)(x) inférieur ou supérieur à (u/v)(0)?					
sens de variation du rapport (u/v)					

Lorsque le rapport augmente, peut-on en déduire que la différence diminue? Et lorsque le rapport diminue ?

d) La généralisation est-elle possible ?

u et *v* étant deux fonctions croissantes à valeurs positives, si on sait que *u/v* croît peut-on conclure pour le sens de variation de *u* – *v* ? et si *u/v* décroît ?

Voici la figure attendue



4. Devenir de la géométrie ?

Le programme optionnel de première ES comporte un enseignement de géométrie mais, en terminale, il s'agit d'un "enseignement de spécialité" qui n'est pas une poursuite de l'option de première.
Malheureusement les raisons de ce choix n'ont pas été expliquées clairement aux enseignants chargés la mise en oeuvre au quotidien avec les élèves...

Rappelons brièvement que ce programme répondait à un objectif clairement annoncé : rééquilibrer les filières, permettre de diversifier la réussite scolaire, et en particulier détourner de la série C des élèves dont le projet professionnel n'était, à l'évidence, pas une poursuite d'étude scientifique.

Rappelons aussi qu'à la date de publication de ce programme, grande publicité était faite pour le bac "option zéro" et donc la géométrie ne devait être proposée qu'à des élèves volontaires. Ensuite une option est devenue obligatoire, l'option sciences économiques a disparu car intégrée à l'horaire obligatoire et voilà un bon nombre d'élèves pris dans la nasse de la géométrie obligée...

Alors disons-le, le choix de la géométrie est important, et même dans le contexte nouveau, il faudrait encore le proposer... (sans doute avec une rédaction plus adaptée...).Il est important en effet de ne pas leurrer les élèves. Pourquoi le bac B permettait-il aussi difficilement des poursuites d'études économique ou commerciale ? Pas seulement parce que "les meilleurs élèves" allaient en section C.

Il s'agit surtout ici de donner une bonne perception de l'espace et d'ouvrir les portes de l'algèbre linéaire. Manipuler, comprendre ce qu'est une projection dans l'espace (en particulier par le maniement du produit scalaire), réaliser qu'il n'y a qu'une direction orthogonale à un plan, déjouer les théorèmes qui se prolongeraient à faux, ne peut que favoriser la compréhension des mathématiques que les élèves risquent de rencontrer dans leurs études ultérieures (analyse des données).

ANNEXE

Pour se faire une idée, voici le tableau complet attendu :

Valeurs de x	0	0,75	2	2,5	30
(v – u)(x) inférieur ou supérieur à (v–u)(0)?	inférieur	inférieur	supérieur	supérieur	supérieur
sens de variation de la différence (v – u)	décroît	croît	croît	croît	croît
(u/v)(x) inférieur ou supérieur à (u/v)(0)?	supérieur	supérieur	supérieur	supérieur	inférieur
sens de variation du rapport (u/v)	croît	croît	croît	décroît	décroît

Ceci n'est qu'un exemple parmi d'autres...