

*Etudes*

## Une bouée pleine de surprises

G. Lavau

Lycée Corneille-Rouen

Nous sommes plusieurs collègues de plusieurs établissements scolaires de Terminale ou de Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles, à nous être passionnés pour un exercice qui figure dans le manuel de TERRACHER de TC :

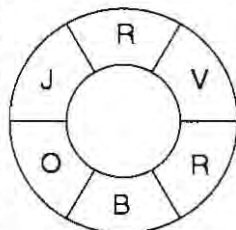
*On dispose d'une bouée circulaire de 6 cases et de 5 couleurs. De combien de manières différentes peut-on peindre la bouée de façon que deux cases adjacentes ne soient pas de la même couleur ?*

Le défi à relever est la découverte d'une solution générale avec  $n$  cases et  $p$  couleurs (dans le sens  $p$  couleurs au plus), avec  $n \geq 2$  et  $p \geq 2$ . Ce texte a pour but d'apporter une réponse aux collègues qui se seraient posé le même problème, et de décrire la multiplicité des solutions envisagées et la surprise parfois éprouvée devant les outils mathématiques rencontrés lors de la résolution de ce problème.

Nous incitons le lecteur à chercher de lui-même une solution pendant quelques jours (voire quelques semaines!) avant de poursuivre la lecture de cet article.

Il apparaît rapidement que l'énoncé peut s'interpréter de plusieurs façons.

(I) Les cases sont supposées discernables, ce qui est le cas si la bouée est fixée, ce qui empêche qu'on puisse la faire tourner autour de son centre ou de l'un de ses diamètres. Nous parlerons alors du problème de la bouée fixée. Si les couleurs sont désignées par  $p$  lettres, le coloriage de la bouée peut être représenté par une liste ou un mot de  $n$  lettres, choisies parmi  $p$ , de façon que deux lettres successives soient différentes, de même que la première et la dernière lettre.



Exemple :  $p = 5$  avec les couleurs Rouge, Vert, Bleu, Orange, Jaune.  
 $n = 6$  : RVRBOJ

(II) Si l'on admet que la bouée peut tourner autour de son centre, nous obtenons le problème de la bouée tournante. Deux mots représentant un coloriage de la bouée seront équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par permutation circulaire des lettres.

Exemple : RVRBOJ  $\approx$  RBOJRV.

(III) Si l'on admet que la bouée peut tourner autour de son centre et de l'un de ses diamètres, nous obtenons le problème de la bouée tournante réversible. Deux mots représentant un coloriage de la bouée seront équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre en intervertissant l'ordre des lettres et en les permutant circulairement.

Exemple : RVRBOJ  $\approx$  JOBRVR  $\approx$  BRVRJO.

## I - RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE LA BOUÉE FIXÉE.

Ce problème paraît déjà assez difficile pour des élèves de Terminale. Il a également été proposé en TD à des élèves de Maths Sup. Ceux-ci ont parfois trouvé des solutions élégantes. Plusieurs raisonnements sont possibles. Nous les énoncerons du plus compliqué au plus simple (afin de faire durer le plaisir) :

*Méthode 1* : On suppose donnée la couleur de la première case. Appelons  $X_{n,p}$  le nombre de solutions dans ce cas. Le nombre total de solutions sera alors  $K_{n,p} = pX_{n,p}$ . On a facilement :

$$X_{2,p} = p - 1 \qquad X_{3,p} = (p - 1)(p - 2)$$

Le cas général peut se traiter de la façon suivante :

- ou bien toutes les cases 2 à  $n$  sont de couleur différente de la case 1. Il y a alors  $(p - 1)(p - 2)^{n-2}$  possibilités de coloriage (à savoir  $p - 1$  pour la case 2

et  $p - 2$  pour les cases 3 à  $n$ , dont les couleurs sont différentes de la case 1 et de la case qui précède).

- ou bien l'une des cases 3 à  $n - 1$  est de la même couleur que la case 1. Soit  $k$  le numéro de la première case de même couleur que la case 1. Le coloriage des cases 2 à  $k - 1$  donne  $(p - 1)(p - 2)^{k-3}$  (à savoir,  $p - 1$  possibilités pour la case 2 et  $p - 2$  pour les cases 3 à  $k - 1$ ). Quant au coloriage des cases  $k$  à  $n$ , il est équivalent à celui d'une bouée fixée de  $n - k + 1$  cases, obtenue en découpant les cases  $k$  à  $n$  et en les recollant en une bouée plus petite, la couleur de la case  $k$  étant imposée.

Cela conduit à une formule de récurrence :

$$X_{n,p} = (p - 1)(p - 2)^{n-2} + \sum_{k=3}^{n-1} (p - 1)(p - 2)^{k-3} X_{n-k+1,p}$$

malheureusement peu exploitable. Elle permet cependant d'obtenir  $X_{6,5} = 820$ , ce qui donne  $K_{6,5} = 4\,100$  coloriages possibles pour la bouée de Terracher.

*Méthode 2 :* On reprend les notations précédentes. Le nombre de cases de la même couleur que la case 1 est au plus de  $\text{Ent}(n/2)$ . Pour  $k$  variant de 0 à cette valeur, on cherche le nombre de coloriages ayant  $k$  cases de la même couleur que la case 1, la couleur de cette dernière étant toujours donnée. Si la case 1 est la seule de sa couleur, on a vu qu'il y avait  $(p - 1)(p - 2)^{n-2}$  coloriages possibles.

Dans le cas de  $k$  cases autres que la case 1 et de sa couleur, on procède comme suit :

- On choisit les  $k$  cases, de 3 à  $n - 1$ , qui seront de la même couleur que la case 1. Il s'agit de choisir  $k$  numéros de cases  $n_1, \dots, n_k$  vérifiant  $n_i + 2 \leq n_{i+1}$ . Si l'on pose  $m_i = n_i - i$ , alors les  $m_i$  forment une suite strictement croissante entre 2 et  $n - 1 - k$ . Inversement, une telle suite  $(m_i)$  permet de reconstituer la suite  $(n_i)$ . Or, le nombre de choix de suites  $(m_i)$  est égal au nombre de combinaisons de  $k$  éléments parmi  $n - k - 2$ .
- On choisit la couleur des cases qui suivent immédiatement les  $k$  cases ainsi définies, ainsi que celle qui suit la case 1. Elles sont couleur autre que celle de la case 1. Il y a donc  $(p - 1)^{k+1}$  choix possibles.
- Il reste  $n - 2k - 2$  cases à colorier, d'une couleur autre que celle de la case 1 et de la case qui les précède, soit  $(p - 2)^{n-2k-2}$  choix possibles.

D'où la formule :

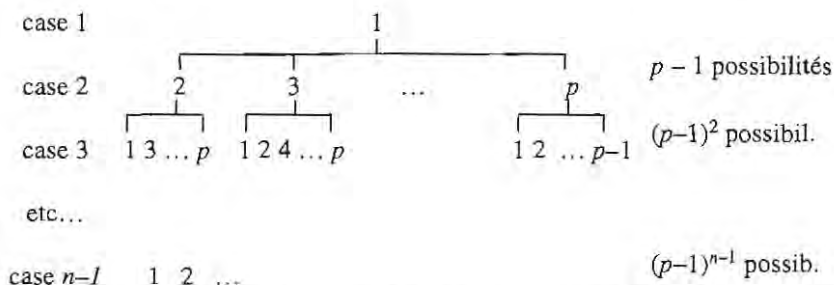
$$X_{n,p} = \sum C_{n-k-2}^k (p - 1)^{k+1} (p - 2)^{n-2k-2}, \quad 0 \leq k < \text{Ent}(n/2)$$

qui donne pour  $n = 6$  et  $p = 5$  :

$$X_{6,5} = 4 \cdot 3^4 + 3 \cdot 4^2 \cdot 3^2 + 4^3 = 820$$

(On pourra remarquer que les sommes des coefficients binômiaux qui interviennent dans l'expression de  $X_n$  sont les termes de la suite de Fibonacci).

*Méthode 3* : Comme précédemment, on suppose donnée la couleur de la case 1. Nous supposons les couleurs numérotées de 1 à  $p$ . On colorie successivement les cases suivantes, les diverses possibilités de coloriage figurant sous forme d'arbre :



En ce qui concerne la case  $n$ , le coloriage se fait de la façon suivante : la couleur se trouvant dans la case  $n - 1$  donne  $p - 1$  possibilités de coloriage de la case  $n$  ; les couleurs différentes de 1 se trouvant dans la case  $n - 1$  donnent  $p - 2$  possibilités de coloriage de la case  $n$ . Si on note  $U_{n-1,p}$  le nombre de fois où la couleur 1 apparaît dans la ligne  $n - 1$ , alors le nombre de non 1 vaut  $(p - 1)^{n-2} - U_{n-1,p}$ , et le nombre de possibilités dans la ligne  $n$  correspondant au coloriage de la case  $n$  est :

$$\begin{aligned}
 X_{n,p} &= U_{n-1,p} \cdot (p - 1) + \left[ (p - 1)^{n-2} - U_{n-1,p} \right] \cdot (p - 2) \\
 &= (p - 1)^{n-2} \cdot (p - 2) + U_{n-1,p}
 \end{aligned}$$

Il reste à déterminer  $U_{n-1,p}$ . Or, les 1 de la ligne  $n - 1$  proviennent des non 1 de la ligne  $n - 2$ . D'où la relation de récurrence :

$$U_{n-1,p} = (p - 1)^{n-3} - U_{n-2,p}$$

En partant de  $U_1 = 1$ ,  $U_2 = 0$ , on obtient par récurrence (laissée au lecteur) :

$$U_{n-1,p} = (-1)^n (p - 1) \frac{1 - (-p + 1)^{n-3}}{p}$$

$$D'où K_{n,p} = pX_{n,p} = p(p - 1)^{n-2}(p - 2) + (-1)^n (p - 1) [1 - (-p + 1)^{n-3}]$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{n,p} = (p-1)^n + (-1)^n(p-1)}$$

formule remarquable par sa simplicité. On retrouve  $K_{6,5} = 4^6 + 4 = 4100$ .

*Méthode 4 :* Considérons une bouée de  $n$  cases. Deux cas se présentent :

- Ou bien la case 1 n'est pas de la même couleur que la  $n-1$ . On peut alors lui associer une bouée de  $n-1$  cases répondant aux conditions du problème en supprimant la case  $n$ . Inversement, une telle bouée de  $n-1$  cases permet de reconstituer  $p-2$  bouées de  $n$  cases, puisqu'il y a  $p-2$  couleurs possibles à attribuer à la case  $n$  que l'on introduit.
- Ou bien la case 1 est de la même couleur que la  $n-1$ . On peut alors lui associer une bouée de  $n-2$  cases répondant aux conditions du problème en supprimant les cases  $n$  et  $n-1$ . Inversement, une telle bouée de  $n-2$  cases permet de reconstituer  $p-1$  bouées de  $n$  cases, en attribuant à la case  $n-1$  que l'on introduit la couleur de la case 1, et à la case  $n$  l'une des  $p-1$  couleurs restantes.

D'où la relation :

$$K_{n,p} = (p-2)K_{n-1,p} + (p-1)K_{n-2,p}$$

La suite  $(K_{n,p})$  vérifie une récurrence linéaire de la forme  $K_{n,p} = aK_{n-1,p} + bK_{n-2,p}$ . L'équation caractéristique associée est :  $x^2 = (p-2)x + (p-1)$  de racines  $(-1)$  et  $p-1$ .  $K_{n,p}$  est donc combinaison linéaire de  $(-1)^n$  et  $(p-1)^n$ . Les valeurs initiales  $K_{2,p} = p(p-1)$  et  $K_{3,p} = p(p-1)(p-2)$  permettent de déterminer que  $K_n = (p-1)^n + (-1)^n(p-1)$ , valeur déjà trouvée.

*Méthode 5 :* On remarque que l'expression trouvée de  $K_n$  est étonnamment proche de  $(p-1)^n$ , qui n'est autre que le nombre de bouées fixées, sans condition de couleurs pour les cases adjacentes, à  $n$  cases et  $p-1$  couleurs. Ce fait peut s'expliquer directement en établissant un rapport entre les deux problèmes. Appelons bouées avec condition les bouées dans lesquelles deux cases adjacentes sont de couleurs différentes, contrairement aux bouées sans condition. Il est possible d'associer à toute bouée avec condition de  $n$  cases et  $p$  couleurs une bouée sans condition de  $n$  cases et  $p-1$  couleurs de la façon suivante : notons  $a_1 a_2 \dots a_n$  la suite des couleurs de la bouée avec condition, les  $a_i$  étant éléments de  $\{1, \dots, p\}$ . Notons  $b_1 b_2 \dots b_n$  la suite des couleurs de la bouée sans condition associée, les  $b_i$  étant éléments de  $\{1, \dots, p-1\}$  et définis de la façon suivante :

$$b_i = a_i \quad \text{si } a_{i-1} > a_i$$

$$b_i = a_i - 1 \quad \text{si } a_{i-1} < a_i$$

(avec la convention  $a_0 = a_n$ ). Par exemple, on associe à la bouée avec condition 1243212 la bouée sans condition 1133211. Cette association n'est pas tout à fait bijective.

- En ce qui concerne une bouée sans condition disposant d'au moins deux couleurs, elle se trouve effectivement associée à une et une seule bouée avec condition. On retrouve les  $a_i$  à partir des  $b_i$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } b_{i-1} < b_i, \text{ alors } a_i = b_i + 1 \\ \text{si } b_{i-1} > b_i, \text{ alors } a_i = b_i \\ \text{si } b_{i-1} = b_i, \text{ alors} \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} a_{i-1} = b_{i-1} + 1 \\ a_i = b_i \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left[ \begin{array}{l} a_{i-1} = b_{i-1} \\ a_i = b_i + 1 \end{array} \right.$$

Dans le dernier cas, on choisit la bonne condition en ayant déjà trouvé si  $a_{i-1}$  est égal à  $b_{i-1}$ . Il suffit de partir de deux valeurs différentes de  $b_{j-2}$  et  $b_{j-1}$  ce qui définit  $a_{j-1}$  (on ne peut amorcer cette récurrence dans le cas d'une bouée sans condition unicolore). On vérifiera que cette méthode donne bien une bouée avec condition, les couleurs variant entre 1 et  $p$ . Par exemple, pour la bouée sans condition 1133211, on a :

$$b_2 = 1 < 3 = b_3 \quad \Rightarrow a_3 = b_3 + 1 = 4$$

$$b_3 = b_4 = 3 \text{ et } a_3 = b_3 + 1 \quad \Rightarrow a_4 = b_4 = 3$$

$$b_4 = 3 > 2 = b_5 \quad \Rightarrow a_5 = b_5 = 2$$

$$b_5 = 2 > 1 = b_6 \quad \Rightarrow a_6 = b_6 = 1$$

$$b_6 = b_7 = 1 \text{ et } a_6 = b_6 \quad \Rightarrow a_7 = b_7 + 1 = 2$$

$$b_7 = b_1 = 1 \text{ et } a_7 = b_7 + 1 \quad \Rightarrow a_1 = b_1 = 1$$

$$b_1 = b_2 = 1 \text{ et } a_1 = b_1 \quad \Rightarrow a_2 = b_2 + 1 = 2$$

d'où la bouée avec condition 1243212.

Dans le cas d'une bouée unicolore sans condition, on voit que si  $n$  est pair, la bouée unicolore  $cccc\dots c$  provient de deux bouées avec condition  $c(c+1)c(c+1)\dots c(c+1)$  ou  $(c+1)c(c+1)\dots c(c+1)c$  ; il faut donc ajouter dans le dénombrement des bouées avec condition  $p-1$  bouées supplémentaires par rapport aux  $(p-1)^n$  bouées sans condition dénombrées. Par contre, si  $n$  est impair, il est impossible d'obtenir une bouée sans condition unicolore, et l'on a donc comptabilisé  $p-1$  bouées en trop, qu'il faut retrancher aux  $(p-1)^n$  bouées sans condition.

En regroupant les deux cas, on obtient bien encore une fois  $K_{n,p} = (p-1)^n + (-1)^n(p-1)$ .

Voici, pour conclure, un tableau de valeurs des  $K_{n,p}$  ( $n$  indice de ligne et  $p$  indice de colonne) :

K	2	3	4	5	6	= p
2	2	6	12	20	30	$K_2 = p(p-1)$
3	0	6	24	60	120	$K_3 = p(p-1)(p-2)$
4	2	18	84	260	630	
5	0	30	240	1020	3120	etc...
6	2	66	732	4100	15630	
7	0	126	2184	16380	78120	
8	2	258	6564	65540	390630	
9	0	510	19680	262140	1953120	
10	2	1026	59052	1048580	9765630	
11	0	2046	177144	4194300	48828120	
12	2	4098	531444	16777220	244140630	
13	0	8190	1594320	67108860	1220703120	

= n	1 + (-1) <sup>n</sup>	2 <sup>n</sup> + (-1) <sup>n</sup> 2	3 <sup>n</sup> + (-1) <sup>n</sup> 3	4 <sup>n</sup> + (-1) <sup>n</sup> 4	5 <sup>n</sup> + (-1) <sup>n</sup> 5
1	2	3	4	5	6
2	0	6	12	20	30
3	2	12	27	64	150
4	0	24	54	160	375
5	2	48	135	400	937
6	0	96	270	1024	2250
7	2	192	540	2560	5625
8	0	384	1080	6400	13500
9	2	768	2160	16000	36450
10	0	1536	4320	40000	81000
11	2	3072	8640	100000	204750
12	0	6144	17280	250000	405000
13	2	12288	34560	625000	810000

On posera dans la suite  $K_{1,p} = 0$ , en conformité avec la formule précédente.

## II - RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE LA BOUÉE TOURNANTE

Ce problème est beaucoup plus difficile. Nous noterons  $L_{n,p}$  le nombre de possibilités de coloriage. Des recherches à la main, puis utilisant un ordinateur donnent les valeurs suivantes :

$L_{n,p}$	2	3	4	5	6	= p
2	1	3	6	10	15	
3	0	2	8	20	40	
4	1	6	24	70	165	
5	0	6	48	204	624	
6	1	14	130	700	2635	
7	0	18	312	2340	11160	
8	1	36	834	8230	48915	
9	0	58	2192	29140	217040	
10	1	108	5934	104968	976887	
11	0	186	16104	381300	4438920	
12	1	352	44368	1398500	20346485	
13	0	630	122640	5162220	93900240	

En particulier  $L_{6,5} = 700$ . La découverte d'une formule générale a comblé de

joie quelques professeurs acharnés.

Considérons le groupe  $G$  des rotations engendré par la rotation  $r$  d'angle  $2\pi/n$ . Ce groupe opère sur les bouées fixées. Si  $r^k$  est une rotation de  $G$  d'angle  $2k\pi/n$  et  $B$  une bouée fixée,  $r^k(B)$  est une autre bouée obtenue à partir de  $B$  en la tournant d'un angle  $2k\pi/n$ . On peut également considérer qu'on applique sur le mot constitué des couleurs de  $B$   $k$  permutations circulaires.  $G$  est par ailleurs isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , et l'on peut raisonner également au moyen de ce groupe.

L'orbite d'une bouée  $B$  est  $\{r^k(B) \mid r^k \in G\}$ . On remarque qu'on peut associer à chaque orbite de bouées fixées une bouée non fixée et inversement. Par exemple, pour  $n = 4$  et  $p = 3$ , les bouées fixées sont (en notant les couleurs 1, 2, 3) :

1212 1213 1232 1312 1313 1323 2121 2123 2131  
2313 2321 2323 3121 3131 3132 3212 3231 3232

qui se répartissent suivant les orbites suivantes :

$\{1212, 2121\}$

$\{1213, 2131, 1312, 3121\}$

$\{1232, 2321, 3212, 2123\}$

$\{1313, 3131\}$

$\{1323, 3231, 2313, 3132\}$

$\{2323, 3232\}$

ce qui définit 6 bouées non fixées :

1212 1213 1232 1313 1323 2323.

Le nombre de bouées non fixées est donc égal au nombre d'orbites. Soit  $O_k$  le nombre d'orbites de  $k$  éléments. Dans l'exemple précédent, il y a 3 orbites à 2 éléments et 3 orbites à 4 éléments. Donc :  $O_2 = 3$   $O_4 = 3$ .

On a alors :

$$L_n = \sum O_k \quad (\text{nombre d'orbites})$$

$$K_n = \sum k \cdot O_k \quad (\text{orbites multipliées par le nombre d'éléments par orbites}).$$

Enfin le cardinal  $k$  d'une orbite divisant l'ordre du groupe qui opère sur un ensemble, la somme précédente se fait sur les  $k$  diviseurs de  $n$ , puisque  $n$  est l'ordre de  $G$ . On connaît les  $K_n$ . Il suffit de déterminer les  $O_k$  pour en déduire  $L_{n,p}$ . On utilise alors une formule dite formule d'inversion de Möbius [1] [3], qui est telle que,  $f$  et  $g$  étant deux fonctions définies sur  $\mathbb{N}^*$ , on ait :

$$f(n) = \sum_{k \mid n} g(k) \Rightarrow g(n) = \sum_{k \mid n} \mu(n/k) \cdot f(k)$$

où  $k \mid n$  signifie que les sommes se font sur les nombres  $k$ , diviseurs de  $n$ , et où  $\mu$  est la fonction de Möbius, définie de la façon suivante :



$$\mu(1) = 1$$

$\mu(n) = (-1)^s$  si  $n = p_1 p_2 \dots p_s$  produit de  $s$  facteurs premiers distincts

$\mu(n) = 0$  sinon, c'est-à-dire si  $n$  possède un facteur carré.

On applique cette formule avec  $f(n) = K_n$  et  $g(k) = k O_k$ . Ainsi :

$$n O_n = \sum_{k|n} \mu(n/k) \cdot K_k$$

ou encore, en changeant les indices :

$$k O_k = \sum_{d|k} \mu(k/d) \cdot K_d$$

$$D'où L_{n,p} = \sum_{k|n} \left[ \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) \cdot K_d \right] = \sum_{d|k|n} \left[ \frac{1}{k} \mu(k/d) \cdot K_d \right]$$

où  $d|k|n$  signifie que l'on fait la somme sur les couples  $(d, k)$  tels que  $d$  divise  $k$  et  $k$  divise  $n$ .

En posant  $k = md$ , on peut transformer la formule précédente et on arrive à :

$$D'où L_{n,p} = \sum_{d|n} \left[ \sum_{m|(n/d)} \frac{\mu(m)}{md} K_d \right] = \sum_{d|n} \left[ \sum_{m|(n/d)} \frac{\mu(m)}{m} \right] \frac{K_d}{d}$$

Enfin, merveille des merveilles, il existe une ultime formule reliant la fonction de Möbius à la fonction indicatrice d'Euler :

$$\Phi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

Cette formule n'est rien d'autre que la formule d'inversion de Möbius appli-

quée à :  $n = \sum_{d|n} \Phi(d)$  relation classique vérifiée par la fameuse  $\Phi$  d'Euler.

Cette formule intervient à point nommé pour pouvoir conclure :

$$L_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(n/d) K_d = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) K_{n/d}$$

Rappelons que  $\Phi(n)$  est égal au nombre d'éléments inversibles dans  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Si

$n$  se décompose en facteurs premiers sous la forme :  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$

alors  $\Phi(n) = p_1^{a_1-1} (p_1 - 1) \dots p_s^{a_s-1} (p_s - 1)$ .

On peut justifier la formule précédente d'une manière plus directe. En codant toujours les couleurs des bouées fixées en listes ou mots de  $n$  lettres,  $kO_k$  peut en effet s'interpréter comme le nombre de mots obtenus par juxtaposition de  $n/k$  mots identiques de  $k$  lettres,  $k$  étant le plus petit entier ayant cette propriété. (Par exemple, le mot RVRVRVRV est comptabilisé dans  $2O_2$ , mais pas dans  $4O_4$ ).

En rappelant que  $L_{n,p} = \sum O_k$  et  $K_{n,p} = \sum k.O_k$  on note que  $O_k$  apparaît une fois dans le membre de gauche  $L_n$  de l'expression encadrée. Quel est son coefficient dans le membre de droite ? Ce coefficient vaut :

$$\frac{1}{n} \sum_{d \mid q \mid n \text{ et } k(n/d)} \Phi(d).k = \frac{1}{n} \sum_{d \mid (n/k)} \Phi(d).k \text{ car } k \text{ divise } n/d \text{ équivaut à } d \text{ divise } n/k \text{ (et } a \text{ fortiori divise } n)$$

et l'on utilise à nouveau la relation

$$n = \sum_{d \mid n} \Phi(d) . \text{ Le coefficient cherché vaut donc : } \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{k} , k = 1 . \text{ Les deux}$$

membres sont donc égaux.

La formule donnant  $L_{n,p}$  peut enfin se trouver à partir de la formule de Burnside [2]; cette formule donne le nombre d'orbites d'un groupe opérant

sur un ensemble. Ce nombre vaut :  $\frac{1}{\text{Card}G} \sum_{g \in G} \text{Card}\{B \mid g(B) = B\}$ .

Il suffit (!!) alors de remarquer que, si  $g$  est d'ordre  $d$ , alors  $\text{Card}\{B \mid g(B) = B\}$  vaut  $K_{n/d}$  et qu'il y a  $\Phi(d)$  tels  $g$ .

Les raisonnements précédents s'appliquent d'ailleurs au calcul du nombre de bouées en général sans imposer de condition de couleurs aux cases adjacentes (et de ce fait précédemment appelées bouées sans condition). Les bouées fixées (ou les mots de  $n$  lettres sur un alphabet de cardinal  $p$ ) sont alors au nombre de  $KG_{n,p} = p^n$ . Le nombre d'orbites ayant  $k$  éléments

$$\text{est : } OG_k = \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} \mu(k/d).p^d = \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} \mu(d).p^{k/d} \text{ formule identifiée ultérieurement}$$

sous le nom de formule de Witt. Signalons que cette expression est par ailleurs égale au nombre de polynômes irréductibles de degré  $k$  à coefficients dans le corps fini à  $p$  éléments (où  $p$  doit alors être une puissance d'un nombre premier) [3]. Par exemple, le nombre de polynômes irréductibles de degré 4 à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  vaut  $OG_4$  avec  $p = 2$ , soit  $OG_4 = 3$ . (II

s'agit des polynômes  $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ,  $X^4 + X^3 + 1$  et  $X^4 + X + 1$ . Quel lecteur perspicace trouvera un rapport entre les bouées tournantes et les polynômes irréductibles sur un corps fini ?

Le nombre de bouées tournantes en général est :  $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(n/d) \cdot p^d = LG_{n,p}$ .

Le raisonnement tenu dans la méthode 5 du I s'applique également ici, sauf que, dans le cas pair, une bouée sans condition unicolore  $ccc \dots cc$  provient d'une unique bouée avec condition  $c(c+1) \dots c(c+1)$  puisque les bouées  $c(c+1) \dots c(c+1)$  et  $(c+1) \dots c(c+1)c$  sont maintenant identiques. On a donc : Si  $n$  est impair,  $L_{n,p} = LG_{n,p-1} - (p-1)$

Si  $n$  est pair,  $L_{n,p} = LG_{n,p-1}$ ,

ce qu'on peut également vérifier directement par le calcul en utilisant les formules trouvées.

### III - RÉOLUTION DU PROBLÈME DE LA BOUÉE TOURNANTE RÉVERSIBLE

Rien ne peut plus nous arrêter sur le chemin de la formule finale. Notons  $M_{n,p}$  le nombre de coloriage possibles. On utilise la formule de Burnside. Nous coderons les bouées par les mots constitués de la suite des lettres de leurs couleurs. Le groupe qui opère sur les bouées ou les mots qui les représentent est engendré par la permutation  $r$  circulaire des lettres et l'inversion  $s$  de l'ordre des lettres. Ce groupe est constitué de  $2n$  éléments, à savoir :

$$r^k \quad 0 \leq k < n$$

$$r^k \circ s \quad 0 \leq k < n.$$

Or, si  $r^k$  est d'ordre  $d$ ,  $\text{Card} \{B \mid r^k(B)\} = K_{n/d}$ , car on peut continuer à appliquer le raisonnement du II. De sorte que la somme, pour  $k$  variant de 0 à  $n-1$  des  $\text{Card} \{B \mid r^k(B)\}$  est toujours  $\sum \Phi(d) K_{n/d}$ .

Cherchons maintenant les  $B$  tels que  $r^k(B) = B$ . Si  $B$  est codé par  $n$  lettres  $a_1 a_2 \dots a_n$ , cela signifie que :

$$a_k \dots a_2 a_1 a_n a_{n-1} \dots a_{k+1} = a_1 a_2 \dots a_n,$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_k = a_1 \\ a_{k-1} = a_2 \\ \dots \\ a_{k-i+1} = a_i \\ \dots \\ a_1 = a_k \end{array} \right\} k \text{ équations}$$

$$\begin{array}{l}
 a_n = a_{k+1} \\
 a_{n-1} = a_{k+2} \\
 \dots \\
 a_{n-i+1} = a_{k+1} \\
 \dots \\
 a_{k+1} = a_n
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} a_n = a_{k+1} \\ a_{n-1} = a_{k+2} \\ \dots \\ a_{n-i+1} = a_{k+1} \\ \dots \\ a_{k+1} = a_n \end{array}} \right\} n-k \text{ équations}$$

Du fait que deux couleurs adjacentes sont différentes, il est nécessaire que  $k$  et  $n-k$  soient tous les deux impairs. Cela impose donc que  $n$  soit pair. Si  $n$  est impair, la somme cherchée se réduit donc à :

$$M_{n,p} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \Phi(d) K_{n/d} = \frac{1}{2} L_{n,p} \text{ pour } n \text{ impair.}$$

Si  $n$  est pair,  $k$  et  $n-k$  impairs, le nombre de manières de choisir les  $a_i$  vaut  $p(p-1)^{n/2}$ . Cette valeur est indépendante de  $k$ , et il existe  $n/2$  valeurs impaires  $k$  entre 1 et  $n$ . On remplace dans la formule de Burnside et l'on obtient :

$$M_{n,p} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \Phi(d) K_{n/d} + \frac{1}{4} p(p-1)^{n/2} = \frac{1}{2} L_{n,p} + \frac{1}{4} p(p-1)^{n/2}$$

pour  $n$  pair.

Voici un tableau de valeurs :

M	2	3	4	5	6	= p
2	1	3	6	10	15	
3	0	1	4	10	20	
4	1	6	21	55	120	
5	0	3	24	102	312	
6	1	13	92	430	1505	
7	0	18	312	2340	11160	
8	1	36	834	8230	48915	
9	0	58	2192	2140	217040	
10	1	108	5934	104968	976887	
11	0	186	16104	381300	4438920	
12	1	352	44368	1398500	20346485	
13	0	630	122640	5162220	93900240	
= n						

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que, si l'on n'impose aucune condition de couleur à deux cases adjacentes, le nombre de bouées tournantes et réversibles vaut :

$$MG_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) p^{n/d} + \frac{1}{4} p^{n/2} (p+1) \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

et

$$MG_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) p^{n/d} + \frac{1}{2} p^{(n+1)/2} \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

On montrera par le calcul ou par des raisonnements combinatoires que :  
si  $n$  est impair

$$MG_{n,p-1} = \frac{(p-1)^{(n+1)/2} + p - 1}{2}$$

et si  $n$  est pair  $M_{n,p} = MG_{n,p-1}$ .

Ainsi, le problème initial de Terracher est équivalent à trouver le nombre de bouées sans condition de 6 cases et 4 couleurs.

### QUELQUES PROLONGEMENTS POSSIBLES

(indiqués par R. FERRÉOL)

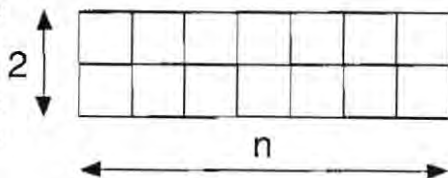
#### 1 - Le problème du drapeau

("Petit Archimède" 64-65, page 42, Rallye d'Alsace 1979)

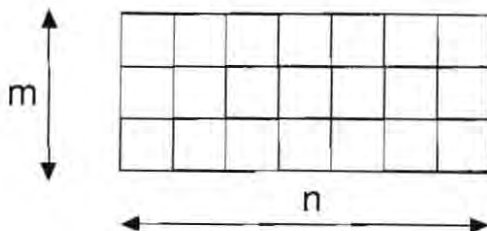
Avec  $p$  couleurs, il existe :

$$p(p-1)(p^2 - 3p + 3)^{n-1}$$

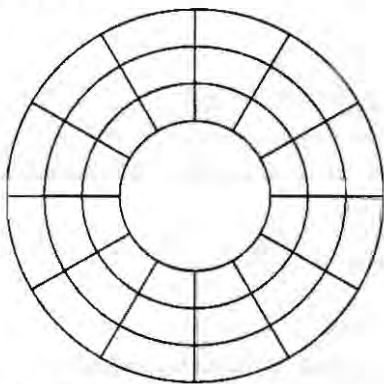
coloriages possibles.



#### 2 - Le problème du rectangle, en quelque sorte une généralisation de celui du drapeau.



3 - *Le problème de la bouée à plusieurs rangées de couleurs*, qu'on peut d'ailleurs voir comme un cylindre.



4 - *Le coloriage d'un ruban de Möbius*

5 - *Le coloriage d'une bouteille de Klein.*

**Une suite à cette étude nous est donnée par G. LAVAU lui-même, en référence au travail d'un élève de son lycée.**

Mon article demandait par ailleurs de trouver un rapport entre les bouées et les polynômes irréductibles dans les corps finis. Depuis la rédaction de l'article, Sylvain POIRIER, à l'époque élève de Maths Sup. au lycée Corneille, par ailleurs vainqueur national du Kangourou en catégorie Prépa en 93, a établi ce rapport. Il semblerait également qu'il y ait eu des travaux à ce sujet au Canada vers 1990, mais je ne possède pas de références. On pourra juger de la contribution éronnante de Sylvain Poirier, d'autant plus qu'il ne possédait aucun des livres cités en référence !

Considérons les mots de  $n$  lettres sur un alphabet de  $p$  éléments. Deux mots seront dits équivalents si et seulement s'ils se déduisent l'un de l'autre par permutation circulaire de leurs lettres. Une classe d'équivalence de tels mots peut s'interpréter concrètement comme une bouée tournante de  $n$  cases et de  $p$  couleurs. Une telle bouée est dite irréductible si aucun des mots qui la représente ne peut s'écrire par la juxtaposition de sous-mots identiques. Par exemple, sur l'alphabet  $\{0,1\}$ , la bouée 00111 est irréductible, alors que la bouée 010010 ne l'est pas. Il se trouve que, pour tout  $p$  puissance d'un nombre premier et tout  $n$  entier, le nombre de bouées irréductibles de  $n$  cases et  $p$  couleurs est égal au nombre de polynômes irréductibles de degré  $n$  sur le corps fini à  $p$  éléments. Par exemple :

	Polynômes irréductibles de degré $n$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (valeur des coefficients par degré décroissant)	Bouées tournante irréductibles à deux couleurs $\{0,1\}$ et $n$ cases Il est possible de permuter circulairement les mots donnés
$n = 1$	11	0
	10	1
$n = 2$	111	01
$n = 3$	1011	001
	1101	011
$n = 4$	10011	0001
	11001	0011
	11111	0111
etc ...		

Voici ce que propose Sylvain POIRIER :

#### **PROPRIETES DES CORPS FINIS**

Soit  $K$  le corps à  $p$  éléments, où  $p$  est puissance d'un nombre premier. Soit  $L$  le corps à  $p^n$  éléments. Alors  $L$  est un espace vectoriel sur  $K$  de dimension  $n$ . Soit  $G$  le groupe de Galois des automorphismes de corps de  $L$  laissant invariants les éléments de  $K$ .  $G$  est un groupe cyclique de  $n$  éléments engendrés par l'automorphisme :

$$\sigma: \quad L \rightarrow L \\ x \mapsto x^p$$

Les polynômes irréductibles  $P$  de  $K_n[X]$  se factorisent sous la forme :

$$P = (X - a)(X - \sigma(a)) \dots (X - \sigma^{n-1}(a)), \quad a \in L.$$

Les racines sont distinctes.

Il existe enfin une base  $B$  de  $L$  comme  $K$ -espace vectoriel de la forme  $(b, \sigma(b), \dots, \sigma^{n-1}(b))$ , avec donc  $\sigma^n(b) = b$ .

#### **PROPOSITION SYLVAIN POIRIER**

A tout polynôme irréductible de degré  $n$ , on associe ses racines  $a, \sigma(a), \dots, \sigma^{n-1}(a)$ . On peut voir assez facilement que, grâce à la forme choisie pour la base  $B$ , les composantes de ces racines sur la dite base se déduisent les unes des autres par permutation circulaire. Elles constituent les  $n$  écritures possibles d'une même bouée, qui est irréductible puisque les  $n$  racines sont distinctes.

**EXEMPLES**

Soit  $K = \mathbf{F}_2$  le corps à deux éléments, et  $L = \mathbf{F}_8$  le corps à 8 éléments. Alors

$L = K(b)$  avec  $b$  vérifiant  $b^3 + b^2 + 1 = 0$ . Les éléments de  $L$  sont :

$$\begin{array}{ll} 0 & b^3 = 1 + b^2 \\ 1 & b^4 = 1 + b + b^2 \\ b & b^5 = 1 + b \\ b^2 & b^6 = b + b^2 \end{array}$$

(puis  $b^7 = 1$ )

$(1, b, b^2)$  est une base de  $L$  comme  $K$ -espace vectoriel. Mais  $B = (b, b^2, b^4)$  est aussi une base :

$$\begin{array}{ll} 0 & b^3 = b + b^4 \\ 1 = b + b^2 + b^4 & b^4 \\ b & b^5 = b^2 + b^4 \\ b^2 & b^6 = b + b^2 \end{array}$$

On a  $b, b^2$ , et  $b^4$  de composantes respectives  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ , et  $(0,0,1)$  sur la base  $B$ . Ce sont les racines de  $X^3 + X^2 + 1$ , qui correspond ainsi à la bouée 001. Par ailleurs,  $b^3, b^6, b^{12} = b^5$  ont pour composantes dans la base  $B$   $(1,0,1)$ ,  $(1,1,0)$  et  $(0,1,1)$  et sont les racines du polynôme  $X^3 + X + 1$  correspondant donc à la bouée 011. L'association entre polynôme irréductible et bouée est donc la suivante :

$$\begin{array}{ll} 1101 & 001 \\ 1011 & 011 \end{array}$$

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Encyclopedia Universalis - Divisibilité
- [2] Arnaudès/Fraysse - *Algèbre* (Dunod) p.188
- [3] Lang - *Algebra* (Addison-Wesley) p. 190.
- [4] Mignotte - *Mathématiques pour le calcul formel* (PUF)