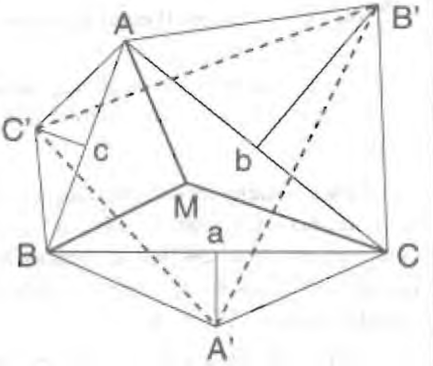
Vous avez acheté la brochure *«LES 200 PREMIERS PROBLÈMES DE L'A.P.M.E.P.» (Volume II)*, et vous avez sans doute remarqué que la solution au problème n°120 qui vous est proposé page 73 est incomplète.
Voici donc ce problème et sa solution dans son intégralité.

ÉNONCÉ n° 120 (Jean BERRARD, Paris)
On donne un triangle ABC de centre de gravité G. Comment faut-il placer le point M dans le plan pour que les médiatrices de [MA], [MB], [MC] forment un triangle admettant aussi G comme centre de gravité ?

SOLUTION de Jean ONIMUS (Auxerre)



Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, a, b, c les milieux des segments [BC], [CA], [AB], et A', B', C' les points de rencontre des médiatrices de [MA], [MB], [MC].

A' est le centre du cercle circonscrit au triangle MBC, donc est sur la médiatrice Oa de [BC]. De même, B' est sur Ob et C' sur Oc. G étant le centre de gravité de ABC (ou de abc) et G' étant le centre de gravité de A'B'C', on a la relation :

$\overrightarrow{aA'} + \overrightarrow{bB'} + \overrightarrow{cC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Donc ABC et A'B'C' ont même centre de gravité si et seulement si :

$\overrightarrow{aA'} + \overrightarrow{bB'} + \overrightarrow{cC'} = \vec{O}$.

S'il en est ainsi, on peut construire un triangle PQR avec :

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{aA'},\ \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{bB'},\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{cC'}\ .$$

Ce triangle a ses côtés perpendiculaires à ceux du triangle ABC, donc lui est directement semblable. Une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ rend les côtés de PQR parallèles à ceux de ABC, d'où :

$\dfrac{aA'}{BG} = \dfrac{bB'}{CA} = \dfrac{cC'}{AB}$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{aA'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{bB'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{cC'}) = \pm \dfrac{\pi}{2}$ (mod. 2π).

Les trois triangles isocèles BA'C, CB'A, AC'B sont directement semblables et :

$$(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = (\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'A}) = (\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}) \pmod{2\pi}$$

or :

$$(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = 2(MB, MC), \ (\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'A}) = 2(MC, MA),$$

$$(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}) = 2(MA, MB)$$

d'où $(MB, MC) = (MC, MA) = (MA, MB) \pmod{\pi}$.

La somme de ces trois angles valant 0 (mod π), leur valeur commune est $+\dfrac{\pi}{3}$ ou $-\dfrac{\pi}{3}$, la valeur 0 étant éliminée puisque A, B, C ne sont pas alignés.

Dans le cas général, on obtient deux points M' et M" solutions, ce sont les points d'où l'on voit les trois côtés de ABC sous un même angle de droite.

On les obtient en construisant les centres A', B', C' des trois triangles équilatéraux extérieurs à ABC et de côtés BC, CA, AB. Le point M' est commun aux trois cercles, de centre A', passant par B et C, de centre B', passant par C et A, de centre C' passant par A et B. De même, pour M" avec les centres A", B", C".

On reconnaît la configuration des deux triangles de Napoléon A'B'C' et A"B"C", qui sont équilatéraux et de même centre G ; ainsi que le point de Fermat (ou de Torricelli) M'.

Dans le cas particulier où ABC est équilatéral, il n'y a plus que deux solutions : M' est quelconque sur le cercle circonscrit à ABC et M" est en O.