Courrier des lecteurs

MUTIFICATION ET PÉDAGOGIE

Jean LEFORT
Colmar

Notre collègue Pascal Dupont attire à juste titre notre attention sur les problèmes soulevés par l'existence des variables muettes. Je ne suis pas sûr que tous nos collègues aient suffisamment médité sur les risques pédagogiques soulevés par chacune des notations traditionnelles en mathématiques et je ne puis que remercier le *Bulletin* de l'apport d'une telle réflexion. Je voudrais toutefois compléter et moduler cette dernière dans différentes directions.

1°) Il me paraît impossible de supprimer partout les variables muettes. Par exemple, notre collègue signale que dans $\sum_{i=1}^{n} i^2$, i est muet et n libre puisqu'on peut remplacer cette expression par une autre où la variable muette n'apparaît pas et d'écrire $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ mais voilà brusquement n mutifié puisque cette expression peut être remplacée par la valeur de vérité VRAI. Sauf à réduire la plupart des traités mathématiques à l'insignifiance, je maintiens qu'il faut garder la variable muette n dans l'égalité précédente et sans doute aussi i comme le fait remarquer P.Dupont pour des raisons historiques. Le problème est exactement le même avec les identités remarquables telles que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: a et b y sont muets. Je crois que les logiciens utilisent à ce propos l'expression *«parlante pour ne rien dire»*, expression qui risquerait de donner de mauvaises idées à nos élèves de quatrième si elle venait à leurs oreilles!

Tout cela tend à prouver qu'il faudrait distinguer au moins deux signes "=" comme on le fait dans certains langages de programmation, mais ceci m'entraînerait trop loin et je ne veux pas me lancer dans un cours de logique.

2°) S'amuser à remplacer une variable muette telle que x par #, (.) ou tout autre symbole me semble relever de la méthode Coué. En quoi ai-je gagné au niveau de la représentation? Le très vaste alphabet utilisé par les mathématiciens vient simplement de s'enrichir d'un nouvel élément, sauf à décider que parmi les éléments de cet alphabet, un certain nombre sont réservés aux variables muettes, mais on touche là à la syntaxe. Et n'est-ce pas un peu ce que l'on fait déjà en gardant *x*, *y*, *i* sauf mention du contraire? On s'inspirera, à ce propos encore une fois, de certains langages de programmation où *I*, *J*,... sont obligatoirement des entiers sauf déclaration contraire. D'ailleurs, les propositions de notre collègue P.Dupont reprises d'autres mathématiciens vont tout à fait dans ce sens puisque parler de la fonction $\underline{x}^2 + 2$ c'est préciser que x est muet, mais comment noter $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$? Gageons qu'on trouvera bien une méthode mais qu'elle n'apportera aucune clarté dans notre enseignement quotidien, bien au contraire! Il faudrait aussi parler du rôle des quantificateurs mais, là aussi, cela nous entraînerait dans tout un cours de logique.

3°) Pour reprendre l'exemple très classique des intégrales, je voudrais défendre la notation traditionnelle sachant par ailleurs qu'il faut rester conscients, comme dit P. Dupont, des problèmes sous-jacents. Je commence toujours mon enseignement par la notation $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b}$, notation que je simplifie progressivement au bout du deuxième ou troisième chapitre en $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$ et il m'arrive souvent de revenir à la première notation dès que le besoin s'en fait sentir (par exemple pour les techniques de changement de variable). Jamais je ne supprime de dx avec le x correspondant bien que j'en parle aux élèves qui risquent de le rencontrer (1), car il y a une interprétation physique du dx qu'il me semble bon de maintenir pour pouvoir parler d'homogénéité d'une formule en liaison avec les collègues de sciences expérimentales.

Pour conclure, je voudrais dire que la rigueur absolue est une dictature mortelle pour notre enseignement, mais que le laxisme ne permet pas de développer le sens critique. Entre les deux, le pédagogue doit savoir naviguer et

---

(1) Au concours d'entrée à l'Ecole des Mines de Nantes en 1992, les candidats devaient répondre à la question :

"En déduire que $\int_0^1 f P_n = (-1)^n \int_0^1 t^n (1-t)^n . D^n f(t)\,dt$ pour $f \in \mathcal{C}^n$ (***I***,***R***)". Il y a de quoi y perdre son latin !

s'adapter tout en mettant les élèves en garde contre les pièges de notations qui ne sont qu'une représentation de la réalité mathématique. Je voudrais rappeler que l'écriture a été inventée comme support de la mémoire et de la pensée avant de devenir une discipline autonome. Que quand on s'exerce dans une activité de recherche on ne s'embarrasse pas de rigueur de notation, rigueur qui doit réapparaître au moment de la rédaction (2) . Tout ceci doit être modulé en fonction de l'âge et du niveau des élèves auxquels nous nous adressons. Merci à P. Dupont d'avoir commencé à soulever ce problème et j'espère que d'autres prendront la plume pour compléter et préciser ce débat à l'aide de faits vécus dans leur pratique d'enseignants.

R. RAYNAUD
Digne

Retour au *Bulletin* n°391 (à tout hasard, car ma remarque a probablement été déjà formulée).

Page 626, J. Couvert, après avoir programmé le tracé des lignes de niveau de la fonction

$$M \mapsto MA + MB + MC,$$

semble d'étonner, à l'avant-dernière ligne, que les ovales obtenus ne convergent pas vers le point de Fermat du triangle ABC.

Cela résulte de ce que les ovales sont tracés sur un écran dont le repère n'est pas normé alors que le point de Fermat est construit à l'intersection de vrais arcs de cercle.

Si l'on opère en VGA 640 × 480, où les pixels sont carrés, l'apparente anomalie disparaît.

Dans le *Bulletin* n°392, p.68.

Le groupe "Collège" de l'IREM de Toulouse propose aux élèves, pour la résolution d'un problème du type **«Sachant que H (hypothèse), démontrer que C (conclusion)»**, une **«démarche ascendante»**, c'est-à-dire **«partant de la conclusion»**.

C'est ce qu'on appelait naguère une **«régression analytique»**, aidant parfois à la recherche de la solution. Solution qu'il était de bon ton de **présen-**

(2) Qui n'a jamais traîné dans un brouillon une succession de radicaux sans rien dessous pour gagner du temps et ne pas avoir à répéter systématiquement la même expression parfois fort compliquée ?

ter ensuite par une **«progression synthétique»**, partant elle «légalement», de l'hypothèse.

Il y a dans les *Bulletins* n° 339 et 378 deux excellents articles sur le sujet d'André Antibi : *«Mathématiques et prestidigitation»*, *«Partir de la conclusion»*.

Il y montre l'intérêt de la recherche par «régression», souvent naturelle, non traumatique et formatrice, alors que la recherche par «progression», parfois parachutée et parée d'élégantes astuces est reçue par la plupart des élèves comme hors de portée et décourageante.

Et bien que ce ne soit pas dans les habitudes, une présentation de la solution s'inspirant des étapes de la «régression» peut être bien plus compréhensible et digeste que son brutal exposé par «progression». On peut aussi panacher : un bout du chemin dans un sens et le restant dans l'autre.

Convaincu des vertus de la "régression", j'applaudis donc à celle qui est suggérée par le groupe collège de l'IREM de Toulouse dans l'encadré de la page 68.

Mais je rejette la présentation qui en est faite :

Avec les notations d'André Antibi, la solution du problème «Sachant que H, démontrer C», se traduit par une chaîne d'implications

$$\mathbf{H \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots P_n \Rightarrow C.}$$

«Partir de C» signifie que l'on va effectue, successivement, chacune des démonstrations suivantes :

Pour que C, il suffit que P_n, $(P_n \Rightarrow C)$

Pour que P_n, il suffit que P_{n-1}, $(P_{n-1} \Rightarrow P_n)$

....

Pour que P, il suffit que H, $(H \Rightarrow P)$

Or, H est vraie, donc C est vraie.

«Partir de C» ne signifie nullement que l'on va, d'abord établir la chaîne

$$\mathbf{C \Rightarrow P_n \Rightarrow \dots P_2 \Rightarrow P_1 \Rightarrow H,}$$

qui déduit l'hypothèse de la conclusion.

Or, c'est très exactement ce que l'on voit dans l'encadré de la page 68.

Le bon roi Dagobert, appelé pour rétablir l'ordre, arrive après la bataille.

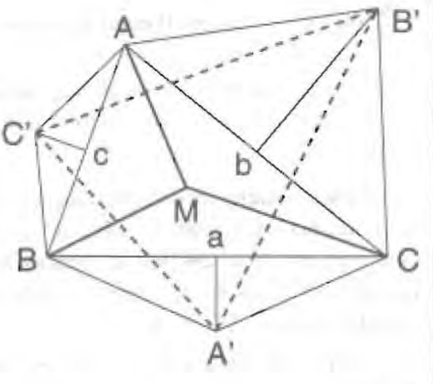
Le désastre logique est consommé.

Vous avez acheté la brochure *«LES 200 PREMIERS PROBLÈMES DE L'A.P.M.E.P.» (Volume II)*, et vous avez sans doute remarqué que la solution au problème n°120 qui vous est proposé page 73 est incomplète.
Voici donc ce problème et sa solution dans son intégralité.

ÉNONCÉ n° 120 (Jean BERRARD, Paris)
On donne un triangle ABC de centre de gravité G. Comment faut-il placer le point M dans le plan pour que les médiatrices de [MA], [MB], [MC] forment un triangle admettant aussi G comme centre de gravité ?

SOLUTION de Jean ONIMUS (Auxerre)

Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, a, b, c les milieux des segments [BC], [CA], [AB], et A', B', C' les points de rencontre des médiatrices de [MA], [MB], [MC].



A' est le centre du cercle circonscrit au triangle MBC, donc est sur la médiatrice Oa de [BC]. De même, B' est sur Ob et C' sur Oc. G étant le centre de gravité de ABC (ou de abc) et G' étant le centre de gravité de A'B'C', on a la relation :

$\overrightarrow{aA'} + \overrightarrow{bB'} + \overrightarrow{cC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Donc ABC et A'B'C' ont même centre de gravité si et seulement si :

$\overrightarrow{aA'} + \overrightarrow{bB'} + \overrightarrow{cC'} = \overrightarrow{O}$.

S'il en est ainsi, on peut construire un triangle PQR avec :

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{aA'},\ \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{bB'},\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{cC'}.$$

Ce triangle a ses côtés perpendiculaires à ceux du triangle ABC, donc lui est directement semblable. Une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ rend les côtés de PQR parallèles à ceux de ABC, d'où :

$\dfrac{aA'}{BG} = \dfrac{bB'}{CA} = \dfrac{cC'}{AB}$ et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{aA'}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{bB'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{cC'}\right) = \pm \dfrac{\pi}{2}$ (mod. 2π).

Les trois triangles isocèles BA'C, CB'A, AC'B sont directement semblables et :

$$\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right) = \left(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'A}\right) = \left(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}\right) \pmod{2\pi}$$

or :

$$\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right) = 2(MB, MC), \left(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'A}\right) = 2(MC, MA),$$

$$\left(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}\right) = 2(MA, MB)$$

d'où $\quad (MB, MC) = (MC, MA) = (MA, MB) \pmod{\pi}$.

La somme de ces trois angles valant 0 (mod π), leur valeur commune est $+\dfrac{\pi}{3}$ ou $-\dfrac{\pi}{3}$, la valeur 0 étant éliminée puisque A, B, C ne sont pas alignés.

Dans le cas général, on obtient deux points M' et M" solutions, ce sont les points d'où l'on voit les trois côtés de ABC sous un même angle de droite.

On les obtient en construisant les centres A', B', C' des trois triangles équilatéraux extérieurs à ABC et de côtés BC, CA, AB. Le point M' est commun aux trois cercles, de centre A', passant par B et C, de centre B', passant par C et A, de centre C' passant par A et B. De même, pour M" avec les centres A", B", C".

On reconnaît la configuration des deux triangles de Napoléon A'B'C' et A"B"C", qui sont équilatéraux et de même centre G ; ainsi que le point de Fermat (ou de Torricelli) M'.

Dans le cas particulier où ABC est équilatéral, il n'y a plus que deux solutions : M' est quelconque sur le cercle circonscrit à ABC et M" est en O.