Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"...si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°231 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles).
Pour quels entiers p l'équation d'inconnue n :

$\sum_{k=1}^{n} \left[k^{1/3}\right] = pn$ admet-elle des solutions entières ? $[x]$ désignant la partie entière de x.

ÉNONCÉ N° 232 (Gérard LAVAU, Rouen).
Donner un exemple de fonction strictement croissante dérivable dont la dérivée s'annule en un nombre non dénombrable de points.

ÉNONCÉ N°233 (Eugène EHRHART, Strasbourg)
1) Le cercle inscrit au triangle ABC touche les côtés a, b, c en A', B', C'. Soient $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ les hauteurs du triangle $A'B'C'$. Montrer que le triangle $A''B''C''$ est homothétique de ABC.

2) Soient AA', BB', CC' les hauteurs de ABC. Le cercle inscrit à $A'B'C'$ touche ses côtés aux points A'', B'', C''. Montrer que le triangle $A''B''C''$ est homothétique de ABC.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°216 (Henri DELEKTA, Château-Thierry)

Peut-on construire un solide dont les projections orthogonales, sur trois plans deux à deux orthogonaux, soient respectivement un cercle, un carré et un triangle équilatéral ?

RÉPONSE : NON !

DÉMONSTRATION de Michel TANGUY (Quimper).

Plaçons notre repère de sorte que la vue de dessus soit un cercle, la vue de droite un carré et la vue de face un triangle (cf. Figure 1).

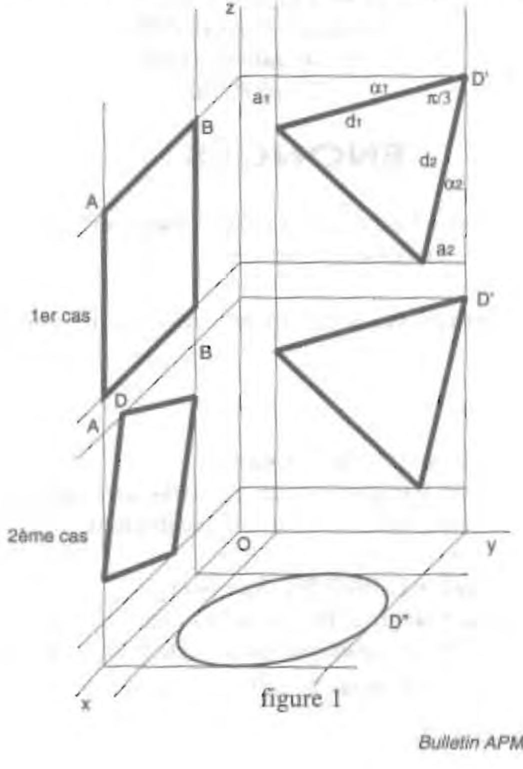

figure 1

Quelle que soit l'orientation du carré (vue de droite) , qui se ramène à deux cas possibles, le triangle est inscrit dans un carré dont il touche les quatre côtés. Ce qui entraîne qu'un sommet au moins du triangle (appelons-le D') est sommet du carré ; mais comme le triangle est équilatéral par hypothèse, $d_1 = d_2$ d'où $a_1 = a_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/12$: il n'y a donc, à symétrie près, qu'un seul triangle équilatéral qui convienne.

Ceci exclut le premier cas de carré car tous les points se projetant sur AB devraient se projeter sur D', ce qui est incompatible avec la projection circulaire. On peut même affirmer que, dans le deuxième cas, c'est le même point qui se projette sur D, D' et D'', et donc que D est le milieu de AB.

Dès lors, plaçons le centre du repère au centre du cube dans lequel est inscrit notre solide. Le ou les points qui se projettent en N'' $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, voisin de D'', se projettent, vus de face, en des points du segment $P'Q'$, et vus de droite, en des points du segment PQ. Pour que ces projections soient compatibles, il faut que le segment PQ coupe la bande hachurée (figure 2), donc que $1 - \cos\theta \geq u = 1 - (1 - \sin\theta)\tan 5\pi/12$, ce qui n'est vérifié que pour $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) \leq \tan\dfrac{5\pi}{12}$ donc pour $\theta \leq \dfrac{\pi}{3}$. D'où l'impossibilité annoncée.

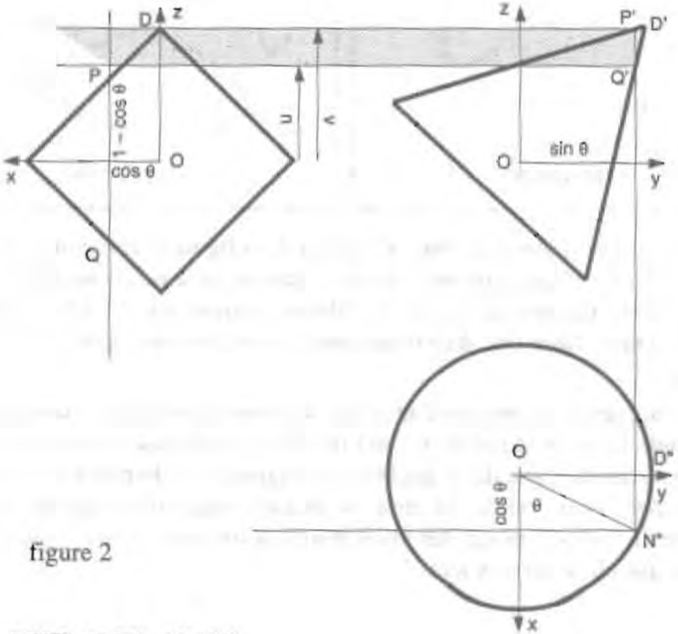

figure 2

REMARQUES

Les cinq autres solutions reçues sont incomplètes ou fausses. A. VIRICEL (Nancy) m'écrit : *«Je ne crois pas le problème possible, bien que le fait que le problème soit posé suggère autre chose».*

Plusieurs s'en sont tenus au solide, classique, de la figure 3, qui se projette suivant un cercle, un carré et un triangle non équilatéral, et dont Gérard BONNEVAL (Auxerre) m'envoie une sculpture sur liège. Ils n'ont pas cherché s'il pouvait exister des solutions plus extravagantes comme, par exemple, la figure 4 (avis aux sculpteurs sur liège !), qui serait solution sans le problème de la face grisée : c'est celle-ci qui ne peut se projeter simultanément selon une pointe de carré, un côté de triangle et un arc de cercle.

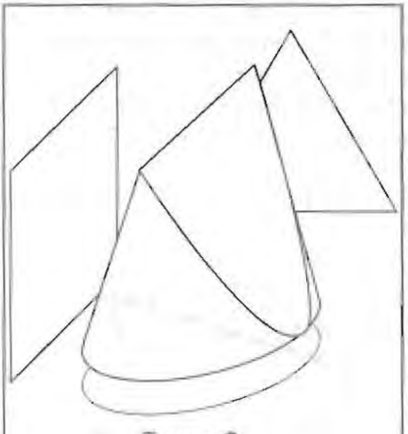

figure 3

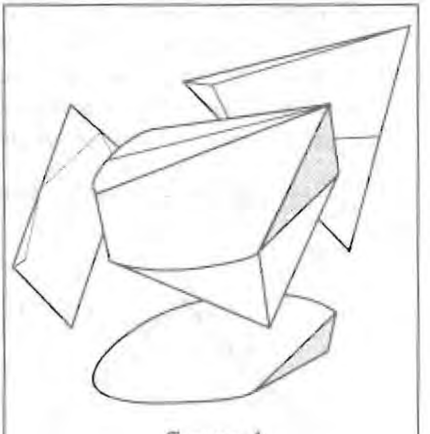

figure 4

Plusieurs proposent, au lieu ou en plus de la figure 3, le conoïde engendré par des droites s'appuyant sur l'arête supérieure et la base circulaire, évitant ainsi l'arête parabolique et le problème soulevé par Charles NOTARI (Noé) : faut-il faire une différence entre projection orthogonale et contour apparent ?

Enfin, signalons une autre manière de poser le problème, dans le cas où le triangle n'est pas équilatéral : existe-t-il un solide passant exactement par les trois trous de l'une des planches de la figure 5 ? L'hypothèse nous impose la dimension du cercle, du carré, du triangle, mais elle n'impose plus qu'il s'agisse de projections sur des plans deux à deux orthogonaux. Cela change-t-il quelque chose au problème ?

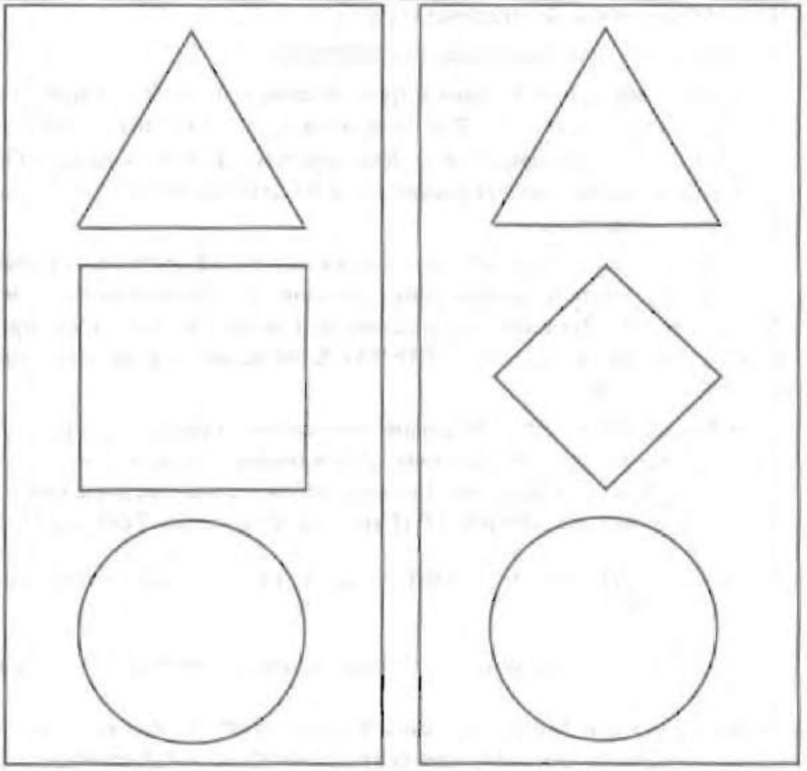

figure 5

ÉNONCÉ n°217

Soient deux entiers b et c tels que $c \geq b \geq 2$. Pour tout réel x de l'intervalle $[0,1[$, on note : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{b^n}$ le développement de x dans la base b, avec $u_n \in \{0, 1, \dots b-1\}$, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ n'étant pas stationnaire à $b-1$. On définit une fonction f en posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{c^n}$ que l'on peut prolonger par $f(1) = 1$.

Calculer $I = \int_0^1 f(t)\, dt$.

SOLUTION (synthèse des réponses reçues).

Assurons-nous tout d'abord que f est intégrable.

La plupart des réponses reçues s'appuient pour cela sur le fait que f est croissante : effectivement, si $c \geq b$, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est en même temps le développement de x en base b et le développement de $f(x)$ en base c. Or, comparer deux nombres revient à comparer leurs développements par la relation d'«ordre alphabétique».

Signalons toutefois que, bien que ce soit exclu par l'hypothèse, si c était inférieur à b, la fonction ne serait plus croissante. Or, elle demeurerait intégrable au sens de Riemann, et le calcul de l'intégrale serait inchangé. Comme le remarque Jacques DAUTREVAUX (St André), il n'est même pas utile que c soit entier.

Jean-Michel INNOCENT (Marseille) constate que f est continue presque partout (sauf sur un ensemble dénombrable) et bornée, ce qui prouve qu'elle est intégrable au sens de Riemann. La continuité de f a également été étudiée en détails par Maurice PERROT (Paris) et Marguerite PONCHAUX (Lille) : $f\left(x + \frac{1}{b^n}\right) = f(x) + \frac{1}{c^n}$ sauf si $u_n = (b - 1)$, de même que $f\left(x - \frac{1}{b^n}\right) = f(x) - \frac{1}{c^n}$ sauf si $u_n = 0$. Comme la suite u_n ne peut pas être stationnaire à $b - 1$, par hypothèse, f est continue à droite en tout point, et est continue à gauche en tout point, sauf ceux où la suite u_n est stationnaire à 0, c'est-à-dire l'ensemble des $\frac{q}{b^k}$ avec q et k entiers (à peu de chose près l'ensemble de Cantor), ensemble dénombrable bien que dense dans $[0\ ,\ 1]$. À propos de continuité, Jacques DAUTREVAUX s'interroge sur la valeur "logique" de $f(1)$. Il est clair que la fonction tend vers $\frac{b-1}{c-1}$ lorsque $x \to 1$ à gauche. Mais l'étude des discontinuités montre que 1 doit "logiquement" en faire partie. Si on remarque que, pour $k < b$, $f\left(\frac{k}{b}\right) = \frac{k}{c}$, on peut trouver logique de poser $f(1) = \frac{b}{c}$. Mais il est peut-être plus logique encore, en s'appuyant sur le fait que $f\left(\frac{1}{b^k}\right) = \frac{1}{c^k}$, de poser, pour $k = 0$, $f(1) = 1$.

Beaucoup s'appuient également sur le fait que f est limite uniforme des fonctions en escalier : $f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{u_n(x)}{c^n}$. C'est d'ailleurs à cette idée que se rattachent plus ou moins directement la plupart des solutions reçues : Jacques AMON (Limoges), Jacques DAUTREVAUX (St André), Dominique DAVION (Chambéry), Jean GOUNON (Paris), Jean-François GUIFFES (Tours), Jean-Michel INNOCENT (Marseille), René MANZONI (Le Havre), Eric OSWALD (Bonneville), Maurice PERROT (Paris), Bernard PETIT (Brest), Marguerite PONCHAUX (Lille) et Geneviève SAMBARD (St Quentin). L'idée est, par exemple, de diviser [0 , 1[en b^k intervalles et de remarquer que chacune des fonctions $u_n(x)$ u_n étant le coefficient de $1/b^n$ dans le développement de x) lorsque $n \leq k$, vaut 0 sur b^{k-1} intervalles, 1 sur b^{k-1} autres intervalles, ... $(b-1)$ sur b^{k-1} intervalles, si bien que pour tout n, $\int_0^1 u_n(x)\,dx = \frac{b-1}{2}$.

Dès lors, du fait de la convergence uniforme,

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{u_n(x)}{c^n}\,dx = \frac{b-1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c^n} = \frac{b-1}{2(c-1)}.$$

Mais deux autres idées méritent d'être signalées. Tout d'abord celle de Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Robert FERRÉOL (Paris), Jérôme GERMONI et Franck TAÏEB (Paris). Celle-ci consiste à remarquer que sur chacun des intervalles $\left[\frac{k}{b}, \frac{k+1}{b}\right[$, la fonction se comporte comme sur tout intervalle [0 , 1[, plus précisément, si $x \in \left[\frac{k}{b}, \frac{k+1}{b}\right[$,

$$f(x) = \frac{k}{c} + \frac{1}{c} f(bx - k)$$

ou encore, en posant $t = bx - k$, $f(x) = \frac{bx - t}{c} + \frac{1}{c} f(t)$.

Donc $\int_{k/b}^{(k+1)/b} (cf(x) - bx)\,dx = \frac{1}{b} \int_0^1 (f(t) - t)\,dt$ (car $dx = \frac{1}{b}\,dt$), soit, en sommant sur k : $\int_0^1 (cf(x) - bx)\,dx = \int_0^1 (f(t) - t)\,dt$, ce qui donne immédiatement : $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{b-1}{2(c-1)}$.

La dernière idée a été utilisée par M.VIDIANI (Dijon). Elle consiste à remarquer qu'en dehors des points de discontinuité de f (ensemble dénombrable, donc sans conséquence sur l'intégrale), si

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{b^n}\,,\ 1 - x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b-1-u_n}{b^n}$$

et donc $\qquad f(x) + f(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b-1}{c^n} = \frac{b-1}{c-1}$ d'où le résultat, en intégrant cette égalité. C'est cette même méthode, ajoute M. VIDIANI qui permet d'établir que si φ est une bijection quelconque de $\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ et si g est la fonction qui à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{b^n}$ associe $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{\varphi(n)}}{b^n}$, alors $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Et il n'est même pas nécessaire que φ soit ni surjective, ni injective !

ERRATA N°393 - Avril-Mai 1994

p.203 : $(0<a<b)$ C_a^b est divisible par b.

p. 203 : Enoncé 229 « ...d'excentricité et de ***direction*** focale constantes».

p.203 : Enoncé 229 de Marie-Laure CHAILLOUT

p.204 : (en haut de la page) $\pi(N) \leq m.9^k$

(en bas de la page) $N = 175(2P + 1) = 350P + 175$

p.209 : (en bas de la page) La surface de $ABCD$ est majorée par $(u - x)\sqrt{1 + x^2}$

p.211 : (en haut de la page) Il suffit de prouver que

$$\sqrt{1 + (a-b)^2 + (a-d)^2} \leq \sqrt{2}\left(1 + \frac{(a-1/2)^2}{2(a-b)(a-d)}\right)$$

(en bas de la page) $u - v = (b - 1/2)^2 + (d + 1/2)^2$

p.214 : (en bas) on voit que le périmètre vaut

$$2\left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a-d}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{a-d}\right)^2}\right) - \frac{1-(b-d)}{a-d}\,Z$$

p.215 : «...il y a presque autant de nombres premiers congrus à 1 modulo 4 que de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 ([...] il y a un peu plus de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 que de nombres premiers congrus à 1 modulo 4)»