AVIS DE RECHERCHE

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet, ou, beaucoup mieux, sur disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL - 6, rue des annelets
75019 PARIS.

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

AVIS DE RECHERCHE N° 21 de R. Vidal (lycée Dr Lacroix, Narbonne)
Qui était *Al Kashi*, dont on étudie la relation ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$) en trigonométrie ?

AVIS DE RECHERCHE N° 22 de A. Viricel 16, rue de la petite Haye 54600 Villers les Nancy, qui cherche l'ouvrage suivant (ou des photocopies) :
Général F. Cazalas, *Carrés magiques au degré n, séries numérales de G. Tarry*, Hermann.

AVIS DE RECHERCHE N° 23 de G. Collombat (St Alban-Leysse)
Est-il possible de disposer n reines sur un échiquier de taille (n,n) de sorte que deux quelconques de ces reines ne soient jamais en prise mutuelle ?

AVIS DE RECHERCHE N° 24 de R. Duvert (Margny-lès-Compiègne)
Pour aider les élèves à comprendre les relations entre les concepts de rectangle, losange, et carré je cherche des analogies dans la "vie courante". J'aimerais donc avoir des séries de trois noms communs A, B, C, "simples" (accessibles à un élève de sixième), et tels que : tous les C sont des A et des B, et tous les A qui sont des B sont des C.

RÉPONSES AUX AVIS PRÉCÉDENTS

AVIS DE RECHERCHE N° 13
On prend les symétriques du point G, centre de gravité d'un triangle (ABC) par rapport à chacun de ses côtés ; on obtient un triangle (A'B'C') de centre de gravité G' ; on réitère le procédé à partir de (A'B'C'). Obtient-on comme position limite un triangle équilatéral ? Que se passe-t-il si l'on prend un autre point pondéré que l'isobarycentre ?

Pour le premier problème, la réponse est oui comme l'ont montré G. Bourgeois et J.P. Lechêne (faculté de Luminy Marseille).
Plus précisément, il n'y a pas qu'une position limite mais deux, consistant en une alternance de deux triangles équilatéraux symétriques par rapport à leur centre de gravité commun, et la convergence est d'ordre 2 (du type de celle rencontrée dans la méthode de Newton, donc très rapide) (fig. 1).

La démonstration, utilisant les complexes, constitue un beau problème d'analyse ; j'en ai reçu une autre, due à E. Delplanche (Créteil), plus géométrique, utilisant les angles de Brocard, mais ne montrant que la convergence des angles vers $\pi/3$; je peux les envoyer contre 10 F. pour les photocopies.
Dans le cas d'une pondération normalisée (p, q, r) quelconque de (A, B, C), G. B. et J.P. L. ont montré qu'il n'y avait de positions limites que dans les trois cas suivants :
i) $p = q$ et $r = 0$ et ABC rectangle en C (ou les cas déduits par permutation)

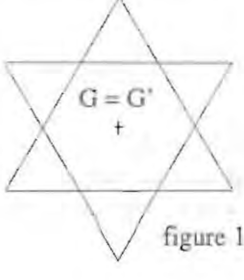


figure 1

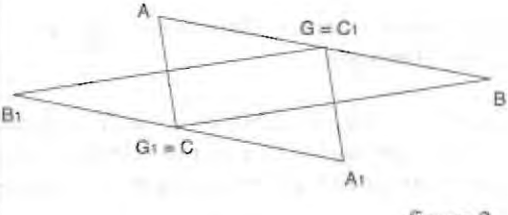


figure 2

auquel cas on obtient une alternance de deux triangles rectangles (fig. 2)

ii) $p, q, r \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ auquel cas il y a convergence d'ordre 1 (géométrique) vers une alternance de deux triangles acutangles (A_1, B_1, C_1) et (A_2, B_2, C_2) de barycentres G_1 et G_2 symétriques par rapport au milieu de [G_1 G_2]; G_1 est le centre du cercle circonscrit à (A_1, B_1, C_1) et l'orthocentre de (A_2, B_2, C_2), et inversement pour G_2 (fig. 2) ; les cotés B_iC_i, C_iA_i et A_iB_i de ces deux triangles sont proportionnels à $\sqrt{(1-2p)p}$, $\sqrt{(1-2q)q}$, $\sqrt{(1-2r)r}$.(fig.3)

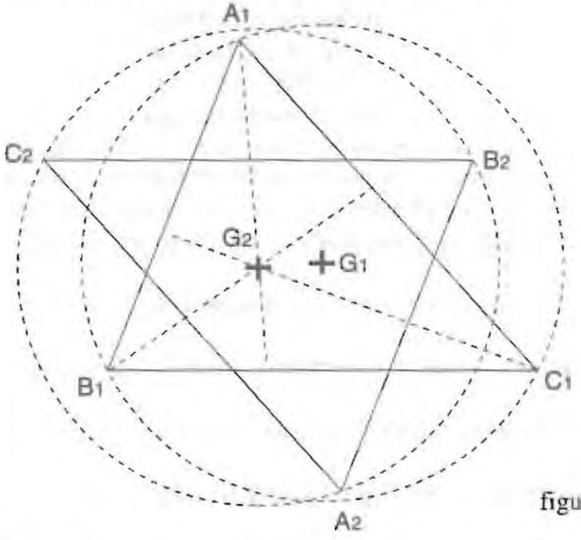


figure 3

iii) $p < 0$, $q > 1/2$, $r > 1/2$ (et les cas déduits par permutation) auquel cas les triangles limites candidats sont répulsifs, et forment une figure analogue à la précédente (mais cette fois, les angles en A_i et B_i sont obtus).

AVIS DE RECHERCHE N°15

I) Étymologie des noms des trois types de coniques.

J'ai reçu pas moins de 8 réponses, plus ou moins complètes, et parfois contradictoires, que je vais essayer de démêler ici.

Tout d'abord l'étymologie est claire: les mots "ellipse, hyperbole et parabole" ont été transcrits des mots grecs ελλειψις (elleipsis), υπερβολη (huperbolê) et παραβολη (parabolê), noms qui avaient été donnés par APOLLONIUS de Perge (env. 262-190 av. J.C.), et c'est KEPLER qui a traduit ces mots grecs (tout d'abord en allemand, je suppose).

Le mot grec *elleipsis* a été créé à partir du verbe *elleipein* qui signifie "manquer" (éclipse a la même origine), tandis que huperbolê et parabolê sont des mots grecs existants signifiant l'un "excès" et l'autre "ressemblance" ou "juste adéquation". Le suffixe *bolê* vient du verbe *ballein* signifiant "lancer", qui a donné "balistique", ce qui fait s'interroger R. VIDAL : y a-t-il un rapport avec le fait qu'un objet lancé décrive un parabole ? Remarquons que pour une parfaite symétrie, APOLLONIUS aurait pu créer "hypobole" pour ellipse, mais que c'eût été moche !

Une ellipse manque donc de quelque-chose, une hyperbole présente un excès, mais de quoi ? C'est là que les réponses divergent...
Pour le dictionnaire historique de la langue française, une ellipse manque ... de perfection par rapport à un cercle. Bien que fort plausible, cette interprétation tue la symétrie ellipse-hyperbole, autour de la parabole.
Une première interprétation symétrique m'a été donnée par P. Renfer (Ostwald), issue du livre : Une histoire des mathématiques, routes et dédales de A. D.-Dalmedico et J Pfeiffer, qui attribue d'ailleurs la terminologie des coniques à un précurseur d'Apollonius, un certain Aristée (IV^e siècle avant J.C.).

On considère la section d'un cône par un plan perpendiculaire à une génératrice :

- c'est une ellipse si l'angle d'ouverture du cône est aigu (déficit par rapport à l'angle droit).
- c'est une hyperbole si l'angle d'ouverture du cône est obtus (excès par rapport à l'angle droit).
- c'est une parabole si l'angle d'ouverture du cône est droit (juste adéquation).

La deuxième explication est-elle plus plausible, car elle m'a été envoyée par quatre personnes (A. Le GOFF (Chanteloup-les-vignes), A. MICHEL-PAJUS (Paris), D. ROTH (Strasbourg) et R. BKOUCHE (Lille)) ?
Ce dernier écrit : écrivons en termes modernes l'équation d'APOLLONIUS d'une conique rapportée au repère défini par le grand axe et la tangente en l'un des sommets ;
- si la courbe est une ellipse (resp. une hyperbole), a désignant le demi-grand-axe de l'ellipse, p le paramètre (longueur de la demi-corde passant par le foyer), on a la relation :

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \text{ (resp. } y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2\text{)}$$

- si la courbe est une parabole. on a la relation $y^2 = 2px$, p désignant encore le paramètre.

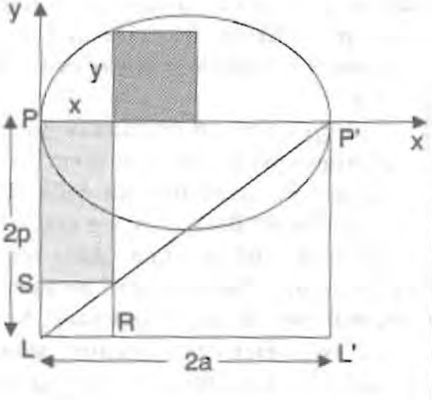
On peut réduire ces trois cas en un en utilisant la notion moderne d'excentricité :

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$$

Pour les géomètres grecs, les équations expriment des relations entre aires (le terme *équation* est ici un abus de langage; ces relations portent directement sur les aires sans recours au numérique, encore moins à un symbolisme algébrique au sens moderne du terme). Elles représentent des opérations de décomposition et de recomposition d'aires, exprimant ainsi une façon (raisonnée) *d'appliquer* une aire sur une autre: une égalité d'aire s'obtient ainsi, par le seul raisonnement, comme une construction permettant d'appliquer la première aire sur la seconde (cela vaut, on le sait, pour les seules aires à bords rectilignes, mais cela suffit pour notre propos).

On lit ainsi sur *l'équation* d'une conique que l'aire du carré construit sur l'ordonnée est égale à l'aire du rectangle défini par l'abscisse et la corde passant par le sommet, aire à laquelle il faut *retirer ou ajouter* une certaine aire suivant que l'on a une ellipse ou une hyperbole, l'égalité avant lieu pour la parabole.

Ainsi lorsqu'on applique le carré y^2 sur le rectangle $2px$, le carré est en défaut dans le cas de l'ellipse (c'est le sens du terme grec *ellipse*), en excès dans le cas de l'hyperbole (c'est le sens du terme grec h*yperbole*) le terme *parabole* signifiant l'égalité des aires.



$$\frac{SL}{x} = \frac{2p}{2a}$$

$$y^2 = 2px - xSL = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

$$\frac{y^2}{pa} + \frac{(x-a)^2}{a^2} = 1$$

A titre de référence :

✱ Thomas L. Heath, *A History of Greek Mathematics* Dover Publications vol II p. 138

✱ Abel Rey, *La Science dans l'Antiquité,* Albin Michel vol 5, p. 157-158

✱ F. Dinqeldey. E. Fabry "Conique" in *encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et appliquées,* rééd. Gabay, tome III (troisième volume) p. 43

PASCAL qui s'intéresse à l'aspect descriptif appelle une ellipse une *antobole* pour indiquer que la courbe se referme (cf."Génération des Sections Coniques" in *Oeuvres complètes (édition* Lafuma), Le Seuil 1964).

II) Explication de l'appellation de l'oscillateur harmonique.

Réponse de R. BKOUCHE :

Lorsqu'on étudie un phénomène vibratoire, on trouve une vibration fondamentale (celle qui possède la fréquence la plus basse), les autres vibrations possibles ont des fréquences qui sont des multiples entiers de la fondamentale. Cela se produit pour les cordes vibrantes et les tuyaux sonores, d'où le nom d'harmoniques pour les vibrations de fréquence supérieure (ainsi la première harmonique est à l'octave).

Si l'on écrit l'équation des ondes, on obtient des ondes sinusoïdales qui conduisent au phénomène ci-dessus; un oscillateur harmonique est ainsi un oscillateur qui produit des vibrations sinusoïdales, la fondamentale (la vibration avant la plus basse fréquence) est accompagnée de ses harmoniques: une vibration est en général composée de la fondamentale et de ses harmoniques, la répartition étant représentée par une série de FOURIER, laquelle représente le *timbre* de la vibration.

Un exemple d'oscillateur non harmonique est le tambour dont les fréquences de vibration sont définies par l'équation de BESSEL; il y a encore une vibration fondamentale: mais les fréquences des "harmoniques" ne sont plus les multiples de la fondamentale. Si l'on veut récupérer des vibrations sinusoïdales, il faut concevoir un tambour carré.