Les moyens de calcul modernes vont-ils révolutionner l'enseignement des mathématiques ?

Conférence de Roger CUPPENS
Université Paul Sabatier (TOULOUSE)

Le thème des journées de Poitiers étant "Mathématiques, passé, futur", je me suis placé délibérément dans le futur sans trop me préoccuper de ce qui est réaliste ou réalisable dans l'immédiat. Dans ce qui suit, je ne m'intéresse pas directement aux applications pédagogiques des calculatrices ou ordinateurs [1] dans les programmes actuels pour lesquelles de nombreux travaux

1) J'essaierai d'éviter soigneusement l'utilisation du terme "informatique" trop souvent galvaudé : on ne fait pas plus d'informatique en utilisant de manière normale un ordinateur que d'aéronautique en prenant un avion.

ont déjà été publiés[2]. Au contraire, après avoir indiqué pourquoi une généralisation de l'emploi des moyens de calcul me semble indispensable (et parlé rapidement du problème mineur des calculatrices aux examens), j'essaierai de montrer l'évolution et les modifications de programmes qui me semblent indispensables pour une telle généralisation.

1. Pourquoi utiliser les moyens de calcul modernes ? Lesquels ? Comment ?

Il semble superflu de se poser ces questions, mais j'essaierai quand même de donner quelques éléments de réponse sans prétendre être exhaustif sur ce sujet. Des éléments militant pour une telle utilisation sont les suivants :

- utiliser les machines et leur puissance de calcul semble une évolution irréversible : plus personne ne songerait à extraire une racine carrée à la main ou même de sortir une table de logarithmes pour calculer un produit, un logarithme ou une exponentielle ;
- les possibilités de visualisation et d'animation semblent importantes dans un enseignement moderne : pouvoir construire des graphiques ou faire "bouger" des figures en géométrie apporte un plus dans l'enseignement ; ces possibilités donnent à l'utilisation de l'ordinateur un aspect ludique et permettent un apprentissage quasi individuel qu'il ne faut certainement pas négliger, surtout pour la remédiation des "élèves faibles".

Ajoutons que l'apprentissage de l'utilisation d'un ordinateur sera certainement dans les années qui viennent un des objectifs essentiels de l'école ; chaque discipline devra y participer selon ses besoins et ses méthodes. Les mathématiciens semblent devoir jouer un rôle essentiel dans cet apprentissage. Nous poserons donc comme principe pour la suite de cet exposé :

Il faut dans un cours de mathématique utiliser les moyens de calcul modernes.

Ces moyens de calcul doivent être d'une part les calculatrices (programmables *et* graphiques) et les ordinateurs pour lesquels un ensemble minimal de logiciels serait[3] :

---

2) On pourra consulter, par exemple, les brochures éditées récemment par le Ministère de l'Education Nationale [14-16].

3) Je ne parlerai pas ici des logiciels utilisant les techniques de l'Intelligence Artificielle qui peuvent rendre des services pour certains apprentisages (démonstrations géométriques par exemple). Les lecteurs intéressés pourront lire les Actes des Universités d'été organisés par la Commission Inter-IREM Mathématique et Informatique [1-3] et particulièrement (10] et (11].

* un grapheur
* un système de calcul formel (Derive, par exemple)
* un logiciel de géométrie (Cabri-Géomètre, par exemple).

Je pense personnellement que l'enseignant doit utiliser un petit nombre de logiciels qu'il maîtrise parfaitement (ceci nécessite, bien entendu, une formation en conséquence), plutôt que des logiciels "clés en main", mais ceci n'est pas un avis faisant l'unanimité. Un avantage d'un petit nombre de logiciels très répandus consiste en la possibilité d'échanges de réflexions, de réalisations (4), ... Un inconvénient serait le risque d'une sclérose, mais nous n'en sommes pas là.

L'utilisation de ces matériels peut se faire de deux manières distinctes :
- en classe, l'ordinateur avec une tablette rétroprojetable (5) peut remplacer avantageusement l'emploi du tableau et de la craie ; cette utilisation nécessite une formation minimale de l'enseignant ;
- en salle de Travaux Pratiques pour laquelle il faut une double formation : formation au matériel et au logiciel utilisés permettant le dépannage des élèves, formation pédagogique et didactique car l'institutionnalisation du savoir dans de telles séances ne va pas de soi comme le montrent les études de Michèle Artigue (cf., par exemple, [4]).

2. Les moyens de calcul aux examens.

L'un des principaux obstacles à une utilisation des moyens de calcul modernes semble être leur place dans les examens officiels. La solution la plus simple consisterait à les interdire (ou à en restreindre d'une manière drastique l'usage (6)). Une telle attitude est ridicule : comment réagirions-nous si nous pouvions lire sur les énoncés des examens d'il y a quelques années le préambule suivant :
«Pour cet examen, tous les moyens d'écriture autres que la plume d'oie et l'encre violette sont interdits.

Pour éviter les fraudes, seuls les encriers et les plumes d'oie fournis par

4) Par exemple, Cabri-Géomètre devient un standard diffusé dans de nombreux pays. Travailler avec un tel outil plutôt qu'avec d'autres logiciels du même type devrait permettre d'évoluer rapidement.

5) Pour éviter des problèmes de "connectique" parfois ardus, il est suggéré que ces matériels soient connectés de manière permanente. Puisqu'on peut rarement espérer l'accès des salles de cours équipées en permanence de tels matériels, l'idée d'un chariot mobile supportant ordinateur, système de rétroprojection et imprimante semble la plus adaptée.

6) Dans mon université, seules sont admises aux examens du DEUG des calculatrices "quatre opérations".

l'administration seront autorisés lors de l'épreuve.»

Or il faut remarquer qu'à cette époque la calligraphie faisait partie du bagage de l'honnête homme et donnait même accès à certains emplois. Nous énoncerons donc un second principe :

On ne peut pas interdire l'utilisation des moyens de calcul modernes aux examens.

Néanmoins, il nous faut analyser un peu plus les arguments avancés pour freiner une telle utilisation.

- Le premier argument souvent avancé est la possibilité de fraude introduite par l'utilisation des mémoires des calculatrices(7). Pour répondre à cet argument, il suffit de se demander si savoir par cœur des mathématiques est une qualité importante et à tester dans un examen officiel. L'aptitude à rechercher rapidement une information là où elle se trouve semble au moins une qualité aussi importante dans le monde moderne. Pourquoi ne pas en arriver (surtout en mathématiques) à des examens avec tous documents autorisés. De tels examens existent dans la plupart des universités : ils nécessitent des sujets adaptés, mais ne sont pas plus faciles pour autant.
- Un deuxième argument, celui du mauvais usage des calculatrices par les élèves, est résolu immédiatement par la question : leur a-t-on appris le "bon usage" ? Nous reviendrons abondamment dans la suite sur cette importante question.
- Un troisième argument souvent entendu est : le développement des moyens de calcul entraînera la perte de certaines connaissances. Mais ces connaissances sont-elles indispensables ? Seules des études didactiques (et une expérimentation) permettront de répondre à ce problème (8).

Finalement, reste l'argument de l'égalité des candidats : il faut craindre que, dans le situation actuelle, les élèves possédant les calculatrices les plus performantes (et les plus chères) soient grandement favorisés. C'est le seul argument sérieux. Il faut constater que les critères actuels basés sur la taille de la calculatrice ne sont plus adaptés à la situation (l'ont-ils été un jour ?). On peut envisager plusieurs solutions : établir périodiquement et avec précision les calculatrices agréées pour les divers examens (9), définir de nouvelles épreuves…

7) C'est, par exemple, l'attitude du jury du CAPES de Mathématique.
8) Ajoutons qu'il en a toujours été ainsi : par exemple, qui connaît encore l'algorithme pour extraire à la main les racines carrées ?
9) *Encore faut-il que ce ne soit pas à un niveau ridiculement bas.*

3. Du bon usage des moyens de calcul.

Pour étudier cet important problème, nous partirons du fait que l'utilisation des calculatrices ou ordinateurs peut se schématiser de la manière suivante : dans une boite, on entre des données et il en sort (de manière plus ou moins opaque) un résultat :

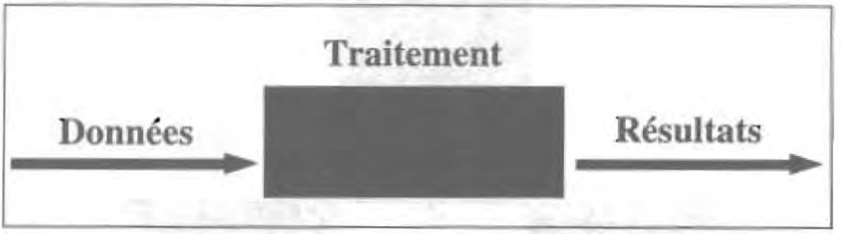
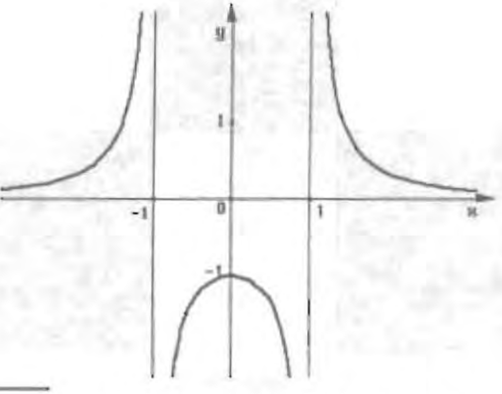


figure I

La possibilité de rendre le traitement de la boîte le plus transparent possible n'est pas de mon propos : à moins de refaire tous les calculs à la main, il faut faire plus ou moins confiance à la machine [10]. Il faut donc pouvoir répondre à la question :

Le résultat obtenu est-il "vraisemblable" ?

Répondre à cette question doit être un des buts fondamentaux de l'enseignement actuel. Ceci peut se faire par des raisonnements heuristiques différents des méthodes actuelles. Par exemple [11], supposons qu'un ordinateur fournisse pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ la courbe représentative suivante :



10)Cf. les discussions autour de la démonstration du théorème des quatre couleurs.
11) Cet exemple a été développé par Yves Chevallard dans un autre contexte.

Une étude de la vraisemblance peut être la suivante :

- le signe de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ nous permet d'affirmer qu'il n'y a pas de point dans les zones hachurées :

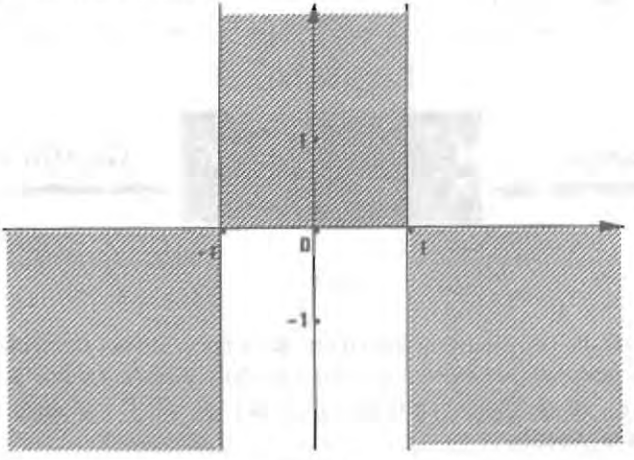


figure 3

- une étude des valeurs particulières et "aux bornes" nous fournit de plus les points :

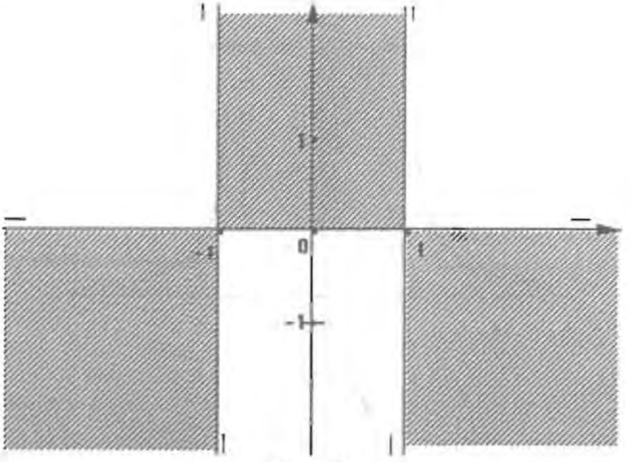


figure 4

On peut en conclure (sans calcul de dérivée ou sans tableau de variation ([12]) que la courbe obtenue est tout à fait vraisemblable ([13]).

Par contre, **si le résultat est invraisemblable, que faut-il faire ?**

La première question à se poser est : **Les données sont-elles correctes ?**

Dans l'affirmative, la question suivante à résoudre est : **Le résultat a-t-il été bien interprété ?**

La réponse n'est pas toujours simple. Je donnerai deux exemples dont le premier m'a été proposé en préparation au CAPES :

Pour la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x}$, un ordinateur fournit la courbe représentative suivante dont le comportement au voisinage de 0 est assez éloigné de la valeur 1 pourtant évidente :

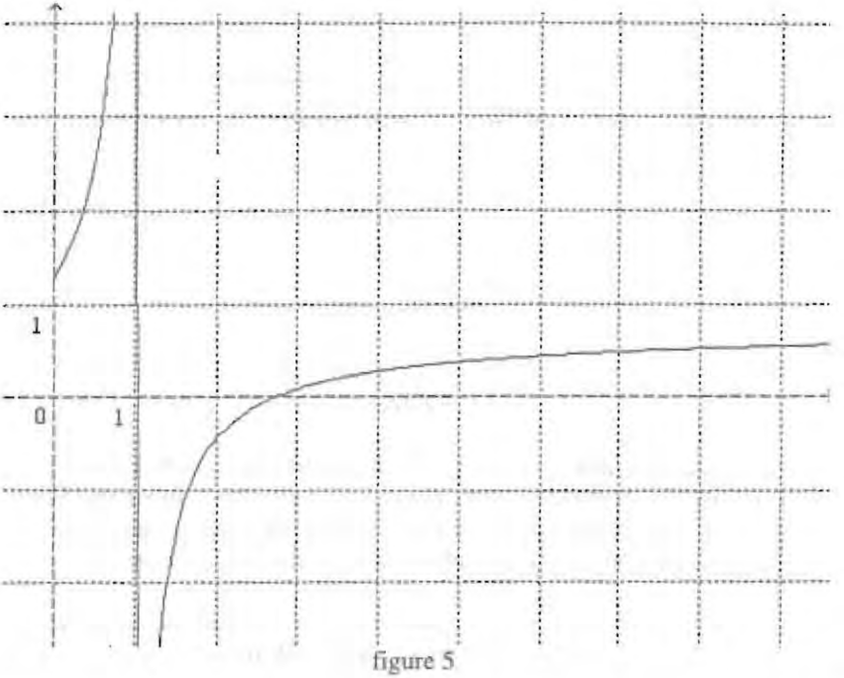


figure 5

12) Dans la pratique, il est souvent beaucoup plus intéressant d'établir un tableau de variations à partir d'une courbe représentative.

13) D'autres arguments tels que symétrie, "complexité" de la fonction peuvent augmenter cette vraisemblance.

Une explication nécessite la connaissance du fonctionnement d'un écran graphique et permet d'illustrer de manière intéressante la notion de limite et les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.

On voit de plus que lorsqu'on présente comme courbe représentative la courbe habituelle

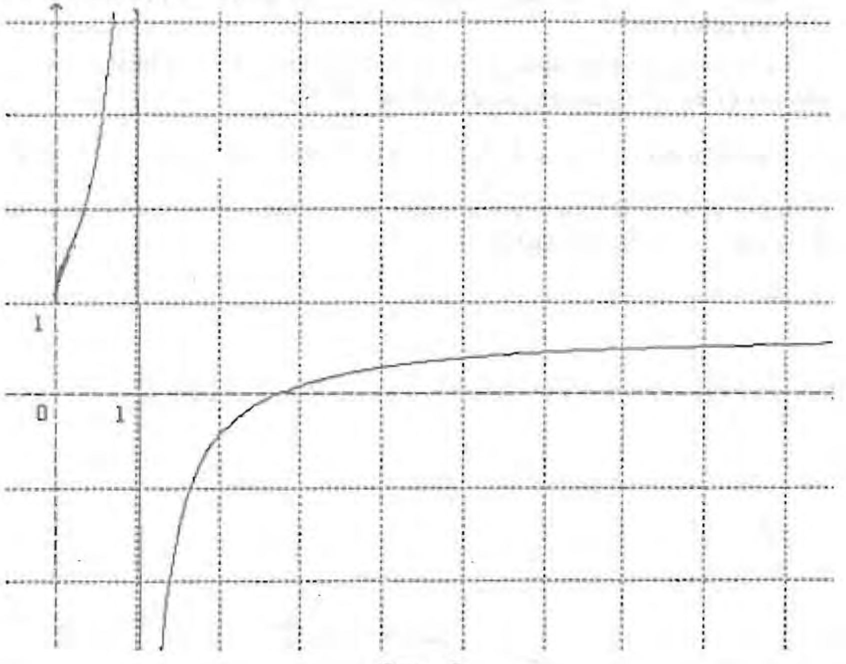


figure 6

ceci ne correspond pas à la définition de la courbe représentative d'une fonction comme l'ensemble des points $\{(x,y) : y = f(x)\}$: les courbes représentatives constituent un langage visuel ayant comme toute langage une syntaxe et une sémantique. Enseigne-t-on réellement les rudiments de ce langage ?

Le deuxième exemple est tiré d'une brochure fort intéressante sur les calculatrices graphiques éditée récemment par l'IREM de Montpellier [17] : pour la fonction $f(x) = \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$, on obtient sur l'intervalle [0.2,95.2] la représentation

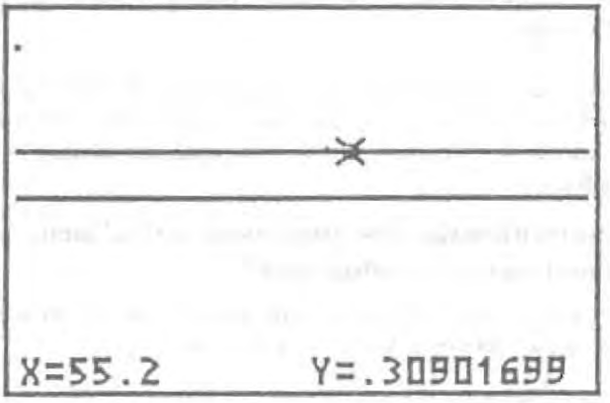


figure 7

et sur l'intervalle [-0.3,94.7] la représentation

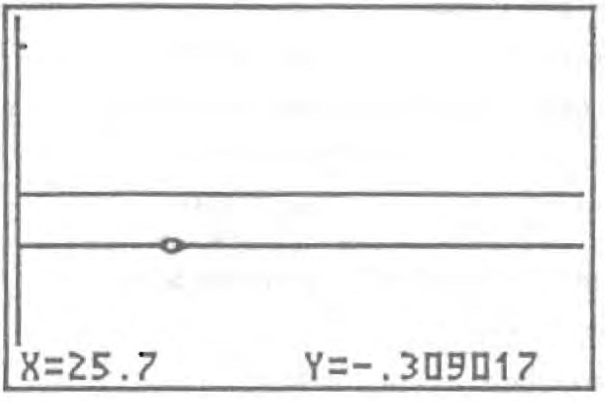


figure 8

c'est à dire deux représentations constantes, l'une positive, l'autre négative. Ici aussi, seule une connaissance du fonctionnement de l'écran graphique permet d'expliquer ces phénomènes. Mais quelle meilleure illustration du concept de fonction périodique ?

Bien entendu, si on conclut à la bonne interprétation du résultat fourni, on peut encore mettre en cause le fonctionnement de la machine, mais ceci est une autre histoire…

Pour conclure, on remarquera que ce qui précède implique un changement radical du rôle de l'élève ; actuellement, il fournit une production que le professeur légalise (ou non) ; il devra maintenant estimer la production d'une machine[14].

4. Un apprentissage des moyens de calcul peut-il se faire dans l'enseignement traditionnel ?

Pour illustrer que la réponse à cette question est évidemment négative, commençons par l'exemple de l'étude de la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{10}{3} u_n - u_{n-1} \\ u_0 = 1 \\ u_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On montre facilement que $u_n = 3^{-n}$

et donc que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

Or un traitement sur machine en nombres réels fait conjecturer que

$$\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$$

En effet, si $u_1 = 0,3333\ldots$

alors $u_n = a3^{-n} + b3^n$

avec a voisin de 1 et b très petit, mais différent de zéro.

Par contre, en posant $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$,

on obtient l'étude de

$$\begin{cases} p_{n+1} = 10\, p_n\, q_{n-1} - 3\, p_{n-1}\, q_n \\ q_{n+1} = 3\, q_n\, q_{n-1}, \\ p_0 = q_0 = 1, \\ p_1 = 1, q_1 = 3 \end{cases}$$

14) A ma connaissance, l'un des rares livres prônant ce genre d'attitude en dehors du contexte informatique est [6].

qu'il est facile de programmer et qui fournit le bon résultat. Mais

Où enseigne-t-on l'arithmétique ?
Où enseigne-t-on les dangers d'une programmation en nombres réels ?

De même, nous avons vu dans le paragraphe précédent que l'interprétation des calculs et des représentations graphiques nécessite :
- une connaissance informatique,
- une connaissance des nombres réels.

Enseigne-t-on ces connaissances *indispensables* ?

De plus l'analyse de la machine est-elle celle du mathématicien ou celle du physicien ? Autrement dit : **Faut-il enseigner l'analyse non standard ?**

De même, en géométrie, le logiciel Cabri-Géomètre semble un outil incontournable pour la construction des figures et l'étude de problèmes de géométrie élémentaire [15]. Or les outils de base fournis par ce logiciel sont les suivants :

Creation

Point de base
Droite de base
Cercle de base

Segment
Droite passant par 2 points
Triangle
Cercle déf. par centre et point

Construction

Lieu de points

Point sur objet
Intersection de 2 objets

Milieu
Médiatrice
Droite parallèle
Droite perpendiculaire
Centre d'un cercle

Symétrique d'un point
Bissectrice

figure 9

Il n'y a pas de nombres réels, ce qui peut sembler paradoxal dans l'enseignement actuel de la géométrie. Mais, en géométrie élémentaire, a-t-on besoin des nombres réels ou des rapports de grandeurs [16] ? Vouloir écourter l'apprentissage de la géométrie euclidienne n'entraîne-t-il pas une perte de sens pour les élèves ?

15) Cf. par exemple, [5].
16) Ceux qui s'étonnent de l'absence des nombres réels oublient que l'on parle du rapport d'une homothétie.

Mais allons plus loin : peut-on bâtir une géométrie sans nombres réels ? Si l'on suppose que les points de base ont des coordonnées rationnelles, les constructions (à la règle et au compas) fournissent des points à coordonnées constructibles et les lieux géométriques fournissent des points à coordonnées algébriques. Seuls certains problèmes de mesure nécessitent l'introduction de certains nombres réels [17]

Terminons par la remarque que l'enseignement actuel de la géométrie et de l'analyse impose l'introduction de l'ensemble des nombres réels. Mais quelle peut être la signification pour les élèves de l'enseignement secondaire d'un tel ensemble : un ensemble abstrait ou la "droite numérique" ? On a alors un magnifique cercle vicieux : l'attitude constructive qui semble naturelle en utilisant un logiciel comme Cabri-Géomètre permet d'éviter pendant très longtemps de telles difficultés.

5. Le développement de l'informatique nécessite-t-il l'enseignement de nouvelles mathématiques ?

Quand on lui a demandé quelles étaient les mathématiques utiles pour l'informatique, Donald Knuth [18] a répondu : l'arithmétique, la logique, les mathématiques discrètes et surtout pas d'analyse !
On peut s'étonner qu'aucune de ces matières ne soit enseignée dans l'enseignement secondaire, mais si elles ne sont nécessaires que pour comprendre l'informatique, ceci n'a pas grosse importance puisque l'on n'enseigne plus l'informatique dans les lycées [19].

Mais examinons les choses d'un peu plus près. Il va sans dire qu'enseigner à nouveau de l'arithmétique semble indispensable. L'abandon d'un tel enseignement au moins pour les futurs scientifiques est un véritable crime dont les effets pervers se font depuis longtemps sentir dans les classes préparatoires et les premiers cycles universitaires.

D'autre part, la consultation de bases de données un peu sophistiquées nécessite des connaissances logiques telles que la signification réelle du "et", du "ou" et de la négation, sans parler de la compréhension du "si ... alors ...

---

17) Ceux qui voudraient plus de détails sur ce point pourront lire [12] ; quant à ceux qui seraient choqués par ce discours, il suffit de dire que le plus petit corps sur lequel on peut faire de la géométrie (non finie) est le corps des nombres algébriques.

18) Donald Knuth est l'auteur du langage $\TeX$, standard actuel pour l'édition des textes mathématiques.

19) On peut quand même regretter que des rudiments de langage comme LOGO aient été aussi abandonnés : les rapports entre la récursivité et certaines notions de mathématiques sont particulièrement intéressants comme je l'ai montré dans [7] et [8].

sinon ...". Comme l'accès à de telles bases est déjà une nécessité, des connaissances logiques devront faire partie du bagage de l'honnête homme du XXI° siècle ([20]).

Enfin, le développement de nouveaux produits tels que les hypertextes ([21]) (textes pouvant être parcourus de manière non linéaire au gré de l'utilisateur) pose des problèmes de navigation dont l'apprentissage est loin d'être maîtrisé. Il semble que la connaissance des parcours des structures arborescentes (une des branches des mathématiques discrètes) puisse aider un tel apprentissage.

Ces quelques exemples suffisent pour montrer que les matières souhaitées par Donald Knuth sont nécessaires non seulement pour un informaticien, mais pour tout utilisateur d'un ordinateur, c'est à dire presque tout le monde. Il est urgent de prévoir une place pour ces notions dans les programmes de l'enseignement secondaire.

6. Conclusion.

On voit que l'évolution et la généralisation des ordinateurs engendrera de nouveaux besoins (et vraisemblablement une nouvelle pédagogie) en mathématiques. Il est à craindre qu'en l'absence d'une telle évolution, l'enseignement des mathématiques, comme celui du latin, ne concerne que quelques élèves ou qu'il ne soit maintenu que pour donner du travail à des professeurs de mathématiques irrécupérables par ailleurs.
Il est évident que, pour faciliter cette évolution, le choix du matériel n'est pas neutre : il vaut mieux avoir un chariot informatique performant qu'une salle équipée d'ordinateurs à bout de souffle ([22]) ; de même, il vaut mieux disposer d'un matériel le plus convivial et le plus ergonomique possible (dont le prototype actuel semble le MacIntosh) qu'un matériel où l'essentiel des difficultés réside dans l'apprentissage du système d'exploitation.

De plus, il est évident qu'il faudra une formation de tous les enseignants à ces nouveaux besoins. Pour les enseignants en place, il est à craindre qu'il soit difficile de le faire dans les systèmes actuels de formation continue.

Quant aux nouveaux enseignants, il faut constater que les enseignements universitaires actuels et la formation dans les IUFM ne les préparent pas à de tels changements : avec l'organisation actuelle du concours du CAPES et les

20) Pour une étude plus approfondie sur ce point, lire [9].

21) Ou tout simplement, le Minitel.

22) L'idéal serait, bien sûr, de disposer suivant les besoins d'un chariot informatique et d'une salle de travaux pratiques parfaitement équipés.

besoins des enseignants stagiaires en deuxième année, peu de place peut être réservée à une telle formation. Avant d'en arriver à la solution fort coûteuse, mais peut être indispensable, d'une année supplémentaire de formation, il faudrait au moins comme le recommandait le Conseil National des Programmes [13] une épreuve obligatoire au CAPES et à l'Agrégation de Mathématiques sur l'utilisation des moyens de calcul.

Bibliographie

[1] Actes de l'Université d'été Intelligence Artificielle et enseignement des mathématiques. 6 au 11 juillet 1987. IREM de Toulouse.

[2] Actes de la Deuxième université d'été Intelligence Artificielle et enseignement des mathématiques. 4 au 8 juillet 1988. IREM de Toulouse.

[3] Actes de l'Université d'été Informatique et Enseignement de la Géométrie. 3 au 6 septembre 1990. IREM de Toulouse.

[4] Michèle ARTIGUE. *Analyse de processus d'enseignement et environnement informatique*. Dans [3], pp. 125-150.

[5] Michel CARRAL et Roger CUPPENS. *Les tribulations d'un pentagone.* Repères n° 12 (juillet 1993) pp. 51-73

[6] Barry CIPRA. *Erreurs... et comment les trouver avant le prof...* InterEditions, 1985.

[7] Roger CUPPENS. *La récursivité en géométrie : les fractals*. IREM de Toulouse, 1986.

[8] Roger CUPPENS. *Apports de l'informatique en arithmétique*. IREM de Toulouse, 1986.

[9] Roger CUPPENS. *Faut-il enseigner la logique ?* Dans [2], pp. 135-143.

[10] Roger CUPPENS. *Apports possibles de l'Intelligence Artificielle à la formation des maîtres en mathématique.* Bulletin de liaison n° 3 de la Commission Inter-IREM Mathématiques et Intelligence Artificielle (février 1989) pp. 5-28.

[11] Roger CUPPENS. *Intelligence artificielle et enseignement de la géométrie*. Dans [3], p. 5-16. Aussi publié dans Repères n° 4 (juillet 1991) pp. 53-62.

[12] Roger CUPPENS. *Quelques réflexions sur le logiciel Cabri-Géomètre*. A paraître dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

[13] *Les ordinateurs au service du système éducatif*. Déclaration du Conseil National des Programmes. Ministère de l'Éducation Nationale et de la Culture. Octobre 1992.

[14] *Faire des mathématiques au collège avec l'ordinateur*. Ministère de l'Éducation Nationale, 1993.

[15] *Faire des mathématiques au lycée avec l'ordinateur*. Ministère de l'Éducation Nationale, 1993.

[16] *Enseignement des Mathématiques et Logiciels de calcul Formel. DERIVE, un outil à intégrer*. Ministère de l'Éducation Nationale

[17] *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*. IREM de Montpellier, 1993.