Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.
Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS

ÉNONCÉ N° 228 (François LO JACOMO, Paris).

Montrer que si a et b sont premiers entre eux ($0 < a < b$), C_b^a est divisible par a.

ÉNONCÉ N°229 (Laure CHAILLOUT - Sarcelles).

Déterminer l'ensemble des foyers des coniques passant par deux points fixes, d'excentricité et de distance focale constantes.

ÉNONCÉ N° 230 (Norbert VERDIER, Damas - Syrie).

Quelles sont les valeurs possibles de dét A_n lorsque A_n est une matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent +1 ou −1? (on pourra se limiter à certaines valeurs de n).

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 213 . Mohammed IGUIDER, Salé-Maroc.

Soit $\Pi(N)$ le produit de tous les chiffres représentant l'entier naturel N dans la base décimale (exemple : $\Pi(273) = 2 \times 7 \times 3 = 42$). Montrer que si $N \geq 1000$, $\Pi(N) < 2/3N$.
Peut-on avoir $\Pi(N) = N/5$?

SOLUTION de Maurice PERROT (Paris).

Première question :

Ecartons le cas trivial où N a un chiffre 0.

Soit $10^K \leq N \leq 10^{K+1}$. Alors $K \geq 3$ et N s'écrit avec $(K+1)$ chiffres.

Soit m le plus petit chiffre de N.

$N \geq mm \ldots m = \frac{m}{9}\left(10^{K+1} - 1\right)$ et $\Pi(N) = m.9^K$.

Supposons $\Pi(N) \geq \frac{2}{3}N$

On aurait $\qquad 3m9^K \geq \frac{2m}{9}\left(10^{K+1} - 1\right)$

$$3.9^{K+1} \geq 2.10^{K+1} - 2$$

$$3.9^{K+1} \geq 2.10^{K+1} - 1 \qquad \text{(congruence mod 2)}$$

$$3.9^{K+1} \geq 2.10^{K+1} + 7 \qquad \text{(congruence mod 9)}$$

donc $\qquad 3.9^{K+1} \geq 2.10^{K+1}$

$$\frac{3}{2} \geq \left(\frac{10}{9}\right)^{K+1} \quad \text{ce qui est faux pour } K \geq 3.$$

Donc, si $N \geq 1000$, $\Pi(N) < \frac{2}{3}N$

Deuxième question :

a) Si N a un chiffre 0, et est solution, $\Pi(N) = 0$ et $N = 5\Pi(N) = 0$ (qui est solution).

Si N est une autre solution, il se termine par 5. $5 \mid \Pi(N) \quad \Rightarrow \quad 25 \mid N$.

N n'a pas de chiffre pair,(sinon $10 \mid \Pi(N)$ et $10 \mid N$). Il se termine par 75.

$35 \mid \Pi(N)$ et $175 \mid N$ (et 175 est solution).

$N = 175(2P+1) = 350P + 275$.

P est pair (sinon N se termine par 25). $N = 700Q + 175$.

Q est pair (sinon le chiffre des centaines est pair). $\underline{N = 1400R + 175.}$

Si $R \geq 1$, $N \geq 1575$ (qui n'est pas solution, donc $R > 1$).

b) Si $N = A99\ldots975$ avec $10^K \leq N < 10^{K+1}$, $K \geq 3$

$9 \mid \Pi(N)$, $9 \mid N$, $9 \mid A + 7 + 5$, $9 \mid A + 3 \qquad A = 6$, pair, ce qui est exclu.

Il y a donc un chiffre ≤ 7 entre A et 75. $\Pi(N) \leq 5.7^2.A.9^{K-3}$.

$$A.10^K < N \leq 1\,225.9^{K-3},$$

d'où $\left(\frac{10}{9}\right)^{K-3} < 1{,}225$ qui implique $K - 3 < 2$ donc $K \leq 4$. <u>$3 \leq K \leq 4$</u>

c) Si N a un chiffre 9, alors $9 \mid \Pi(N)$, $9 \mid N$

$N = 1\,575\,(2P + 1) = 3\,150P + 1\,575$ $\quad 1575 \mid N$

$N = 6\,300Q + 1575$

$N = 12\,600R + 1575$

Les seuls entiers à considérer sont 51 975 et 39 375 et ils ne sont pas solution. <u>N n'a pas de chiffre 9.</u>

d)

$\Pi(N) \leq 5.7^4 = 12\,005$	$N \leq 60\,025$	$N \leq 57\,775$
$\Pi(N) \leq 5^2.7^3 = 8\,575$	$N \leq 42\,875$	$N \leq 37\,775$
$\Pi(N) \leq 3.5.7^3 = 5\,145$	$N \leq 25\,725$	$N \leq 17\,775$
$\Pi(N) \leq 5.7^3 = 1\,715$	$N \leq 8\,575$	$N \leq 7\,775.$

Compte tenu de $N = 1\,400R + 175$ et $R > 1$, les seules solutions à considérer sont 7175 et 5775, qui ne sont pas solutions.

$$\boxed{\Pi(N) = \frac{N}{5} \Leftrightarrow (N = 0 \text{ ou } N = 175)}$$

REMARQUES :

La formulation de la seconde question peut poser problème. Tout d'abord, suggère-t-elle qu'il n'y a pas de solution ? En d'autres termes, un énoncé de ce type doit-il être formulé différemment suivant qu'il y a ou non des solutions ?

Par ailleurs, faut-il chercher *toutes* les solutions, comme l'ont fait : Pierre BARNOUIN (Cabris), René BENOIST (Palaiseau), Dominique DAVION (Doumettaz), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Thierry LEGAY (Fontenay-sous-Bois), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), Dominique PARINET (Loches), Marguerite PONCHAUX (Lille), Pascal PETER (La Rivière), Roger QUENTON (Seillans), R.RAYNAUD (Digne), Pierre SAMUEL (Hossegor), Michel TANGUY (Quimper), donc, une majorité de lecteurs, ou faut-il prouver qu'il existe pour le moins une solution (Maurice BONNARD, Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Pascal DEVOUGES, Gérard GOUBY (Bagnac s/Célé), Christian JEANBRAU (Paris), Radek KRPEC (Ostrava - République tchèque), Eric OSWALD, Vincent THILL (Migennes)) ? Que doit-on répondre à la question : *«Pouvez-vous me passer le sel ?»* ?

Qui plus est, a-t-on besoin d'ordinateur pour ce genre de problème ? Y a-t-il des mathématiciens «privilégiés» qui peuvent poser n'importe quelle question de ce type à leur machine ? Une solution est-elle d'autant plus élégante qu'elle ne fait pas appel à l'ordinateur ?

Beaucoup de questions classiques auxquelles je laisse chaque lecteur répondre en fonction de son «intime conviction». Je conclurai en signalant que la solution la plus rapide, qui ne fait pas appel à la machine (si ce n'est la calculette...), semble être la suivante :

SOLUTION RAPIDE

Appelons $\Pi_K(N)$ le produit de tous les chiffres de N, à l'exception du coefficient de 10^K. Si N a n chiffres, il est clair que : $\dfrac{N}{\Pi(N)} = \displaystyle\sum_{K=0}^{n-1} \frac{10^K}{\Pi_K(N)}$

Chacun des $\Pi_K(N)$ étant majoré par 9^{n-1}, on a la relation :

$$(1) : \qquad \frac{N}{\Pi(N)} \geq \frac{10^n - 1}{9^n}$$

mais on a également :

$$(2) : \qquad \frac{N}{\Pi(N)} \geq \frac{10^{n-1}}{\Pi_{n-1}(N)} + \frac{10^{n-1} - 1}{9^n}$$

La première question résulte facilement de la relation (1). Quant à la seconde, $\dfrac{N}{\Pi(N)} = 5$ entraîne que N (donc également $\Pi(N)$) est multiple de 5 et non de 10, hormis pour la solution triviale $N = 0$.

Donc, en définitive, N est multiple de 25 et ne contient pas de chiffre pair, d'où il résulte que $N = 100M + 75$ et que

$$\Pi(N) = 35.\Pi(M) = \frac{N}{5} = 20M + 15$$

M vérifie donc trois conditions :

(a) M n'a que des chiffres impairs

(b) $M \equiv 1$ (modulo 7) (car $20M + 15$ est divisible par 35).

(c) $\dfrac{M}{\Pi(M)} < \dfrac{7}{4}$.

La condition (c) entraîne, de par la relation (1), que M ne peut pas avoir plus de 5 chiffres.

Si M a 5 chiffres, la relation (2) et la condition (c) entraînent que $\Pi_4(M) > 6\,326$, ce qui n'est possible que si les quatre derniers chiffres de M sont des 9 : compte tenu de la condition (b), seul conviendrait 39 999, mais $\Pi(399\,9975) = 68\,8905$; de même, si M a quatre chiffres, $\Pi_3(M) > 625$ et on peut faire appel à la condition (a) pour éliminer toutes les possibilités de solutions. Pour 3 chiffres, 2 chiffres et 1 chiffre, on trouve 6 possibilités pour M : 799, 379, 197, 57 99 et 1 ; seule la dernière correspond effectivement à une solution : $N = 175$.

ÉNONCÉ N°215 (Jacques AMON, Limoges).
Soit f une fonction continue de $[0,1] \to \mathbf{R}$, et soit a et b respectivement l'inf et le sup de $f(t)$ sur $[0,1]$.

Montrer que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)\,dt \leq -ab$.

SOLUTION de Marie KOPACKOVA (Ostrava - République Tchèque)
Evidemment :

$$0 \leq \int_0^1 (b - f(x))(f(x) - a)\,dx = -\int_0^1 f^2(x)\,dx + (a+b)\int_0^1 f(x)\,dx - ab.$$

Nous obtenons : $\int_0^1 f^2(x)\,dx \leq (-ab)$. cqfd.

AUTRES SOLUTIONS
Maurice BONNARD, Michel CARRÉ (Montpellier), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Régis CHARPENTIER (Evry), Dominique DAVION (Chambéry), Francis DENOYELLE (Cambrai), Pascal DEVOUGES (Vitry s/Seine), Gérald GOUBY (Bagnac s/ Célé), Gérard HECQUET (Aureville), Christian JEANBRAU (Paris), Odile KERLEGUER (Igny), Thierry LEGAY (Fontenay sous Bois), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), Eric OSWALD, Dominique PARINET (Loches), Serge PARPAY (Niort), Mairice PERROT (Paris), Marguerite PONCHAUX (Lille), M. VIDIANI (Dijon), et la Sup 4 du Lycée Corneille (Rouen) et une solution fausse.

REMARQUES

Plusieurs lecteurs ont fait remarquer que l'hypothèse de continuité était trop forte (il suffit que f soit intégrable), et que l'égalité ne peut avoir lieu que si la fonction positive $(b - f(x))(f(x) - a)$ est d'intégrale nulle, donc est presque partout nulle (partout, dans le cas où f est continue) ; si f est continue, l'égalité n'a lieu que pour f identiquement nulle.

En outre, la classe de Sup 4 du Lycée Corneille de Rouen a cherché des généralisations de ce problème. Par exemple, le cas où f est en escalier suggère l'énoncé suivant :

soient $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ n points d'un segment $[AB]$, et G le barycentre de ces n

points affectés de coefficients m_i $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i = 1\right)$ Alors $\sum_{i=1}^{n} m_i GM_1^2 \leq GA.GB$.

ÉNONCÉ N° 214 (François Lo JACOMO, Paris)

Un cube, d'arête unité, est coupé par un plan. Quelle est la surface maximale du polygone intersection ? Quel est le périmètre maximal du polygone intersection ?

RÉPONSE :

Désolé de m'être approprié un problème aussi classique ! Dès la parution de la revue, M. DELEHAM (Reims), M.VIDIANI (Dijon) et Charles NOTARI (Noé)) m'ont signalé que ce problème était résolu dans *Articles de mathématiques* d'E. EHRHART (Cédic 1985). Sincèrement, je l'ignorais... mais peut-être certains lecteurs l'ignoraient aussi ! Ma foi, pourquoi ne pas remettre à l'honneur des problèmes classiques en suscitant des démonstrations nouvelles ?

«*Sous un énoncé simple*, écrit Eugène Ehrhart dans l'ouvrage sus-mentionné, *certaines questions mathématiques cachent de grandes difficultés. En voici deux par exemple qui, à l'essai, s'avèrent aussi réfractaires à la géométrie analytique qu'à la géométrie pure : quelle est la section plane d'aire maximale d'un tétraèdre ou d'un cube ? La difficulté est d'autant plus inattendue que, intuitivement, on devine les réponses : pour le tétraèdre, c'est une face, pour le cube, s'est une section passant par deux arêtes opposées.*

«J'avais posé la première dans ***American Mathematical Monthly*** *en janvier 1962. Restée d'abord sans réponse, elle fut finalement résolue en décembre 1963 par H.G.Eggleston, professeur à l'Université de Londres, dont les ouvrages sur les corps convexes font autorité.*

«Je me propose de résoudre la seconde en m'appuyant sur un lemme classique et sur un théorème important, aussi général que simple, relatif aux corps convexes, le théorème de Brunn, trop ignoré à mon avis».

Ce problème est également traité dans ***la Revue de Mathématiques Spéciales***, Mai 1966, n°10. Le théorème de BRUNN sur lequel s'appuie Eugène EHRHART, dit que la variation de l'aire de sections planes parallèles d'un corps convexe comporte au plus trois phases : croissance, constance, décroissance. Plusieurs lecteurs : Jacques AMON (Limoges), René MANZONI (Le Havre), Marguerite PONCHAUX (Lille), ont proposé des solutions qui ne s'appuyaient pas sur ce théorème.

La solution la plus élémentaire est peut-être la suivante : compte tenu qu'une section passant par deux arêtes opposées a pour aire $\sqrt{2}$, il suffit de prouver que toute autre section a une aire $\leq\sqrt{2}$.

Si parmi les arêtes coupées par le plan, il n'y en a pas deux qui soient parallèles, le plan coupe au plus trois arêtes, la section est un triangle ABC dont chaque côté est au plus égal à une diagonale de face $\sqrt{2}$, et dont la surface vaut : $\frac{1}{2} \cdot AB.AC.\sin\widehat{A} \leq 1 < \sqrt{2}$.

Si le plan coupe deux arêtes parallèles mais ne coupe pas deux arêtes opposées, l'intersection est un trapèze $ABCD$ (voir la figure 1), dont la pro

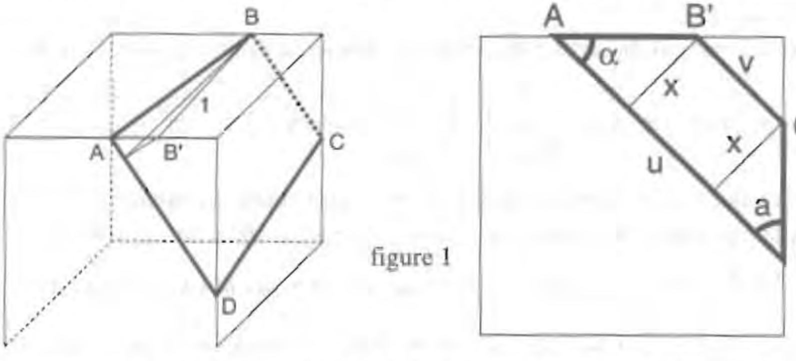


figure 1

jection sur la face contenant AD est également un trapèze $AB'C'D$. Posons $u = AD$, $v = BC = B'C'$, et appelons x la hauteur du trapèze projeté $AB'C'D$: la hauteur du trapèze $ABCD$ vaut $\sqrt{1+x^2}$, et la surface de $ABCD$ vaut donc : $\frac{1}{2}(u+v)\sqrt{1+x^2}$.

Mais $u = v + x\left(\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha}\right) \geq v + 2x$, si bien que la surface de $ABCD$ est majorée par $(u+v)\sqrt{1+x^2}$, fonction qui décroît pour tout x car $u < 2\sqrt{2}$, et qui donc, pour $x \geq 0$, est majorée par u, donc par $\sqrt{2}$.

Restent les cas où le plan coupe deux arêtes opposées du cube, en B et D.

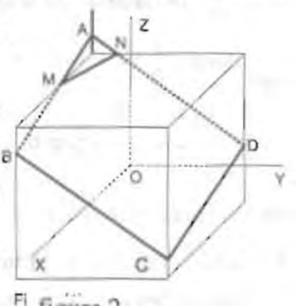
Admettons que ces deux arêtes soient verticales : les droites porteuses des deux autres arêtes verticales coupent le plan en A et C. Choisissons un repère orthonormé centré au centre du cube de telle sorte que les cotes a, b, c, d de A, B, C et D respectivement vérifient : $a \geq c$, $1/2 \geq b \geq d \geq -1/2$. Quitte à transformer la figure par une symétrie par rapport au centre du cube, on peut supposer en outre que $b + d \geq 0$. $ABCD$ étant un parallélogramme, $a - b = d - c$, et trois cas peuvent se présenter :

- soit $a \leq 1/2$, auquel cas $c = b + d - a \geq -1/2$ et l'intersection est précisément le parallélogramme $ABCD$ (il est clair que $c \leq \dfrac{b+d}{2}$ est toujours $\leq 1/2$),
- soit $1/2 < a \leq b + d + 1/2$ auquel cas on a encore $c \geq -1/2$, et l'intersection est un pentagone (le parallélogramme tronqué d'un triangle de sommet A),
- soit $a > b + d + 1/2$, donc $c < -1/2$ et l'intersection est un hexagone (le parallélogramme tronqué de deux triangles, l'un de sommet A, l'autre de sommet C).

Dans tous les cas, la surface du parallélogramme est égale à la norme du produit vectoriel : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ d-a \end{pmatrix}$ donc à $\sqrt{1 + (a-b)^2 + (a-d)^2}$.

Lorsque $a \leq 1/2$, donc lorsque le plan coupe le cube précisément selon le parallélogramme $ABCD$, on peut écrire $(a-b)^2 + (a-d)^2 \leq (|a-b| + |a-d|)^2$, $a \geq \dfrac{b+d}{2}$ est toujours supérieur à d, mais si $a < b$, $|a-b| + |a-d| = b - d \leq 1$ et si $a \geq b$, $|a-b| + |a-d| \leq 1 - (b+d) \leq 1$, de sorte que l'on a toujours $\sqrt{1 + (a-b)^2 + (a-d)^2} \leq \sqrt{2}$.

Si $1/2 < a \leq b + d + 1/2$, donc, si l'intersection est un pentagone (voir figure (2)), il est clair que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{a - 1/2}{a-b}$ et $\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{a-1/2}{a-d}$ et comme l'angle $\widehat{MAN}$ est le même que l'angle $\widehat{BAD}$, le triangle MAN a pour aire : $\dfrac{(a-1/2)^2}{(a-b)(a-d)}$ (aire du triangle ABD)



Fi figure 2

donc : $\dfrac{(a-1/2)^2}{2(a-b)(a-d)}$ (aire du parallélogramme $ABCD$).

L'inégalité à démontrer est donc :

$$\left(1-\frac{(a-1/2)^2}{2(a-b)(a-d)}\right)\sqrt{1+(a-b)^2+(a-d)^2}\leq\sqrt{2}\,.$$

Pour ce faire, il suffit de prouver que :

$$\sqrt{1+(a-b)^2+(a-d)^2}\leq\sqrt{2}\left(1+\frac{(a-1/2)^2}{(a-b)(a-d)}\right)$$

ou même, mieux encore, que : $\sqrt{1+(a-b)^2+(a-d)^2}\leq\sqrt{2}\left(1+\dfrac{(a-1/2)^2}{2}\right)$

dans la mesure où $a-b\leq d+1/2\leq 1$ et $a-d\leq b+1/2\leq 1$. Or cette inégalité résulte de :

(1) $$1+(a-b)^2+(a-d)^2\leq 2+2(a-1/2)^2$$

que l'on démontre ainsi : posons $w=b+d$ $(0\leq w\leq 1)$. Comme $d\leq b\leq 1/2$, $0\leq b-d\leq 1-w$ si bien que $b^2+d^2=\dfrac{1}{2}\left((b+d)^2+(b-d)^2\right)\leq\dfrac{1}{2}-w+w^2$

de sorte que l'inégalité (1) découle de : $(1-w)(1+2a)+w^2\leq 2$ qui est évidente, puisque $a\leq w+1/2$.

Dans le cas de l'hexagone ($a>b+d+1/2$), nous devons tronquer le parallélogramme de deux triangles similaires, l'un en A, l'autre en C, de sorte que la surface restante vaut :

$$\left(1-\frac{(a-1/2)^2+(c+1/2)^2}{2(a-b)(a-d)}\right)\sqrt{1+(a-b)^2+(a-d)^2}\,.$$

Comme $c=b+d-a$, l'inégalité à démontrer est donc :

$$\left(\frac{2a-\left(b+d+b^2+d^2+1/2\right)}{2(a-b)(a-d)}\right)\sqrt{1+\frac{1}{2}\left((2a-b-d)^2+(b-d)^2\right)}\leq\sqrt{2}.$$

En posant $x=2a-b-d$, $u=b^2+d^2+1/2$ et $v=b-d$, elle se ramène à :

(2) $$\frac{x-u}{x^2-v^2}\sqrt{x^2+2+v^2}\leq 1$$

Il est clair que $x>1\geq u\geq v\geq 0$ $(u-v=(b-1/2)^2-(d+1/2)^2)$ et que l'inégalité (2) équivaut à : $x^2 + 2 + v^2 \leq \left(x + u + \frac{u^2 - v^2}{x - u}\right)^2$.

Or, il suffit, pour que cette inégalité soit vérifiée, que :

$$u^2 + 2u\left(x + \frac{u^2 - v^2}{(x - u)}\right) + 2(u^2 - v^2) \geq 2 + v^2$$

ou même, comme $(x - u) + \frac{u^2 - v^2}{(x - u)} \geq 2\sqrt{u^2 - v^2}$ que $2u\left(u + 2\sqrt{u^2 - v^2}\right) + 3(u^2 - v^2) - 2 \geq 0$, ce qui est évident, car $1 - 2u + v^2 = -(b + d)^2 \leq 0$ entraîne $\sqrt{u^2 - v^2} \geq 1 - u$.

Ainsi s'achève la démonstration de la première question (section d'aire maximale).

La difficulté du problème est sans doute liée au fait que sur les cinq cas à étudier (triangle, trapèze, parallélogramme, pentagone et hexagone) quatre admettent le maximum cherché comme valeur limite, et l'hexagone tend même vers ce maximum aux deux bornes de l'intervalle, aussi bien pour $x - v \to 0$ que pour $x \to +\infty$.

Mais je voudrais revenir sur une phrase d'Eugène EHRHART : *«intuitivement, on devine les réponses»*. Il faudrait enquêter après de "mathématiciens non avertis" pour savoir vers quoi porte notre intuition. Pierre BARNOUIN (Cabris) s'intéresse intuitivement aux sections contenant des axes de symétrie, en nommant "axes de symétrie d'ordre 3" les diagonales principales du cube. Mais si le théorème de BRUNN permet d'affirmer que les plans cherchés passent nécessairement par le centre de symétrie - et la démonstration d'Eugène EHRHART s'appuie là-dessus - , il n'est nullement évident que les axes de symétrie aient un quelconque rapport avec le problème. Remplaçons le cube par un parallélépipède rectangle : il n'y a plus d'axes de symétrie d'ordre 3. La solution du problème est-elle fondamentalement différente ? Je serais davantage poussé à faire intervenir les sommets : les plans cherchés contiennent au moins trois sommets du cube. L'idée - que je n'ai pas menée à bien, mais peut-être certains lecteurs l'ont-ils fait ou se sentent-ils d'attaque pour le faire - serait que si le plan contient au plus deux sommets, il est possible de le faire pivoter de sorte que la surface soit une fonction dérivable de l'angle. Ne peut-on pas affirmer que ladite fonction est convexe, et n'admet donc pas de maximum ?

Venons-en à la seconde question : «quelles sont les sections de périmètre maximum ?» Une fois encore, on s'attend à trouver un plan passant par trois sommets au moins, et il semble que les sections de périmètre maximal soient les mêmes que les sections d'aire maximale. Coïncidence ? Toujours est-il que, compte tenu du fait qu'il existe des sections dont le périmètre est $2(1+\sqrt{2})$, il suffit de démontrer que toute autre section a un périmètre $\leq 2(1+\sqrt{2})$. Et il est possible de le faire à coup d'inégalités, comme pour la question précédente :

Les sections triangulaires ont un périmètre $\leq 3\sqrt{2} < 2(1+\sqrt{2})$.

Avec les notations de la figure (1), les sections trapézoïdales ont pour périmètre : $u + v + \sqrt{1 + AB'^2} + \sqrt{1 + C'D^2}$. Or AB' et $C'D$ étant inférieurs à 1, $\sqrt{1 + AB'^2} + \sqrt{1 + C'D^2} \leq \left(1 + \frac{AB'}{2}\right) + \left(1 + \frac{C'D}{2}\right)$ et

$AB' + C'D \leq \sqrt{2}\sqrt{AB'^2 + C'D^2} = (u - v)\sqrt{2}$.

Dans le cas du parallélogramme, le périmètre vaut, avec les notations de la première question : $2\left(\sqrt{1 + (a-b)^2} + \sqrt{1 + (a-d)^2}\right)$.

En posant $t = |a - b|$, nous avons vu que $0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq a - d \leq 1 - t$, et on vérifie facilement que pour tout $t \in [0\ ,\ 1]$,

(3) $\sqrt{1+t^2} \leq 1 + \frac{t}{1+\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2 - 2t + t^2} \leq \sqrt{2} - \frac{t}{1+\sqrt{2}}$ (ce qui résulte par exemple de la convexité des deux fonctions).

Dans le cas du pentagone, avec les notations de la figure (2), nous avons :

$$MB = \left(1 - \frac{a - 1/2}{a - b}\right)\sqrt{1 + (a-b)^2}\ ;\ ND = \left(1 - \frac{a - 1/2}{a - d}\right)\sqrt{1 + (a-d)^2}$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a - 1/2}{a - b}\right)^2 + \left(\frac{a - 1/2}{a - d}\right)^2} = (a - 1/2)\sqrt{\left(\frac{1}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1}{a-d}\right)^2}$$

Si bien que le périmètre vaut :

$$2\left(\sqrt{1 + (a-b)^2} + \sqrt{1 + (a-d)^2}\right) - (a - 1/2)\ Y$$

avec Y $Y = \sqrt{1 + \frac{1}{(a-b)^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{(a-d)^2}} - \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(a-d)^2}}$.

Comme $0 \leq a - b \leq d + 1/2 \leq 1$ et $0 \leq a - d \leq b + 1/2 \leq 1$, on peut utiliser l'inégalité (3) pour écrire : $\sqrt{1+(a-b)^2}+\sqrt{1+(a-d)^2}\leq 2+\dfrac{2a-b-d}{1+\sqrt{2}}$

mais ce n'est pas suffisant : il faut en plus prouver que si $y \geq 1$ et $z \geq 1$,

(4) $$\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}\geq\sqrt{2}+\sqrt{y+z}$$

pour affirmer que $Y \geq \sqrt{2} > \dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ ce qui permet de conclure.

Quant à l'hexagone, son périmètre vaut :

$$\left(2-\frac{(a-1/2)}{a-b}-\left(\frac{a-b-d-1/2}{a-b}\right)\right)\sqrt{1+(a-b)^2}+$$

$$\left(2-\frac{(a-1/2)}{a-d}-\left(\frac{a-b-d-1/2}{a-d}\right)\right)\sqrt{1+(a-d)^2}+$$

$$((a-1/2)+(a-b-d-1/2))\sqrt{\frac{1}{(a-d)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}}$$

Si $a-d \leq 1$ (donc $a-b \leq 1$), nous sommes ramenés au cas précédent : le périmètre vaut :

$$2\left(\sqrt{1+(a-b)^2}+\sqrt{1+(a-d)^2}\right)-(2a-b-d-1)Y$$

avec $Y \geq \sqrt{2} > \dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$

Si $a-d > 1$, nous sommes encore ramenés au cas précédent, car en regroupant différemment les termes, on voit que le périmètre vaut :

$$2\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{a-d}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{a-d}\right)^2}\right)-\frac{1-(b-d)}{a-d}$$

avec $Z=\left(\sqrt{1+(a-d)^2}+\sqrt{1+\left(\dfrac{a-d}{a-b}\right)^2}-\sqrt{(a-d)^2+\left(\dfrac{a-d}{a-b}\right)^2}\right)$

Comme $a-d \geq a-b > 0$, $Z \geq \sqrt{2} > \dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ et l'on retrouve la majoration souhaitée.

Mais la solution calculatoire ci-dessus n'est pas nécessairement meilleure que celle proposée par Jean-Marie FAURE (Bruay en Artois), il y a quelques années dans la présente rubrique (problème n°4), et que je vous laisse découvrir en achetant les 200 premiers problèmes de l'A.P.M.E.P. réunis par Dominique ROUX.

COURRIER DES LECTEURS

À propos de l'énoncé 209, Jean RUFFIN (Peyrat) m'écrit : «En 1980, j'avais beaucoup étudié la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$ [...]. J'avais interrogé l'Inspecteur Général RAMIS qui m'a envoyé la solution utilisant les fonctions presque périodiques, en précisant qu'elle dépassait, et de loin, le niveau des CAPES».

Il me demande par ailleurs des éclaicissements sur ma minoration, p.85 de $\sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n}$ par un $C\sqrt{\ln r}$.

En ce qui me concerne, c'est Joseph OESTERLÉ qui, en 1978, m'a soumis le problème : « $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$ est-elle non bornée sur $\mathbf{R}$?» et la solution que je propose n'est pas de moi : c'est, un peu rerédigée, celle que m'a envoyée Gérald TENENBAUM en 1986.

Pour ce qui est de la minoration, le Théorème de DIRICHLET qui dit, en substance, qu'il y a presque autant de nombres premiers congrus à 1 modulo n que de nombres premiers congrus à 3 modulo n (une étude plus approfondie montre qu'en réalité il y a un peu plus de nombres premiers congrus à 3 modulo n que de nombres premiers congrus à 1 modulo n : voir par exemple William J.Ellison et Michel Mendès-France, *Les nombres premiers*, Paris-Hermann 1975, p.275 et suivantes), peut se préciser de plusieurs façons, par exemple (*ibid.*, p.293)

$$\sum_{\substack{p \equiv l \ (\text{mod.} K) \\ p \text{ premier} \leq x}} \ln p = \frac{x}{\varphi(K)} + o\left(x(\ln x)^{-H}\right)$$

H étant un réel quelconque, les constantes du «o» ne dépendant que de H, l étant premier avec K et $\varphi(K)$ désignant le nombre d'entiers entre 1 et K premiers avec K (donc $\varphi(4) = 2$).

En choisissant $H = 2$, on voit que la somme des logs des nombres premiers congrus à 1 modulo 4 et compris entre $e^{\sqrt{n}}$ et $e^{\sqrt{n+1}}$ vaut :

$$\frac{1}{4\sqrt{n}}e^{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}e^{\sqrt{n}}\right)$$

Or, chacun de ces nombres vaut : $e^{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}e^{\sqrt{n}}\right)$

Leurs logarithmes valent $\sqrt{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ si bien que la somme des inverses de

ces nombres premiers vaut : $\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

En définitive, $$\sum_{\substack{p \text{ premier} \leq e^{\sqrt{m}} \\ p \equiv 1\ (4)}} \frac{1}{p} = \frac{\ln m}{4} + o(1)$$

On peut en dire autant de $\Sigma \ln(1 + 1/p)$ et donc :

$$\prod_{\substack{p \text{ premier} \leq p_r \\ p \equiv 1\ (\text{mod } 4)}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \exp\left(\frac{\ln \ln p_r}{2} + o(1)\right)$$

d'où le résultat, vu que $p_r > r$.