## *Etudes*

# CARRÉS MAGIQUES
## d'ordre $n$ ($n \in \{3 ; 4 ; 5\}$)
### utilisant les naturels compris entre 1 et $n^2$
### Observation et classification
### Construction systématique par ordinateur.

**Jean-Marie ROBBE**
Villers le Lac (25130)

*«Les carrés magiques ne sont d'aucun usage ; ce n'est qu'un jeu, dont la difficulté fait le mérite et qui peut seulement faire naître sur les nombres quelques vues nouvelles dont les mathématiciens ne veulent pas perdre l'occasion.»*

Cette phrase de FONTENELLE décrit bien l'esprit dans lequel l'étude suivante a été menée. Si beaucoup de brillants matheux se sont penchés avec succès sur le problème des carrés magiques, souvent de façon théorique, peu d'entre eux ont tenté un décorticage pour en tirer une classification et essayer de les obtenir pour pouvoir mieux les observer. Un de mes collègues me raconte souvent, qu'au temps déjà lointain où il était étudiant, quelques-uns de ses camarades passaient une bonne partie de leurs nuits sur les systèmes d'équations à 25 inconnues des carrés d'ordre 5, mais n'étaient pas parvenus au moindre résultat concret. Rien d'étonnant à cela, 12 équations ne suffisent pas, chacun le sait.

La construction d'une arithmétique très simple des carrés d'ordre 4 et 5, issue de ces équations, permet pourtant de proposer des algorithmes pour les fabriquer tous à l'aide de l'ordinateur. La seule contrainte est qu'il faut nécessairement laisser la machine travailler longtemps... A qui sait attendre ...

## Un peu d'histoire

Depuis qu'ils sont capables de compter, les hommes ont été intrigués par les figures magiques. Les Chinois, dans leur récit de la création du monde, racontent que le premier carré est apparu sur le dos d'une tortue marine qui, un jour, aborda la terre. Les Arabes, intermédiaires entre l'Antiquité et le Moyen-Age, ont été fascinés par les propriétés magiques de certaines figures et en Europe, Dürer, dans une de ses eaux-fortes, a dessiné une figure magique d'ordre 4, prouvant que l'on s'intéressait à ce type de mystère.

Ce fut pour beaucoup un passe-temps agréable (Bachet de Méziriac) avant que des mathématiciens plus rigoureux ne prennent en main le problème. L'étude systématique a été l'œuvre d'Euler, puis de Galois (1830) avec la théorie des corps finis. Les domaines d'application se sont multipliés au XX° siècle en statistique et théorie de l'information. De manière épisodique, les revues scientifiques publient un article sur ce sujet et l'engouement pour le côté apparemment magique ne s'atténue pas.

**1- Qu'est-ce qu'un carré magique ?**

On dit qu'un tableau carré de nombres est magique si les sommes des nombres de chacune de ses lignes, de chacune de ses colonnes et de chacune des deux diagonales sont égales. Cette somme est appelée «constante magique».

Si le carré est rempli avec des naturels consécutifs compris entre 1 et $n$, la somme totale des nombres est $n(n+1)/2$ et la somme d'une ligne d'un carré d'ordre $i$ est égale à $i(i^2+1)/2$.

**2- Carré d'ordre 3.**

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

En fait, il n'existe qu'un carré d'ordre 3. C'est celui que les Chinois connaissaient déjà. Sept autres carrés peuvent être déduits de celui-ci par transformations (rotations de $\pi/2$ ou $\pi$, symétrie centrale et symétries orthogonales).

***Propriétés de ce carré :***

Mises à part les propriétés qui font qu'il est magique, on peut remarquer que :

$$2^2+7^2+6^2=8^2+3^2+4^2$$
$$6^2+1^2+8^2=2^2+9^2+4^2$$

et que

$$492^2 + 357^2 + 816^2 = 294^2 + 753^2 + 618^2$$
$$438^2 + 951^2 + 276^2 = 834^2 + 159^2 + 672^2$$
$$417^2 + 396^2 + 852^2 = 714^2 + 639^2 + 258^2$$
$$639^2 + 174^2 + 852^2 = 936^2 + 471^2 + 258^2$$
$$897^2 + 312^2 + 456^2 = 798^2 + 213^2 + 654^2$$
$$231^2 + 978^2 + 456^2 = 132^2 + 978^2 + 654^2$$

## 3- Carrés d'ordre 4.

### 1. Construction systématique

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
| $i$ | $j$ | $k$ | $l$ |
| $m$ | $n$ | $o$ | $p$ |

La constante magique de ces carrés est 34. Sur les $C_{16}^4$ suites croissantes de 4 nombres compris entre 1 et 16, il en existe 86 dont la somme est 34. Or, chacune de ces suites, par permutation, en donne 4!, soit 24, c'est-à-dire qu'il existe 2 064 suites de nombres compris entre 1 et 16 dont la somme est 34. Ces suites sont fabriquées sur ordinateur puis stockées dans un fichier à accès direct.

Deux suites sont choisies et placées en diagonale. On calcule ensuite la somme $b + c$ par différence entre la constante magique 34 et $a + d$ déjà fixés. Sachant que $b$ peut varier de 1 à $b + c - 1$, $b$ est fixé sans répétitions avec des nombres déjà utilisés. Il s'en déduit $c$, puis $o$ et $n$ dans les colonnes 2 et 3. Ces colonnes seront déclarées correctes si la somme de la quatrième ligne est égale à la constante magique 34. De même, sont complétées les cases $e$, $i$, $h$ et $l$ avec vérification sur la colonne 4.

Il s'agit en fait d'associer par deux les suites de quatre nombres, nécessitant $2\,064 \times 2\,063$ essais. Le calcul, ainsi conduit, demande environ 200 heures à un compatible IBM PC/AT sur un programme en GW-BASIC, ce qui est excessif. Aussi, en utilisant les propriétés algébriques des carrés $4 \times 4$, le temps de traitement peut être divisé par un facteur voisin de 10. Ces propriétés seront exposées dans le paragraphe suivant.

Les carrés magiques obtenus sont à leur tour stockés dans un fichier à accès direct en vue d'un tri ultérieur, sous la forme d'une chaîne de 16 nombres. La machine en donne 7040.

Le tri fait intervenir les symétries du carré, chacun d'eux étant équivalent à 7 autres qui sont superposables par symétrie et/ou rotation. Pour gagner du temps et de la place en mémoire centrale où le fichier doit tenir en entier, les chaînes alphanumériques du type "11 5 14 4 8 10 1 15 2 16 7 9 13 3

12 6", les lignes du carré étant mises bout à bout, sont réduites à des chaînes de 16 caractères alphabétiques utilisant le code $a = 1$, $b = 2$, … , $p = 16$. Le programme de tri lit la première chaîne, la transforme en sept autres équivalentes et les compare à la seconde de l'enregistrement. Si la chaîne rencontrée est égale à l'une des huit, elle est supprimée du fichier. La chaîne d'ordre $n$ est donc comparée aux $7040 - n$ suivantes qui n'ont pas encore été effacées. A la suite de ce traitement, il reste les 880 carrés attendus (7040 : 8) différents par transformations. Ce nombre de carrés est connu depuis 1937 dans l'étude de LEHMAN.

**2. Arithmétique des carrés 4 × 4.**

Le travail utilise les 10 équations nécessaires et suffisantes pour que le carré soit magique. Les propriétés découvertes permettent de trouver d'autres caractéristiques, parfois surprenantes, de ces carrés. On notera $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ les «équations-lignes», $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ les «équations colonnes» et $D_1$ et $D_2$ les «équations-diagonales».

On fait d'abord $D_1 + D_2 - L_1 - C_4$ :

$$a + f + k + p + d + g + j + m - a - b - c - d - d - h - l - p = 0$$

soit $f + k + g + j + m - b - c - d - h - l = 0$

or, $b + c + d = 34 - a$,

d'où $f + k + g + j + m - 34 + a - h - l = 0$

ou $f + k + g + j + m + a - h - l = 34$ (I).

D'autre part : $L_2 + L_3 = 34 \times 2$.

$$f + k + g + j + e + h + i + l = 2 \times 34 \qquad \text{(II)}.$$

Par différence de (I) et (II) :

$$e + h + i + l - m - a + h + l = 34$$

or, $a + e + i + m = 34$ ($C_1$) soit $-a - m = -34 + e + i$

d'où l'on tire : $2(e + h + i + l) = 2 \times 34$.

donc $e + h + i + l = 34$

de même, on montre que $b + c + n + o = 34$.

De plus, $D_1 + D_2 - L_2 - L_3 = 0$

d'où $a + p + d + m = 34$ (III)

or, $D_1 + D_2 = 2 \times 34$

d'où $f + k + g + j = 34$

On fait également $L_1 - (\mathrm{III}) = 0$
d'où $a + m = h + l$
de même, $m + p = b + c$
$d + p = e + i$
$a + d = n + o.$

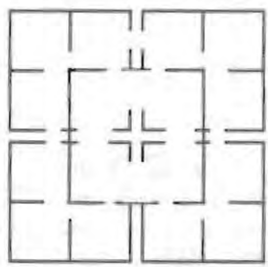
La somme des quatre cases affectées d'un même signe est donc égale à la constante magique 34. Le fait que les cases centrales valent 34 amènent une contrainte supplémentaire que l'on impose aux diagonales dans la construction systématique.

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | * | * | X |
| + | $ | $ | + |
| + | $ | $ | + |
| X | * | * | X |

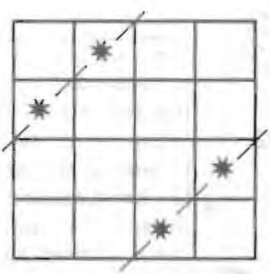
**3. Classification des carrés magiques 4 × 4 en fonction de leurs propriétés et réduction de leur nombre total par transformations spécifiques liées à ces propriétés.**

L'analyse des propriétés de ces carrés par ordinateur fait apparaître trois grands sous-ensembles :

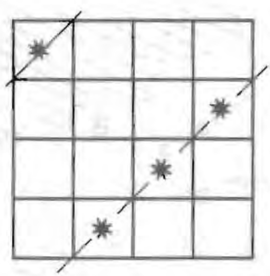
**A** : sous-ensemble des carrés décomposables en 5 carrés élémentaires 2 × 2 de somme 34.
Ce sont ceux qui possèdent le maximum de propriétés supplémentaires (voir diagramme).



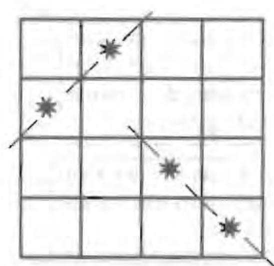
*Remarque :* dans le commentaire du diagramme, on utilisera les dénominations suivantes :



Diagonale brisée 2+2



Diagonale brisée 1+3



Fausse diagonale

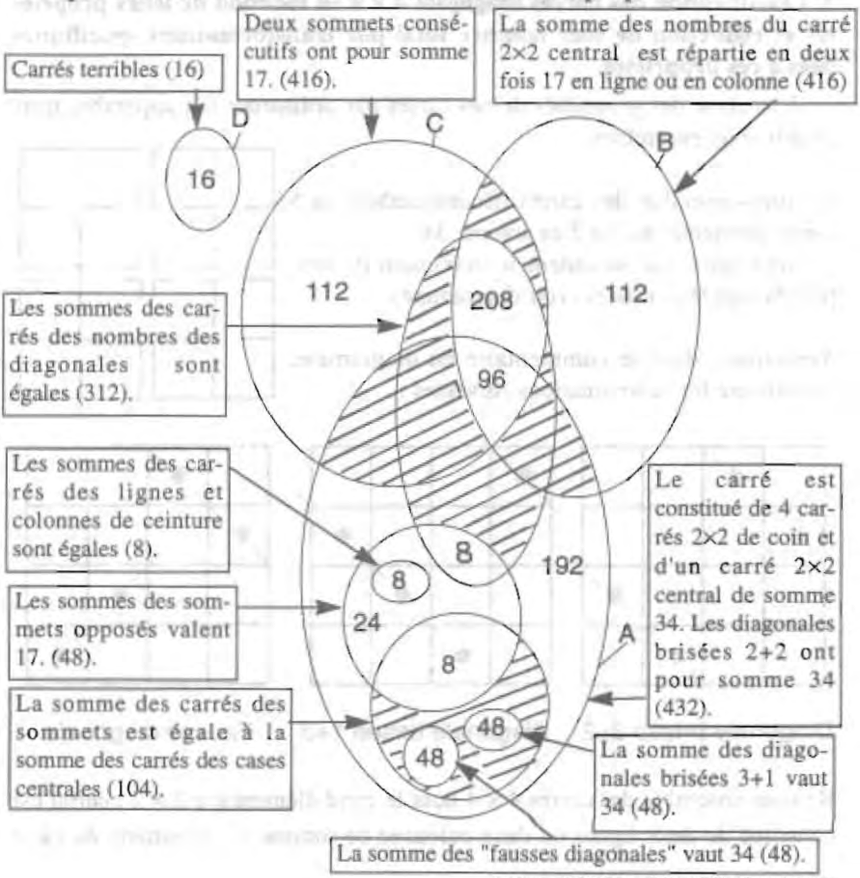
**B** : sous-ensemble des carrés 4 × 4 dont le carré élémentaire 2 × 2 central est constitué de deux lignes ou deux colonnes de somme 17, la somme du carré central étant 34 comme dans tout carré (voir paragraphe arithmétique des carrés $4 \times 4$).

**C** : Sous-ensemble des carrés dont deux sommets consécutifs ont pour somme 17, les deux autres ayant également 17 pour somme (voir paragraphe arithmétique).

**D** : En plus de ces trois ensembles, le tri fait apparaître que 16 carrés ne possèdent aucune des propriétés recensées : ce sont les "carrés terribles".

Il va de soi que les carrés les plus parfaits sont ceux qui appartiennent à la fois aux trois ensembles A, B et C. Ils ont de plus la propriété d'avoir des diagonales dont les sommes des carrés sont égales.

**4. Répartition des carrés $4 \times 4$ en fonction de leurs propriétés.**



**5. Réduction du nombre de carrés : «Passage à la moulinette».**

Les 880 carrés ont été obtenus à partir des 7 040 existants par élimination des doubles dûs aux symétries et rotations. Or, il est possible de diminuer ce nombre grâce à des transformations qui permettent de les obtenir tous, à nouveau. Les permutations agissant sur les nombres placés sur les diagonales sont au nombre de 8 (dont l'identité), si l'on s'en tient aux permutations symétriques - les autres sont inintéressantes -. Elles permettent d'obtenir d'autres carrés à partir d'une figure donnée, par simple échange des contenus des cases des diagonales. Soit l'ensemble {1, 2, 3, 4}. Considérons les huit présentations symétriques, actives sur cet ensemble :

$P_1$ : $1 \longleftrightarrow 4$
$P_2$ : $2 \longleftrightarrow 3$
$P_3$ : $1 \longleftrightarrow 4$ et $2 \longleftrightarrow 3$
$P_4$ : Identité
$P_5$ : $1 \longleftrightarrow 2$ et $3 \longleftrightarrow 4$
$P_6$ : $1 \longleftrightarrow 3$ et $2 \longleftrightarrow 4$
$P_7$ : $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$
$P_8$ : $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$

La recherche fait apparaître deux types de transformations :

a. *Les transformations inconditionnelles* qui s'appliquent à tous les carrés : outre les symétries axiales et centrales et rotations autour du centre du carré, il en existe deux, $T_{1a}$ et $T_{1b}$. La transformation $T_{1a}$ est une sorte de double symétrie orthogonale par rapport à l'axe horizontal, et à l'axe vertical, mais qui laisse invariants les sommets. A elle seule, cette transformation permet d'obtenir plus que 440 carrés.

De même $T_{1b}$, permutation en diagonale dans les carrés élémentaires $2 \times 2$ de coin, s'applique à tous les carrés et permet donc d'en diviser également le nombre par 2. A ce stade, il en reste 220. On notera que les permutations des nombres situés sur les diagonales sont associées à des transformations bien précises :

$P_1$ correspond à la composée de $T_{1a}$ et de la symétrie centrale SO.
$P_2$ correspond à $T_{1a}$.
$P_3$ correspond à la symétrie centrale SO.
$P_4$ est l'identité.
$P_5$ correspond à $T_{1b}$.
$P_6$ correspond à la composée de $T_{1b}$ et de la symétrie centrale SO.
$P_7$ correspond à la composée de $T_{1a}$ et $T_{1b}$.
$P_8$ correspond à $T_{1c}$.
$T_{1c}$ est égale à $T_{1a} \circ T_{1b}$.

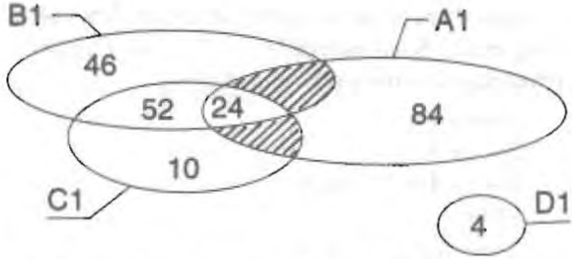
A partir d'un carré donné, on peut obtenir 32 carrés équivalents ($7\,040 = 32 \times 220$) parmi lesquels il en existe un qui vérifie :

$a < d < m$

$a < p$ , $a < j$ , $a < q$

$a < f < k$

Ces 220 carrés représentant des classes d'équivalence sont répartis selon le diagramme suivant :



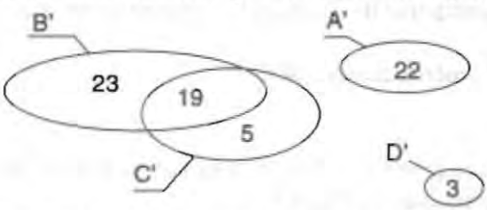

Il convient de noter qu'il n'est pas possible de définir les classes d'équivalence de manière simple autrement que par ces 220 carrés particuliers : en effet, ces transformations opèrent à l'intérieur des ensembles A, B, C et D de sorte qu'on peut obtenir tous les représentants à partir d'un seul des ensembles.

b. ***Les transformations conditionnelles*** qui ne s'appliquent qu'à certains carrés en fonction de leur appartenance à l'un ou à l'autre des sous-ensembles A, B ou C rencontrés précédemment. Ce sont les transformations $T_2$ à $T_{41}$.

Le principe du tri est simple à faire avec l'ordinateur : on lit un carré, on le transforme et on cherche s'in en existe un de la liste qui soit égal au transformé. Si oui, ce dernier est supprimé, et ainsi de suite pour les autres.

Quant aux carrés terribles, il n'est pas possible d'en déduire le nombre sinon par $T_{1a}$, $T_{1b}$ et $T_{1c}$ : il en reste donc 3.

Ces transformations peuvent être composées entre elles et avec les symétries, rotations de même qu'avec $T_{1a}$ et $T_{1b}$. Après applications successives et composition avec les symétries, rotations et transformations $T_1$(a, b et c), il ne reste que 72 carrés répartis selon le diagramme ci-contre, dérivé du précédent. On remarquera que les ensembles A' et B' d'une part et A' et C' d'autre part sont disjoints.



## 6. Conditions d'application.

*Les transformations inconditionnelles* s'appliquent à tout carré : $T_{1a}$, $T_{1b}$ et $T_{1c} = T_{1a} \circ T_{1b}$.

*Les transformations conditionnelles* s'appliquent à certaines conditions vérifiées

- soit dans l'ensemble A,
- soit sur la diagonale brisée 2+2,
- soit sur les fausses diagonales,
- soit sur la diagonale 1+3,
- soit dans l'ensemble B,
- soit dans l'ensemble C,
- soit dans $B \cap C$,
- soit dans les demi-carrés.

On dénombre ainsi 40 transformations qui permettent de diminuer le nombre de carrés, puisque par leur application, on peut les retrouver tous.

On trouvera ici quelques exemples :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* | *d* |
| *e* | *f* | *g* | *h* |
| *i* | *j* | *k* | *l* |
| *m* | *n* | *o* | *p* |

- Symétrie $S_1$ d'axe vertical
- Symétrie $S_3$
  axe : diagonale ascendante
- Rotation $(0, \pi/2)$

- Rotation $(0, 3\pi/2)$
- Symétrie $S_2$ d'axe horizontal
- Symétrie $S_4$
  axe : diagonale descendante

| | | | |
|---|---|---|---|
| *d* | *h* | *l* | *p* |
| *c* | *g* | *k* | *o* |
| *b* | *f* | *j* | *n* |
| *a* | *e* | *i* | *m* |

Rotation $(0, 3\pi/2)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *c* | *b* | *d* |
| *i* | *k* | *j* | *l* |
| *e* | *g* | *f* | *h* |
| *m* | *o* | *n* | *p* |

$T_{1a}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* | *d* |
| *e* | *f* | *g* | *h* |
| *i* | *j* | *k* | *l* |
| *m* | *n* | *o* | *p* |

$T_{1b}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| *f* | *h* | *e* | *g* |
| *n* | *p* | *m* | *o* |
| *b* | *d* | *a* | *c* |
| *j* | *l* | *i* | *k* |

T1c

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* | *d* |
| *h* | *f* | *g* | *e* |
| *l* | *j* | *k* | *i* |
| *m* | *n* | *o* | *p* |

T2

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *n* | *o* | *d* |
| *e* | *f* | *g* | *h* |
| *i* | *j* | *k* | *l* |
| *m* | *b* | *c* | *p* |

T3

| | | | |
|---|---|---|---|
| *b* | *a* | *c* | *d* |
| *f* | *e* | *g* | *h* |
| *n* | *m* | *o* | *p* |
| *j* | *i* | *k* | *l* |

T6

| | | | |
|---|---|---|---|
| *e* | *f* | *h* | *g* |
| *a* | *b* | *d* | *c* |
| *i* | *j* | *l* | *k* |
| *m* | *n* | *p* | *o* |

T7

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *c* | *b* | *d* |
| *l* | *k* | *j* | *i* |
| *h* | *g* | *f* | *e* |
| *m* | *o* | *n* | *p* |

T14

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | *o* | *n* | *d* |
| *i* | *k* | *j* | *l* |
| *e* | *g* | *f* | *h* |
| *m* | *c* | *b* | *p* |

T15

| | | | |
|---|---|---|---|
| *j* | *l* | *i* | *k* |
| *f* | *h* | *e* | *g* |
| *n* | *p* | *m* | *o* |
| *b* | *d* | *a* | *c* |

T24

| | | | |
|---|---|---|---|
| *h* | *e* | *g* | *f* |
| *p* | *m* | *o* | *n* |
| *d* | *a* | *c* | *b* |
| *l* | *i* | *k* | *j* |

T25

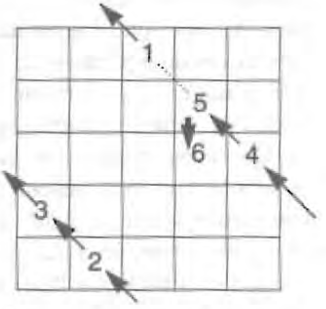
Ces transformations permettent d'obtenir un certain nombre de figures à partir d'une figure magique donnée. Il suffit de connaître quelles sont ses propriétés simples et d'appliquer les transformations convenables.

## IV- Carrés d'ordre 5.

**1. Quelques méthodes anciennes de remplissage.** Ces méthodes, dites de parcours réguliers, s'appliquent à tous les carrés d'ordre impair. Elles sont transposables aux carrés d'ordre 7, 9, etc…

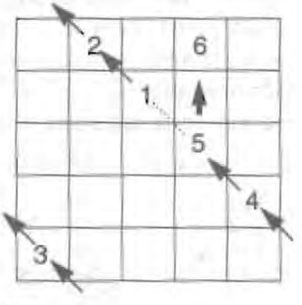
***a. Méthode de la Louhère :***

Le départ est au centre de la première ligne. Le parcours a la direction Sud Est-Nord Ouest. Si la case est occupée, on place le nombre sous le dernier écrit.



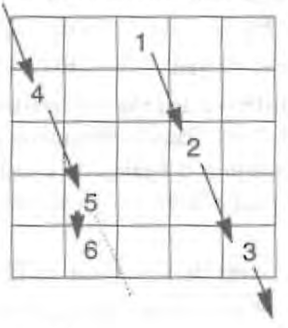

***b. Méthode de Bachet :***

Le départ est au-dessus du centre. Le parcours a la direction de la marche du Fou d'échecs Nord Ouest. Si la case est occupée, on place le nombre à deux pas de Tour Nord.




***c. Méthode du cavalier :***

Le départ est au centre du la première ligne. Le parcours est celui du cavalier S S-E. Si la case est occupée, on place le nombre à un pas de Tour Sud. La case de départ peut varier de même que le parcours du cavalier qui peut se déplacer sur huit cases distinctes, à partir d'une case fixée.



Il était intéressant de généraliser ces méthodes qui, en fait, se ressemblent beaucoup. J'ai donc entrepris de créer un programme informatique capable d'envisager toutes les possibilités pour la position de départ, tous les parcours réguliers possibles et tous les changements de rythme possibles si la case est déjà occupée. Toutes les cases de départ sont envisageables successivement et le nombre 1 y est placé. On choisit ensuite un parcours (par exemple : 2 cases vers la droite et trois vers le bas) en imaginant que le carré est entouré de quatre autres qui lui sont identiques et contigus, situés en haut, en bas, à gauche et à droite. Dans le cas de l'exemple ci-dessus, le nombre 2 est placé dans la deuxième colonne à l'est et la troisième ligne au sud de celle occupée par le 1, et ainsi de suite pour 3, 4, etc... Mais, après un certain nombre de placements, généralement 5, on tombe sur une case déjà occupée par le $i^{ème}$ nombre : il convient alors de changer de rythme en plaçant le $(i + 1)^{ème}$ nombre dans l'une des cases libres, par exemple dans une case sud du $i^{ème}$, puis on reprend la marche régulière définie précédemment. Il est évident que le nombre de combinaisons est grand, mais le carré étant entouré sur lui-même selon deux axes, l'un horizontal et l'autre vertical - penser à l'écran LOGO -, on retrouve rapidement des possibilités déjà envisagées : par exemple, descendre de 6 cases revient à descendre d'une seulement.

Voici deux carrés construits selon cette méthode :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 25 | 9 | 18 | 2 |
| 3 | 12 | 21 | 10 | 19 |
| 20 | 4 | 13 | 22 | 6 |
| 7 | 16 | 5 | 14 | 23 |
| 24 | 8 | 17 | 1 | 15 |

Parcours régulier : 1 Sud - 1 Est

Changement de rythme : 2 Est - 4 Sud

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 15 | 17 | 24 |
| 20 | 22 | 4 | 6 | 13 |
| 9 | 11 | 18 | 25 | 2 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 12 | 19 | 21 | 3 | 10 |

4 Est - 2 Sud

2 Est - 3 Sud.

Le traitement est donc différent de celui mis en œuvre lors de la construction systématique des carrés 4 × 4, dans la mesure où je n'utilise pas de suites de cinq nombres dont la somme soit égale à la constante magique 65, mais où les nombres de 1 à 25 sont placés consécutivement les uns aux autres dans l'ordre croissant.

La méthode donne 184 carrés de 5 × 5 soit 1 472 en tout. C'est très peu, ne serait-ce qu'en comparaison avec le total des carrés 4 × 4.

**3. Et si les carrés ne sont pas réguliers ?**

Voici un carré d'ordre 5 qui ne peut être construit à l'aide de la méthode précédente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 19 | 20 | 23 |
| 18 | 16 | 9 | 14 | 8 |
| 21 | 11 | 13 | 15 | 5 |
| 22 | 12 | 17 | 10 | 4 |
| 3 | 24 | 7 | 6 | 25 |

Il convient donc de chercher une méthode de construction qui permette d'obtenir l'ensemble des carrés. Elle est basée sur l'arithmétique des carrés $5 \times 5$.

**4. Arithmétique des carrés $5 \times 5$.**

Soit le carré suivant :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
| $f$ | $g$ | $h$ | $i$ | $j$ |
| $k$ | $l$ | $m$ | $n$ | $o$ |
| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $t$ |
| $u$ | $v$ | $w$ | $x$ | $y$ |

On écrit d'abord les égalités entre les sommes des lignes, colonnes et diagonales qui valent la constante magique 65.

Par combinaisons linéaires de ces égalités, on montre facilement que :

$c + w = l + n$ $\qquad h + r = k + o$

$a + y = i + q$ $\qquad u + e = g + s$

$g + i + m + q + s = 65$ $\qquad a + e + m + u + y = 65$

$c + k + m + o + w = 65$ $\qquad h + l + m + n + r = 65$

$b + d + f + j + p + t + v + x = 65 + 3m$

$b + d + v + x = 65 + m - c - w$

$f + j + p + t = 65 + m - h - r$

carré $3 \times 3$ central = 65 + somme des coins.

**5. Utilisation de cette arithmétique.**

Il existe 1 394 suites croissantes de 5 nombres inférieurs ou égaux à 25 et dont la somme est 65. Par permutations, elles donnent naissance à 167 280 suites. En raison de ce grand nombre, le calcul n'est possible que si on impose un minimum de valeurs. J'ai choisi de *fixer le contenu des cases de la première colonne*, soit $a$, $f$, $k$, $p$, $u$ de somme 65 en puisant dans ce stock de suites et *le contenu de la case centrale* $m$ sans répétition avec l'une des cases de la première colonne.

Le calcul se déroule ensuite dans l'ordre suivant :

- Calcul de $e$ et $y$ sachant que $e + y = 65 - (a + m + u)$
  on fait varier $e$ de 1 à $65 - (a + m + u) - 1$ d'où l'on déduit $y$.
- Calcul de $i$ et $q$ sachant que $i + q = a + y$
  $i$ varie de 1 à $(a + y - 1)$, d'où l'on déduit $q$.
- Calcul de $g$ et $s$ sachant que $g + s = e + u$
  $g$ varie de 1 à $(e + u - 1)$ d'où l'on déduit $s$.
- On fixe $c$ qui peut prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et 25 sans répétition avec celles déjà utilisées.
- Calcul de $o$ et $w$ sachant que $o + w = 65 - (c + m + k)$.
- Calcul de $l$ et $n$ sachant que $l + n = c + w$.
- Calcul de $h$ et $r$ sachant que $h + r = k + o$.
- Calcul de $j$ dans la ligne 2.
  Calcul de $t$ dans la ligne 4 et vérification dans la colonne 5.
- On vérifie ensuite que $f + h + p + r + t$ égale la somme des nombres non encore placés.
  On remplace $b$ par un des nombres libre,
  on déduit $b$ dans la ligne 1.
- Calcul de $v$ et $x$ respectivement dans les colonnes 2 et 4.
- On vérifie que la somme des nombres de la ligne 5 vaut 65. Si cette condition est remplie, le carré est magique et il est édité.

Il est évident qu'à chaque affectation de case, la valeur affectée l'est sans répétition avec celles déjà en place. Le programme informatique écrit en Pascal donne rapidement des résultats intéressants : par exemple, si la première colonne contient les nombres 15, 24, 8, 17 et 1, il existe 1 626 carrés différents calculés en 10 minutes par valeur de la case centrale.

*Une autre méthode de contruction peut être envisagée :* construction systématique.

Considérons les 1 394 suites croissantes de 5 nombres et de somme 65. Parmi celles-ci, nous allons choisir celles qui contiennent un nombre donné, par exemple 1. On fabrique toutes ces suites, au nombre de 244, dans lesquelles 1 est placé en première position, du type (1, $a$, $b$, $c$, $d$). Ces suites sont stockées dans un fichier à accès direct. On fait de même pour celles contenant 2, 3, 4, 5, 6, etc. Chacune de ces suites en donne 24 autres par permutations.

Le fichier étant constitué, on place 1 au centre du carré et les quatre autres nombres aux quatre coins. En utilisant les symétries et les permutations circulaires, on trouve trois manières de placer ces quatre nombres, soit : $a$, $b$, $c$, $d$ et $a$, $c$, $d$, $b$ et $a$, $c$, $b$, $d$.

Par permutations circulaires et symétries, ces trois manières redonnent les 24 arrangements de quatre nombres. On fixe donc les sommets à partir de la suite n°1 du fichier et on entreprend de fabriquer la croix centrale du carré, c'est-à-dire de fixer les valeurs de $h$, $l$, $n$ et $r$, sans répétition avec les valeurs des cases déjà affectées, en puisant dans le stock ; on essaie la suite n°2 et si elle ne convient pas, on passe à la suivante, et ainsi de suite.

Il reste ensuite à compléter la colonne 3, la ligne 3 et les deux diagonales en considérant les paires de nombres qui complètent ceux déjà fixés pour donner 65 sans répétition. L'ossature du carré est ainsi construite. Il fait maintenant trouver les valeurs de $b$, $d$, $f$, $j$, $p$, $t$, $v$ et $x$ en procédant en deux étapes successives :

Sachant que $b + d + v + x = 65 + m - l - n$, on calcule la valeur de cette somme. Puis, pour les valeurs variant de 1 à 25, on fixe $b$. Il s'en déduit $d$, $v$ et $x$ dans la ligne 1, la colonne 4 et enfin la ligne 4 et l'on vérifie que la colonne 2 a une somme de 35. Procéder de la même manière pour calculer $f$, $j$, $p$ et $t$ en faisant varier $f$, d'où se déduisent les trois dernières valeurs. On termine en vérifiant si la colonne 1 est correcte. Si oui, le carré est complet et il est édité.

Ainsi, on peut obtenir tous les carrés possibles ayant les mêmes sommets, à condition d'être très patient, car le travail machine peut durer plusieurs jours pour quatre coins fixés. De cette manière, en utilisant un certain nombre d'ordinateurs très puissants, il serait possible, non seulement de savoir combien il existe de carrés, mais de les éditer tous.

Avis aux amateurs !...

Que voilà un beau défi !

## Bibliographie succincte :


Warusfel, A., *Les nombres et leur mystère*, Edit. le Seuil, collection «Points sciences».

Groizard, J.-M., *Algèbre des carrés magiques*, A.P.M.E.P. n°55, 1984.

Relouze, Glaymann, Haug, Hertz, *Carrés magiques*, A.P.M.E.P. n°10, 1975.

Chaboche, P.X., *Vie et mystère des nombres*, Edit. Albin Michel, «Les chemins de l'impossible».

Berloquin, P., Revue Science et Vie n°612, 621, 645, 702, 704, 711, 718, 775 «Rubrique jeux et paradoxes».

Bouteloup, J., *Carrés magiques*, Edit. du Choix, 1991.

Chabert et al., *Histoires d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin, (à paraître, Janvier 1994).


| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 3 | 2 | 16 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 1 | 15 | 14 | 4 |

Le carré de Jupiter

*Dürer : La Mélancolie (1514, gravure sur-cuivre)*