Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes» ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.) en mettant votre nom :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 225 (Jacques et Pierre AMON, LIMOGES).
Soient $a_1, a_2 \dots a_n$, n réels strictement positifs.
Pour $1 \le k \le n$, on note P_k la moyenne arithmétique des produits k à k de ces réels :

$$P_k = \frac{1}{C_n^k} \sum_{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$$

Montrer que, pour tout k compris entre 2 et $n-1$, $P_{k-1} P_{k+1} \le P_k^2$, et que pour $1 \le k \le n$, la suite $u_k = P_k^{1/k}$ est décroissante.
(u_1 = moyenne arithmétique et u_n = moyenne géométrique des n réels $a_1, a_2, \dots a_n$).

ÉNONCÉ N°226 (Marie-Laure CHAILLOUT, SARCELLES).
Déterminer l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, continues en un point et vérifiant, a étant un paramètre réel,

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \qquad f(x+y) + f(x-y) = af(x)f(y)$$

ÉNONCÉ N°227 (Igor CHARIGUINE, MOSCOU).

Soient α et β deux cercles situés dans un même plan, et qui se coupent en deux points A et B. La tangente en A au cercle β recoupe le cercle α en C, et la tangente en A au cercle α recoupe le cercle β en D. La droite (CD) recoupe le cercle α en un point M distinct de B.Montrer que la droite (MB) coupe la corde $[AD]$ en son milieu.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°209 (François LO JACOMO, Paris)

Montrer que pour tout entier $q \geq 1$ et pour tout réel y, il existe une infinité de réels x tels que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n^q+1}\right) = y$.

Quelle est la plus petite solution $x>0$ lorsque $q = 2$ et $y = 3$?

SOLUTION

Cet énoncé ressemble à un problème plus classique : prouver que la fonction

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ est non bornée sur $\mathbf{R}$.

En effet, il est clair que, la convergence de la série étant uniforme sur tout compact, la fonction somme $f(x)$ est continue, et donc, dire qu'elle prend des valeurs supérieures à A et des valeurs inférieures à $-A$ pour tout $A>0$ revient à dire qu'elle prend une infinité de fois toute valeur y : aussi grand que soit $B>0$, on peut choisir $A > |y|$ suffisamment grand pour que $f(x)$ ne prenne pas de valeur supérieure à A ni inférieure à $-A$ sur $[0 , B]$; donc $\exists x_1>B$ tel que $f(x_1)>A$,$\exists x_2>B$ tel que $f(x_2) < -A$ d'où $\exists x$ compris entre x_1 et x_2 $(x > B)$ tel que $f(x) = y$.

M.VIDIANI signale que ce problème a été posé au CAPES 1983, et fournit une photocopie d'article démontrant le résultat de manière assez rapide pour ceux qui maîtrisent bien les fonctions presque périodiques. Pour les autres, la démonstration ci-dessous présente l'intérêt de faire appel à des techniques très puissantes bien qu'élémentaires.

Tout d'abord, pour des fonctions de ce genre, on ne peut pas dire grand-chose d'une valeur particulière, mais on peut dire beaucoup plus d'une *valeur moyenne*, par exemple de : $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k)$ et cela peut suffire, car, si une telle moyenne est supérieure à A, l'un au moins des $f(x_k)$ est supérieur à A. Il reste à bien choisir les x_k pour faire apparaître, dans cette valeur moyenne, les propriétés connues des sommes de sinus, notamment le fait que

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{m} \sin(4k+1)^u = \begin{cases} m & \text{si } \sin u = 1 \\ -m \text{ si } \sin u = -1 & \\ 0 & \text{si } \sin u = 0 \\ \dfrac{\cos 3u - \cos(4m+3)u}{2\sin 2u} & \text{sinon} \end{cases}$$

(car $\cos(4k-1)u - \cos(4k+3)u = 2\sin 2u \sin(4k+1)u$))

En d'autres termes, cette somme est proportionnelle à m si $\sin u = \pm 1$, mais elle est majorée *indépendamment* de m sinon.

Il va donc falloir d'une part se ramener à des sommes finies pour permuter librement les sommations dans le calcul de la valeur moyenne, d'autre part bien choisir x_0 et m de sorte que, parmi les $S_m(u)$ $\left(u = \frac{x_0}{n^q+1}\right)$, beaucoup soient égaux à m et aucun à $-m$, et que m soit suffisamment grand pour que soient négligeables les $S_m(u)$ qui ne sont pas proportionnels à m.

Pour commencer, ramenons-nous à des sommes finies.

En remarquant que, quels que soient a et t,

$$\left|\frac{\sin t}{t} - \frac{\sin a}{a}\right| = \left|\left(\frac{\sin t - \sin a}{a}\right) - \left(\frac{t-a}{a}\right)\frac{\sin t}{t}\right| \leq 2\left|\frac{t-a}{a}\right| \text{ on obtient :}$$

$$\left|\int_{a-h}^{a+h'} \frac{\sin t}{t}\,dt - (h+h')\frac{\sin a}{a}\right| \leq \frac{h^2+h'^2}{a}$$

et donc, si l'on pose $a_n = \frac{x}{n^q+1}$ et $a_n - h_n = a_{n+1} + h'_{n+1} = \frac{x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^q+1}$,

$$\left|\int_0^{a_N-h_N} \frac{\sin t}{t}\,dt - q\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n^q+1}\right)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty}\left|h_n + h'_n - \frac{qa_n}{n}\right| + \left(\frac{h_n^2+h'^2_n}{a_n}\right)$$

Or, l'intégrale est majorée par une constante C_1 (voisine de 2), qui ne dépend donc ni de x ni de N. Majorer proprement le membre de droite est pénible, mais c'est indispensable pour la suite ; on laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il est majoré par : $C_2 q \frac{x}{N^{q+1}}$ si bien que:

$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n^q+1}\right) \right| \leq \frac{C_1}{q} + \frac{C_2 x}{N^{q+1}}$ et la valeur moyenne cherchée

$F_m(x_0) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x_k}{n^q+1} \right)$ diffère de la somme finie :

$F_{m,N}(x_0) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sin \frac{x_k}{n^q+1} \right)$ d'au plus $\frac{C_1}{q} + \frac{C_2}{mN^{q+1}} \sum_{k=1}^{m} x_k$ c'est-à-dire, si $x_k = (4k+1)x_0$, si $N > x_0$ et si $m = N^q$, d'au plus une constante C_3.

Or, $F_{m,N}(x_0) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{mn} S_m\left(\frac{x_0}{n^q+1}\right)$ après permutation des sommations, S_m désignant la somme de sinus définie précédemment.

Choisissons x_0 multiple de $\pi/2$: si $\frac{x_0}{n^q+1}$ n'est pas, lui, un multiple de $\pi/2$, la différence entre $\frac{x_0}{n^q+1}$ et le plus proche multiple de $\pi/2$ est un multiple de $\frac{\pi/2}{n^q+1}$ de sorte que $\left| S_m\left(\frac{x_0}{n^q+1}\right) \right| \leq \left| \frac{1}{\sin \frac{2x_0}{n^q+1}} \right| \leq \frac{n^q+1}{2}$ et donc la somme, dans $F_{m,N}(x)$, des termes «négligeables», c'est-à-dire des $\frac{1}{nm} S_m\left(\frac{x_0}{n^q+1}\right)$ lorsque $\frac{x_0}{n^q+1}$ n'est pas multiple de $\pi/2$, est majorée à peu de choses près par $\frac{N^q}{2qm}$, lui-même majoré par une constante si $m = N^q$.

Si bien que, finalement, en posant : $\varepsilon_n = \sin \dfrac{x_0}{n^q+1}$ lorsque $\dfrac{x_0}{n^q+1}$ est multiple de $\pi/2$ (donc lorsque $S_m = m\varepsilon_n$) et $\varepsilon_n = 0$ lorsque $\dfrac{x_0}{n^q+1}$ n'est pas multiple de $\pi/2$, on a : $\left| F_{m,N}(x_0) - \sum_{n=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_n}{n} \right| \leq$ Constante , ce qui implique que $\left| F_m(x_0) - \sum_{n=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_n}{n} \right| \leq$ Constante.

Or, en posant $x_0 = A\pi/2$ et en choisissant convenablement A, $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, positivement ou négativement.

Lorsque $q = 1$, il suffit de prendre A_1 produit des r premiers nombres premiers congrus à 1 modulo 4, et $A_2 = 3A_1$. Tous les diviseurs de A_1 sont congrus à 1 modulo 4, donc les ε_n sont soit nuls soit égaux à (+1). Plus précisément, $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_n}{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{5}\right)\left(1+\dfrac{1}{13}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{Pr}\right) - 1$, et si l'on sait que la moitié des nombres premiers, en moyenne, sont congrus à 1 modulo 4 (théorème de Dirichlet), on parvient à minorer $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ par un $C\sqrt{\operatorname{Log} r}$ qui peut être rendu aussi grand que l'on veut. Si l'on remplace A_1 par A_2, certains ε_n seront égaux à 1, d'autres à (−1), mais on aura $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_n}{n+1} = -\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\left(1+\dfrac{1}{13}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{Pr}\right) + 1$ de sorte que $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ prendra aussi des valeurs proches de $-\infty$.

Lorsque $q \geq 2$, on prendra $A_1 = \underset{\substack{n \leq r \\ n \text{ pair}}}{\mathrm{PPCM}} (n^q+1)$. Comme tous les $n^q + 1$

sont $\equiv 1$ (mod.4), chaque fois que A_1 sera divisible par n^q+1, le quotient sera $\equiv A_1$ (mod.4), et donc les ε_n non nuls seront tous de même signe. Et, pour $n \leq r$, comme A_1 est divisible par n^q+1 (le quotient étant impair) $\varepsilon_n \neq 0$ de sorte que $\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n}\right| \geq \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n} > \text{Log}\, r$.

Si je remplace A_1 par $3A_1$, cette minoration reste valable, mais $\sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n}$ change de signe, on peut donc rendre $F_m(x_0)$ aussi proche que l'on veut de $+\infty$ et de $-\infty$, et donc la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n^q+1}\right)$ dont $F_m(x_0)$ est une valeur moyenne prend nécessairement des valeurs aussi proches que l'on veut de $+\infty$ et de $-\infty$, ce qui achève la démonstration.

Notons qu'à la partie analytique de la démonstration consistant à majorer par une constante $\left|F_m(x_0) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n}\right|$, qui reste valable si l'on remplace n^q+1 par n'importe quel polynôme de n, s'ajoute une partie proprement arithmétique prouvant que $\sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n}$ n'est pas borné. Et l'on peut se demander si cette partie arithmétique se généralise pour des fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{P(n)}$ $P(n)$ étant un polynôme autre que n^q+1.

Dans le cas, par exemple où $P(n) = n^2 - n$, on ne parvient pas à minorer les $\left|\sum \frac{\varepsilon_n}{n}\right|$ définis ci-dessus, car ε_n prendra, quand il est non nul, aléatoirement la valeur (+1) ou la valeur (−1), et ce, quel que soit le choix de A. Mais une astuce permet de se sortir de ce mauvais pas : si l'on remarque que $n^2 - n$, est, pour tout n, congru à 0, 1 ou 2 modulo 5, en remplaçant

$\sum_{k=1}^{m} \sin \frac{(4k+1)x_0}{n^2-n}$ par un $\sum_{k=1}^{m} \sin \frac{(5k+1)x_0}{n^2-n}$, on trouvera des x_0 tels que ces sommes soient ou bien majorées indépendamment de m, ou bien proportionnelles à m mais strictement positives, ce qui permet de reprendre l'essentiel de l'argumentation précédente.

Une telle astuce convient-elle à tous les polynômes $P(n)$? C'est possible. Mais il est également possible que le résultat soit vrai pour tout polynôme $P(n)$ sans que cette méthode s'applique à tous les polynômes $P(n)$. On espère toujours, pour un problème donné, trouver une démonstration pour laquelle seules fassent exception les valeurs pour lesquelles le résultat à démontrer n'est pas valable. En d'autres termes, une méthode qui ne crée pas de difficulté propre à la méthode et sans rapport avec le problème lui-même. Est-ce toujours faisable ?

Autre remarque : dans la méthode précédente, il n'est pas très difficile d'expliciter les constantes intervenant dans les majorations et minorations. De telles méthodes sont dites «effectives», même si l'on a, le plus souvent, la flemme de calculer effectivement ces constantes. Car enfin, notre but était de démontrer l'existence d'une (infinité de) valeur (s) x telle(s) que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n^q+1}\right) = y$, et nous avons finalement prouvé qu'il existe au moins une telle valeur sur l'intervalle $[0\ ,\ (4m+1)x_0]$, m et x_0 étant explicitables. Il suffit donc d'étudier la fonction sur cet intervalle pour trouver le plus petit x. Seulement les intervalles obtenus par ce genre de méthodes effectives sont souvent démesurés par rapport aux possibilités d'étude de fonction de nos machines, et l'on a de fortes chances de trouver des solutions numériques à ce genre de problèmes dans des intervalles beaucoup plus accessibles que ceux fournis par l'étude théorique. En d'autres termes, la solution mathématique d'un problème, même par des méthodes effectives, et la recherche de solutions numériques, sont deux choses qui n'ont, le plus souvent, aucun rapport.

Personnellement, pour trouver le plus petit x tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n^2+1}\right) = 3$, j'ai d'abord prouvé que la fonction ne pouvait atteindre un maximum y_k

qu'en un point $x_k = (4k+1)\pi + u_k$, vérifiant $\left|\sin \frac{u_k}{2}\right| < \frac{7}{20}$, et qu'en un tel point, $|y_k - f((4k+1)\pi)| < 0{,}0776$. k doit être supérieur ou égal à 4, car

$$f(x) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \sum_{n=7}^{+\infty} \frac{x}{n(n^2-1)} = 2{,}45 + \frac{x}{84}$$

L'inégalité $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ fournit alors :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n^2+1} - \left[\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n^2+1}\right) + \frac{x}{2M} - \frac{x^3}{36M^3}\right]\right| < \varepsilon$$

avec $\varepsilon = 0{,}0003$, si $N \geq \left[\sqrt{\frac{4x}{\pi}}\right]$ et $M = N^2 + N + 1$.

Il reste alors à recenser les $k \geq 4$ tels que

$$\sum_{n=1}^{[2\sqrt{4k+1}]} \frac{1}{n} \sin \frac{(4k+1)\pi}{n^2+1} + \frac{(4k+1)\pi}{2M} - \frac{[(4k+1)\pi]^3}{36M^3} > 2{,}9221$$

avec $M = 8k + 3 + 2\sqrt{4k+1}$, et c'est l'ordinateur qui s'en charge.

Finalement, la solution cherchée est : $x = 27460{,}54\ldots$ atteinte après 2185 oscillations ! ($x = 8741\pi - 0{,}114\ldots$).

Pierre Barnouin la trouve à l'aide du petit programme suivant (ZBasic).

```
DEFDBL P-Z:H=TIMER:N=251:P=.5/(N*N-N+1):T=16*ATN(1)
:X=T/4:FOR N=251 TO 5000
Y=1./(N*N+1.):Z=Y*Y:U=Z*Y/6./N:V=U*Z/20.:W=V*Z/42.:
Q=Q+U:R=R+V:S=S+W:NEXT
LONG FN Y:Z=X*X:Y=(((R-S*Z)*Z-Q)*Z+P)*X:FOR N=1 TO
250:W=X/(N*N+1.)
   Y=Y+SIN(W)/N:NEXT:IF  Y>2.95  THEN  PRINT
X,Y,TIMER-H"sec"
*END FN:DO:X=X+T:FN Y:UNTIL Y>3:DO:INPUT X:FN
Y:UNTIL X=0

ZBasic Ready
```

```
18613.9364595        2.97092071532        4520 sec
24897.1217595        2.96310857296        6183 sec
25864.7322957        2.96048841862        6440 sec
27460.6613619        3.01762574946        6865 sec
? 27460.5
27460.5              2.9927235502         6895 sec
? 27460.54
27460.54             2.99953472607        6910 sec
? 27460.543
27460.543            3.00002863187        6926 sec
? 0
ZBasic Ready
```

ÉNONCÉ n°210 (Georges COLLOMBAT, Chambéry).

Quel est le volume du solide de l'espace constitué de l'union (non disjointe) de deux cônes de hauteur H, dont chacune des directrices est un même cercle (C) de rayon R, et dont les deux sommets se projettent verticalement en deux points diamétralement opposés du cercle (C)?

SOLUTION de Dominique DAVION (Chambéry).

Le solide est la juxtaposition de quatre cônes deux à deux symétriques. Deux ont pour base un demi-disque de rayon R et pour hauteur H ; deux ont pour base un segment de parabole inscrit dans un rectangle de côtés $2R$ et $\frac{1}{2}H$ (l'aire du segment de parabole est les deux tiers de l'aire du rectangle) et pour hauteur R. On a $V_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi R^2}{2}H$, $V_2 = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}2R\frac{H}{2}\right]R$ soit

$$V = 2(V_1 + V_2) = HR^2\left[\frac{\pi}{3} + \frac{4}{9}\right];$$

Autres solutions:

Michel BIGOT (Equeurdeville), Guy BOUCHER (Paris), Philippe DELEHAM (Reims), A.FLAMBARD (Versailles), Michel GARITTE (Armentières), Philippe JACQUEMIER (Revel), Michèle MALLÉUS (Chatenay Malabry), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), Marguerite PONCHAUX (Lille), R.RAYNAUD (Digne), Michel TANGUY (Quimper), plus une solution fausse et deux solutions justes, mais anonymes.

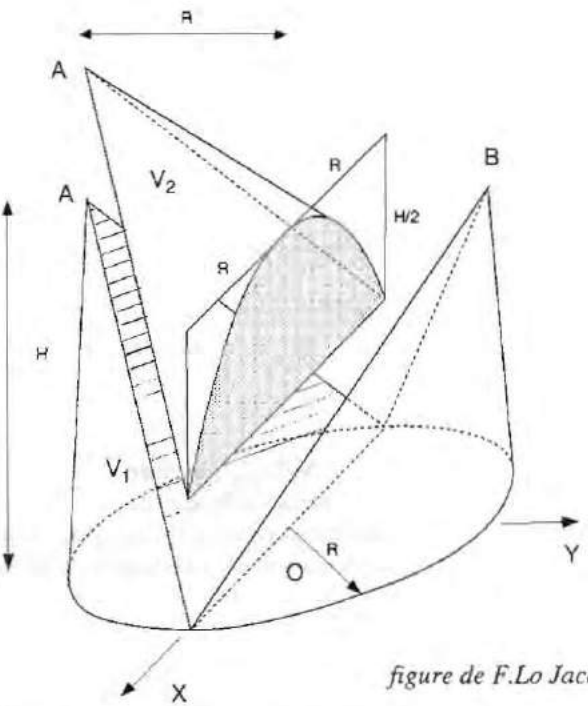

figure de F.Lo Jacomo.

Remarques :
Plusieurs lecteurs ont critiqué l'emploi du mot «verticalement».
Ceci étant, pour ceux qui ont calculé le volume par intégration, il semble plus facile de sectionner le bonnet d'âne par des plans verticaux (pardon ! orthogonaux à *(AB)*, *A* et *B* étant les sommets des cônes), plans qui coupent le volume selon une parabole inscrite dans un rectangle de côtés $\sqrt{R^2 - y^2}$ et $\left(\frac{R + |y|}{2R}\right)H$, comme l'ont fait Michel Garitte, Philippe Jacquemier, Marguerite Ponchaux et R. Raynaud, que de sectionner ce volume par des plans horizontaux.

ÉNONCÉ N° 211 (François Lo JACOMO, Paris).

A quelle condition sur les entiers a et d (vérifiant $1 \leq a \leq d$) existe-t-il b et c (entiers ≥ 2) tels que $(ad - bc)$ soit strictement positif et divisible par $(a + b + c + d)$?

a, b, c étant fixés (entiers ≥ 2), comment déterminer tous les entiers $d \geq 2$ tels que $(ad - bc)$ soit strictement positif et divisible par $(a + b + c + d)$?

SOLUTION de Pierre SAMUEL (Bourg la Reine).

1- Soient a et d des entiers tels que $1 \leq a \leq d$. On cherche s'il existe des entiers $b \geq 2$ et $c \geq 2$ tels que $ad - bc$ soit strictement positif et multiple de $a + b + c + d$. Cela revient à dire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $ad - bc = k(a + b + c + d)$, ce qui s'écrit aussi

(1) $$(a - k)(d - k) = (b + k)(c + k).$$

Une solution simplette est de prendre $b + k = a - k$, $c + k = d - k$, c'est-à-dire $b = a - 2k$, $c = d - 2k$. Les conditions $b \geq 2$, $c \geq 2$ sont remplies si $a - 2k \geq 2$, c'est-à-dire $2k \leq a - 2$. Ceci est possible dès que $a \geq 4$ (avec plusieurs valeurs de k disponibles dès que $a \geq 6$).

Restent les petites valeurs de a : $a = 3, 2, 1$. Pour $a = 3$, (1) s'écrit $(3 - k)(d - k) = (b + k)(c + k)$ et implique $k = 1$ ou $k = 2$. Si $k = 1$, (1) devient $2(d - 1) = (b + 1)(c + 1)$. Les conditions $b \geq 2$, $c \geq 2$ demandent $2(d - 1) \geq 9$, soit $d \geq 6$. Alors $2(d - 1)$ doit être un produit de deux facteurs supérieurs à 3, ce qui est possible, sauf si $d - 1$ est premier. Ainsi $d = 7$, $d = 9$, $d = 10$ conviennent, mais pas $d = 6$, ni $d = 8$.

Pour $a = 3$ et $k = 2$, (1) s'écrit $d - 2 = (b + 2)(c + 2)$, ce qui exige $d \geq 18$. Alors $d - 2$ doit être un produit de deux facteurs supérieurs à 4. Voyons si l'on peut ainsi «sauver» des valeurs de d où $p = d - 1$ est premier. Alors $d - 2$ est pair, $d - 2 = 2q$ et notre condition est satisfaite pourvu que q ne soit pas premier et admettre un diviseur ≥ 4 (ce qui exclut $q = 9$).

Pour $a = 2$, on a nécessairement $k = 1$ et (1) s'écrit $d - 1 = (b + 1)(c + 1)$, ce qui exige $d \geq 10$. Alors $d - 1$ doit être un produit de deux facteurs supérieurs à 3. Cela est possible sauf si $d - 1$ est premier ou est de la forme $2p'$ avec p' premier.

Enfin, par (1), il n'y a pas de solution pour $a = 1$.

En résumé, on peut trouver les entiers b et c **dans les cas suivants :**

1) $a \geq 4$;

2) $a = 3$, $d \geq 6$, $d - 1$ non premier ;

3) $a = 3$, $d \geq 18$, $d - 1 = p$ premier, $d - 2 = 2q$ avec q non premier et $\neq 9$;

4) $a = 2$, $d \geq 10$, $d - 1$ ni premier, ni double d'un nombre premier.

Remarque : Les nombres premiers $p = d - 1 = 29, 31, 37, 41, 43$ satisfont la seconde condition de 3), mais $p = 19, 23, 47, 59, 83, 107$ ne la satisfont pas. J'ignore s'il y a une infinité de tels nombres premiers p tels que $p - 1$ soit le double d'un nombre premier (ou encore de nombres premiers p' tels que $2p' + 1$ soit premier).

2- Ici, on se fixe les entiers $a, b, c \geq 2$ et l'on cherche s'il existe un entier $d \geq 2$ tel que $ad - bc$ soit strictement positif et multiple de $a + b + c + d$. Comme dans I, cela signifie qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que

(2) $(a - k)d = (a + b + c)k + bc.$

Cela demande que l'on ait $0 < k < a$. Passons à $x = a - k$, qui doit être un entier tel que $1 \leq x \leq a - 1$. Alors d satisfait à
$dx = (a + b + c)(a - x) + bc = -x(a + b + c) + (a + b)(a + c)$.
Ceci donne une valeur entière de d si et seulement si x est un diviseur de $(a + b)(a + c)$ (par exemple $x = 1$). Alors, d est donné par

(3) $$d = x^{-1}(a + b)(a + c) - (a + b + c).$$

La condition $d \geq 2$ équivaut alors à $x \leq \dfrac{(a+b)(a+c)}{(a+b+c+2)}$. Or, l'inégalité $(a + b)(a + c) \geq a + b + c + 2$ équivaut à :
$a^2 - a - 2 + (a - 1)(b + c) + bc \geq 0$, est satisfaite puisque $a \geq 2$. Ainsi, au moins la valeur $x = 1$ convient.
La recette est donc la suivante : on prend les diviseurs x de $(a + b)(a + c)$ qui sont inférieurs à $(a - 1)$ et à $\dfrac{(a+b)(a+c)}{(a+b+c+2)}$, et, pour chacun, on applique (3).
Exemple :
- Prenons $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$. Alors $(a + b)(a + c) = 7 \times 8 = 56$ et $a + b + c + 2 = 14$. Les diviseurs x de 56 qui sont inférieurs à $56/14 = 4$ et à $a - 1 = 2$ sont $x = 1$ et $x = 2$. Les valeurs correspondantes de d sont $d = 56 - 12 = 44$ et $d = 28 - 12 = 16$.
- Prenons $a = 7$, $b = 2$, $c = 3$. Alors $(a + b)(a + c) = 9 \times 10 = 90$ et $a + b + c + 2 = 14$. Les diviseurs x de 90 qui sont inférieurs à $90/14 = 6{,}4$ et à $a - 1 = 6$ sont $x = 1, 2, 3, 5$, et 6. Les valeurs correspondantes de d sont $d = 90 - 12 = 78$, $d = 45 - 12 = 33$, $d = 30 - 12 = 18$, $d = 18 - 12 = 6$ et $d = 15 - 12 = 3$.

Autres solutions :
Pierre BARNOUIN (Cabris), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Charles NOTARI (Noé), Marguerite PONCHAUX (Lille) et une solution fausse.

Remarque :
Cet énoncé illustre assez bien la notion de contexte cognitif, bien connue des traducteurs. Partis dans la foulée de la première question qui, de fait, nécessite un certain calcul, on ne remarque pas que la seconde question n'a aucun rapport avec la première et peut se résoudre très brièvement.
Comme $ad - bc = a(a + b + c + d) - (a + b)(a + c)$, $ad - bc$ est divisible par $(a + b + c + d)$ si et seulement si $(a + b)(a + c)$ est divisible par $(a + b + c\ d)$, et il est strictement positif si et seulement si le quotient

$x = \dfrac{(a+b)(a+c)}{a+b+c+d}$ est strictement inférieur à a.

Les d cherchés s'obtiennent donc à partir des diviseurs q de $(a + b)(a + c)$ strictement inférieurs à a, par la formule : $d = \dfrac{(a+b)(a+c)}{x} - (a+b+c)$.

ÉNONCÉ N° 212 (Pierre BARNOUIN, Cabris).

Soient a et b deux entiers, et p un diviseur premier de $(a^2 + ab + b^2)$ différent de 3. Montrer que : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p^3}$.

Que peut-on dire de plus de l'équation $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p^k}$?

SOLUTION (Synthèse des solutions reçues).

Après avoir résolu le cas trivial $p = 2$, et celui où p divise a ou b, on est ramené, en laissant de côté momentanément la question subsidiaire, à deux problèmes classiques, mais distincts :

1- A quelle condition un nombre premier p peut-il diviser $a^2 + ab + b^2$ sans diviser a ni b ?

2- Par quelle puissance de $a^2 + ab + b^2$ le polynôme $(a+b)^p - (a^p + b^p)$ est-il divisible ?

Pour la première question, les lecteurs ont fait appel à des résultats certes connus, mais présupposant une connaissance de l'anneau euclidien $\mathbf{Z}[j]$ ou des résidus quadratiques, par exemple le théorème cité par Jean Itard dans le «Que sais-je ?» *Arithmétique et théorie des nombres* : si x et y sont premiers entre eux, tout diviseur q de $x^2 + 3y^2$ est lui aussi de la forme $q = u^2 + 3v^2$. En fait, le tout petit théorème de Fermat était amplement suffisant : si a n'est pas congru à b modulo p, a^{p-2} n'est pas non plus congru à b^{p-2} modulo p, vu que $a^{p-1} \equiv 1 \equiv b^{p-1} \pmod{p}$; donc si $p - 2$ est divisible par 3, a^3 n'est pas congru à b^3 modulo p, et p ne divise pas $a^2 + ab + b^2$. Dès lors, pour que p divise $a^2 + ab + b^2$ sans diviser ni a ni b, il faut soit que $a \equiv b \pmod{p}$ (et que p divise $3a^2$), soit que $p - 2$ ne soit pas divisible par 3, donc, en définitive : soit que $p = 3$ (cas exclu par l'énoncé), soit que $p \equiv 1 \pmod{6}$.

Quant à la deuxième question, Mohammed IGUIDER (Salé-Maroc) fait appel à une idée intéressante : constatant que, lorsque $q = a^2 + ab + b^2$ et $r = ab(a+b)$, l'équation $t^3 - qt - r = 0$ admet pour racines : $(a + b)$, $(-a)$ et $(-b)$, il écrit, pour chacune de ces trois valeurs de t :

$t^3 = qt + r \Rightarrow t^{6k+1} = (qt + r)^{2k} t$ et il fait la somme, après avoir développé le membre de droite et posé : $S_i = (a+b)^i + (-a)^i + (-b)^i$

$$S_{6k+1} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^{i} q^{i} r^{2k-i} S_{i+1}$$

Or, $S_1 = 0$, $S_2 = 2q$ et $S_3 = 3r$, si bien que la somme des trois premiers termes vaut : $k(6k+1)q^2r^{2k-1}$, et tous les termes suivants (pour $i \geq 3$) sont divisibles par q^3, d'où le résultat.

Mais je remercie Philippe DELEHAM (Reims) de m'avoir transmis la solution d'Augustin CAUCHY (1839)*, dont s'inspirent toutes les autres solutions reçues (n est supposé impair) :

Si l'on retranche la somme des puissances $n^{ièmes}$ de deux inconnues x, y de la puissance $n^{ième}$ de leur somme $x + y$, le reste sera divisible algébriquement, non seulement par le produit $nxy(x+y)$, comme on le reconnaît aisément ; mais encore, pour des valeurs de n supérieures à 3, par le trinôme $x^2 + xy + y^2 = \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$ et même par le carré de ce trinôme, lorsque n, divisé par 6, donnera pour reste l'unité [...]

Post-scriptum. - On démontre aisément le nouveau théorème énoncé dans ce Rapport de la manière suivante :

Soient 1, α, β les trois racines de l'équation $x^3 = 1$.

On aura, non seulement $1 + \alpha + \beta = 0$, mais encore, en supposant n non divisible par 3, (1) $1 + \alpha^n + \beta^n = 0$, et, de plus $x^2 + xy + y^2 = (x - \alpha y)(x - \beta y)$.

Cela posé, je dis que, si l'on prend pour n un nombre premier impair supérieur à 3, l'expression (2) $(x + y)^n - x^n - y^n$ sera divisible par le trinôme $x^2 + xy + y^2$, et même par le carré de ce trinôme, lorsque n divisé par 3 donnera pour reste l'unité. Effectivement, pour établir cette proposition, il suffira de faire voir qu'en supposant $x = \alpha y$ ou $x = \beta y$, on réduit à zéro l'expression (2), et de plus sa dérivée relative à x, savoir (3) $n[(x + y)^{n-1} - x^{n-1}]$, lorsque n divisé par 6 donnera 1 pour reste. Or, lorsqu'on suppose, par exemple $x = \alpha y$, les expressions (2) et (3) deviennent $(1 + \alpha)^n - 1 - \alpha^n = -1 - \alpha^n + (-\beta)^n$, $n[(1 + \alpha)^{n-1} - \alpha^{n-1}] = n[(-\beta)^{n-1} - \alpha^{n-1}]$, et il est clair qu'elles s'évanouissent, la première en vertu de la formule (1), pour les valeurs impaires de n non divisibles par 3 ; la seconde en vertu des formules $\alpha^3 = 1$, $\beta^3 = 1$, pour les valeurs impaires de n, qui, divisées par 3, donnent 1 pour reste.

* extraite des Comptes rendus de l'Académie des Sciences, à propos du mémoire de Lamé sur $x^7 + y^7 = z^7$.

Quant à la question subsidiaire, c'est en fait un problème ouvert que j'aurais pu proposer à la rubrique voisine de notre collègue Robert FERREOL.

Il est clair que si p^α divise a ou b ou $(a + b)$, $p^{\alpha+1}$ divise $S_p = (a + b)^p - a^p - b^p$, et si p^α divise a et b, $p^{\alpha p+1}$divise S_{pj}, de même, si p^α divise $(a^2 + ab + b^2)$, $p^{2\alpha+1}$ divise S_p. Mais la question que je me posais, c'était plutôt la réciproque : peut-on avoir $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p^3}$ sans que p ne divise ni a ni b, ni $(a + b)$, ni $(a^2 + ab + b^2)$? Les explorations informatiques de Pierre BARNOUIN, qui sont à l'origine de cet énoncé, n'ont pas fourni de solutions, et le problème reste ouvert. Et peut-on avoir $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p^k}$, avec $k \geq 4$, sans que p divise ni a ni b, ni $(a + b)$, et sans que p^2 divise $(a^2 + ab + b^2)$?
Je n'avais guère de piste pour aborder ces questions, et la rédaction assez floue de cette seconde partie de l'énoncé n'a guère inspiré les lecteurs - je ne voulais pas poser trop précisément une question sans savoir si elle était effectivement soluble.

Toutefois, en précisant la méthode de Mohammed IGUIDER, on peut prouver la formule suivante, valable pour tout $p \geq 1$

$$(a + b)^p + (-a)^p + (-b)^p = p \sum_{\frac{p}{3} \leq i \leq \frac{p}{2}} \frac{1}{i} \mathrm{C}_i^{p-2i} (a^2 + ab + b^2)^{3i-p} [ab\,(a + b)]^{p-2i}$$

Il en résulte que, si p divise $(a^2 + ab + b^2)$ sans que p^2 divise $(a^2 + ab + b^2)$, alors $(a + b)^p - (a^p + b^p)$ n'est pas divisible par p^4 (p étant premier supérieur à 5), car tous les termes de la somme sont divisibles par p^4, sauf le premier, pour $i = \frac{p+2}{3}$. Mais pour en dire plus à partir de là, il faudrait

étudier plus précisément, dans $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$: $\displaystyle\sum_{\frac{p}{3} \leq i \leq \frac{p}{2}} \mathrm{C}_i^{p-2i} \frac{x^i}{i}$, et voir si cette

somme peut être nulle (dans $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$), avec x non nul.
La formule citée se démontre par récurrence sur p, en écrivant, avec les notations de Mohammed IGUIDER : $S_p = q\,S_{p-2} + r\,S_{p-3}$.

Il suffit de prouver que, pour tous p et $i \geq 1$ (en posant au besoin : $\mathrm{C}_n^k = 0$

lorsque $k < 0$ ou $k > n$), $\frac{p-2}{i-1} C_{i-1}^{p-2i} + \frac{p-3}{i-1} C_{i-1}^{p-2i-1} = \frac{p}{i} C_i^{p-2i}$ pour pouvoir identifier terme à terme, et cela se déduit facilement de :

$$\frac{p-2}{i-1} = \frac{p-2i}{i-1} + 2 \Rightarrow \frac{p-2}{i-1} C_{i-1}^{p-2i} = C_{i-2}^{p-2i-1} + C_{i-1}^{p-2i}$$

Autres solutions :

Edgard DELPLANCHE (Créteil), Denis HARTEMANN (Cayenne), Thierry LEGAY (Fontenay-sous-Bois), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), Marguerite PONCHAUX (Lille), Pierre SAMUEL (Bourg-la-Reine), Michel TANGUY (Quimper).