Interdisciplinarité

Conférence prononcée le 7 janvier 1993 au Palais de la Découverte, organisée par l'Institut de Calcul Mathématique dans le cadre de son "Plan de Promotion de la Recherche". (Version écrite préparée par Patricia AUBRY, ICM)

La vulgarisation mathématique : du Théorème de Pythagore au Mouvement Brownien

Jean Pierre KAHANE
Professeur à l'Université de Paris-Sud à Orsay

La vulgarisation mathématique, les médias ne veulent pas en parler, les mathématiciens non plus er quand ils se mêlent d'essayer de corriger leur image, c'est encore pire. Cependant, au plan mondial, il se passe de bonnes choses : le succès extraordinaire de la revue soviétique *"Kvant"*, des expositions, telles *"Horizons Mathématiques"*, des publications, des séries télévisées, des films, avec une nette accélération depuis trois ans. Les médias ne sont peut-être pas encore "dans le coup", mais les mathématiciens commencent à s'y mettre. Le *Palais de la Découverte*, quant à lui, a de très anciennes traditions en matière de vulgarisation, y compris mathématique ; ce n'est pas le cas de tous les musées du monde.

La France avait un gros retard, mais on a vu paraître bon nombre d'excellents ouvrages de vulgarisation mathématique. Des initiatives ont été prises dans les lycées ; des clubs, des compétitions y ont été organisés. A côté des initiatives individuelles des mathématiciens, il y a aussi de nombreuses initiatives structurelles. A Leeds, en 1989, un colloque international a abouti à une première mise au point mondiale, publiée sous le titre *«Popularization of Mathematics»*. Le Congrès Mathématique Européen à Paris en juillet dernier a consacré toute une partie de son programme au thème général : *"Mathématiques et Société"*, avec une table ronde intitulée : *"Mathématiques et grand public"*. Le prochain Congrès International des Mathématiciens se tiendra à Zurich dans deux ans et pour la première fois une section intégrera les problèmes de vulgarisation. La Société Mathématique de France lance une série de vulgarisation, *"Panorama"*, à l'intention des chercheurs. Il y a grand besoin de cela, car il paraît cent mille articles de mathématiques par an et aucun mathématicien n'a la vue assez large pour prendre connaissance de tout.

Les mathématiciens professionnels, et avant eux les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire ont pris conscience du retard et aussi de l'intérêt du problème de la vulgarisation.

Pour cette conférence, je me suis inspiré du colloque de Leeds. La bonne vulgarisation peut se faire sur tous les sujets, par tous les canaux, pour tous les publics, mais il est bon de savoir à quel public on s'adresse. J'ai à m'adresser à un public divers. Certains auront tout juste le niveau de la Terminale, d'autres sont mathématiciens professionnels et il m'a semblé que le théorème de Pythagore serait un sujet possible pour tout le monde, car il est riche en développements de tous niveaux.

Pythagore a vécu au VI° siècle avant J.C., en même temps de Bouddha (–556 –480) et que Confucius (–555 –479). On sait beaucoup de chose de Bouddba et de Confucius, mais presque rien de Pythagore. La Grèce de Pythagore est une poussière d'îles. Il est né à Samos et s'est installé à Crotone, en Italie méridionale, où il a fondé la première cité Grecque gouvernée par un philosophe, image de la cité Platonicienne. On le connaît par la table de Pythagore, par la gamme de Pythagore et par le théorème de Pythagore. C'est à partir de Platon et d'Aristote que l'on trouve des traces écrites et c'est à partir d'Euclide qu'apparaît l'exposé magistral. Le théorème de Pythagore traduit une expérience ancienne dans cette partie de l'Orient

Méditerranéen. Un millénaire auparavant, le triangle "3, 4, 5" était certainement connu des Babyloniens. Les Egyptiens connaissaient la ficelle qui a 12 de long et que l'on interrompt à 3, puis à 7 pour obtenir les segments 3, 4, 5. Avec cela, on construit le triangle rectangle :

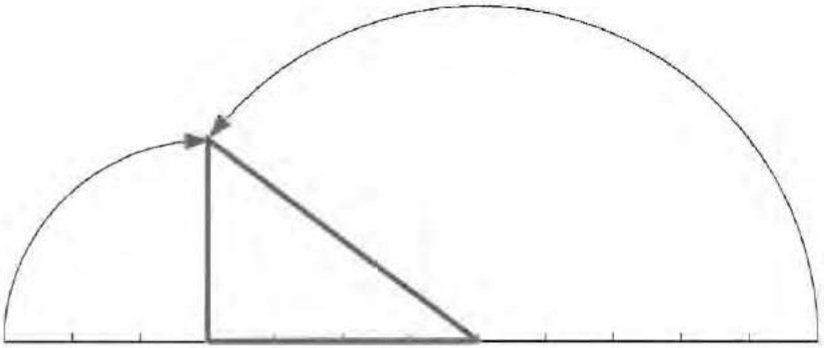


figure 1

Ce triangle leur servait à honorer les dieux Isis et Osiris dont le fils Horus était représenté par l'hypoténuse, et aussi à reconstituer les champs après les inondations annuelles du Nil. La géométrie pour les Egyptiens était la mesure de la terre.

Voici la démonstration donnée par Euclide du Théorème de Pythagore (livre 1, proposition 47).

Deux triangles égaux : ABE et DBC par les cas d'égalité des triangles. Les triangles FBE et DBA ont des aires égales (parce que respectivement égales à celles de ABE et DBC). Donc l'aire du carré $ABDG$ est égale à celle du rectangle $FBEH$. En appliquant le même

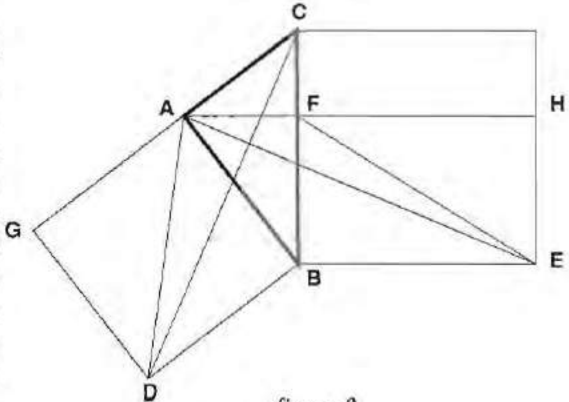


figure 2

raisonnement à l'autre carré et à l'autre rectangle, on obtient : la somme des aires des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit, c'est l'aire du carré construit sur l'hypoténuse.

La démonstration d'Euclide n'utilise pas la théorie des proportions (livre 5 et 6 d'Euclide) et c'était là sa beauté pour les Grecs. Voici maintenant une autre démonstration d'Euclide que j'ai empruntée à un livre de Steinhaus ; on voit bien les découpages et recollages.

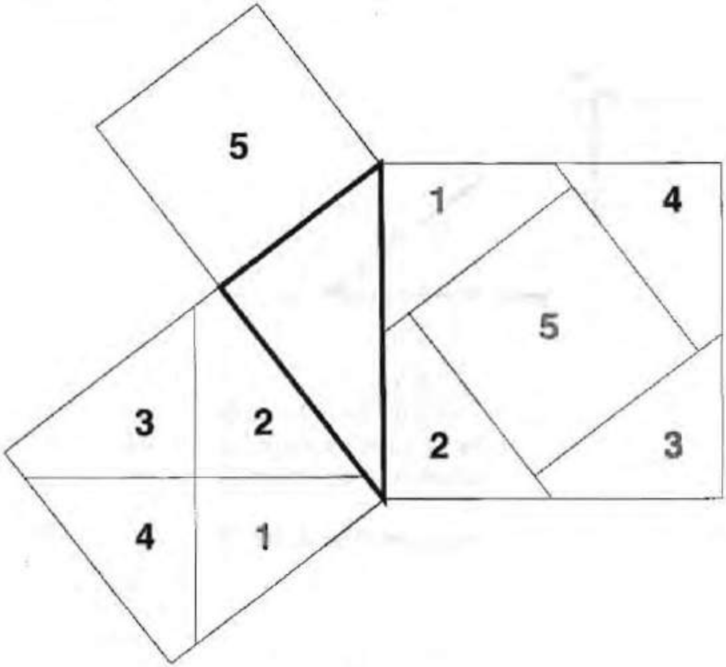


figure 3

Un triangle rectangle a son hypoténuse verticale. On construit un carré sur chaque côté. Le carré construit sur le grand côté de l'angle droit est divisé en quatre quadrilatères au moyen de segments verticaux et horizontaux passant par son centre. On recolle ces quadrilatères à l'intérieur du carré construit sur l'hypoténuse, et ce qui reste est le carré construit snr le petit côté.

Avec des ciseaux, nous avons fait des découpages qui permettent, par des déplacements (ici des translations) de passer d'une figure à l'autre. Cela ne serait pas possible pour un cercle et un carré de même surface, car si l'on découpe le carré, il y aura des parties rectilignes, et si l'on découpe le cercle, il y aura des parties bombées. Mais les mathématiciens disposent d'outils plus élaborés : la théorie des ensembles, l'axiome du choix, qui permettent d'obtenir des morceaux qu'ils appellent "non mesurables".

Avec ces outils, est-il possible de faire une décomposition du cercle et une décomposition du carré de telle manière que l'on passe de l'un à l'autre en déplaçant les morceaux ? C'est un problème posé dans les années 1920, auquel sont attachés les noms de Banach et Tarski. Il est resté non résolu jusqu'en 1990, où un mathématiciens hongrois, Laczkovich, a donné une réponse positive. Il montre que grâce à la théorie des ensembles et à l'axiome du choix, et utilisant de l'arithmétique difficile, on peut diviser le disque et le carré chacun en un nombre fini de morceaux tels que l'on puisse passer des morceaux du disque au morceaux du carré par des translations (différentes pour les différents morceaux). C'est ce qu'on appelle **plaisamment** la quadrature du cercle.(**note en bas de page*)

Revenons au théorème de Pythagore, vu au travers des livres 5 et 6 des Eléments d'Euclide relatifs aux proportions. Une nouvelle démonstration possible (elle n'est pas explicite chez Euclide) utilise des figures semblables.

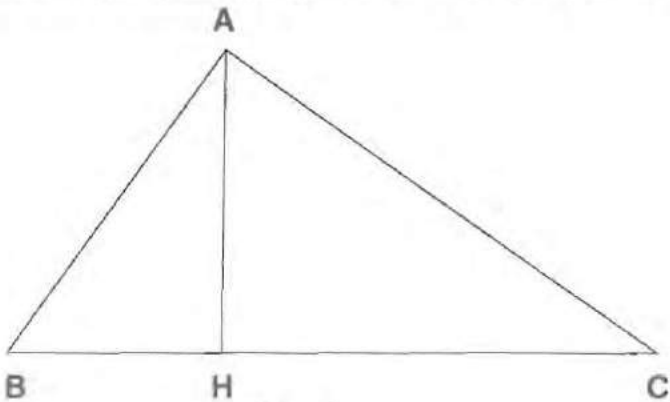


figure 4

On décompose le triangle de départ en deux triangles, au moyen de la hauteur. Les trois sont semhlables. L'aire du plus grand est la somme des aires des deux petits. Par conséquent, le carré du plus grand côté est la somme des carrés des deux petits côtés. C'est la démonstration la plus intuitive et la plus claire pour le théorème de Pythagore.

En 1913, on connaissait les fonctions continues sans dérivées, les courbes

(*) Rappelons l'énoncé du problème classique de la quadrature du cercle : peut-on construire à la règle et au compas un carré qui limite la même aire qu'un cercle donné ? (cf.Brochure APMEP n°86) non rectifiables. Il y avait des construction "flocons de neige" à la Mandelbrot (c'est la courbe de Von Koch), des courbes de Peano, de Cesàro qui remplissent tout un carré. Ces courbes de Peano et de Cesàro avaient des points doubles, triples ou quadruples. Polya, en 1913, eut l'idée d'exploiter la figure 4 pour construire une variante sans point quadruple (plus tard, on a su qu'une courbe remplissant un carré a forcément des points triples).

Considérons un triangle rectangle ABC et un segment de longueur 1 :

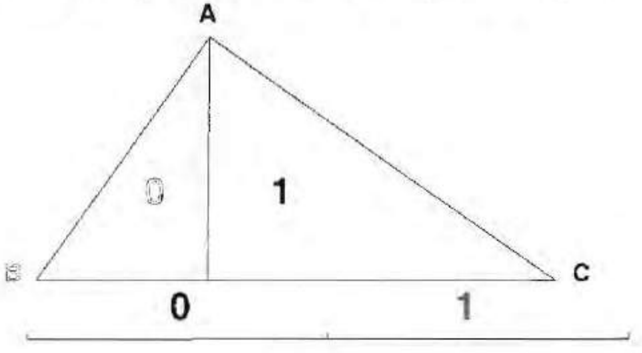


figure 5

Divisons le triangle en deux au moyen de la hauteur issue de A, et divisons le segment en deux moitiés égales. Notons O le petit triangle ('à gauche), 1 le grand triangle (à droite), et aussi 0 le segment de gauche et 1 le segment de droite.

Recommençons sur chaque triangle et sur chaque segment. Nous obtenons

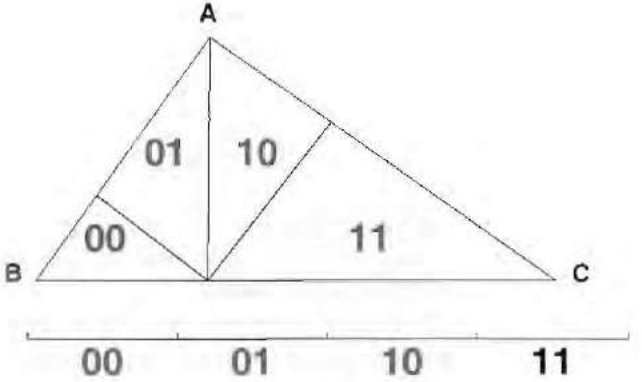


figure 6

Et continuons ainsi indéfiniment la dichotomie. A chaque point t de $[0,1]$ correspond son développement en base 2,

$t = 0,a_1a_2 \ldots$, où $a_1 = 0$ ou 1, $a_2 = 0$ ou 1, … et on lui associe le point correspondant du triangle ABC, obtenu par l'intersection des triangles qui le contiennent. Les points dont le développement est de la forme 0,00… sont tous dans le triangle 00, ceux dont le développement 0,01… sont dans le triangle 01 etc. Le point B est 0,000 … et le point C est 0,111…

Imaginons maintenant que le point t parcourt $[0,1]$ avec une vitesse uniforme. Le point associé, X, va parcourir tout le triangle ABC, selon une courbe continue, mais non rectifiable (la longueur de la courbe est infinie).

Arrêtons-nous à la quatrième étape de la subdivision (c'est-à-dire $[0,1]$ est divisé en 2^4 morceaux de longueur $1/2^4$) ; notre triangle est aussi divisé en 2^4 morceaux. Colorions-les en fonction du nombre de 0 et du nombre 1 : plus il y a de "0", plus le triangle est foncé.

- Il y a un seul triangle avec 4 zéros : 0000 : il est noir ;
- quatre avec 3 zéros et un "1" : 0001, 0010, 0100, 1000 : ils sont foncés ;
- six avec 2 zéros et deux "1" : 1100, etc. : ils sont de teinte moyenne ;
- quatre avec un zéro et trois "1" : 1110 etc. : ils sont clairs ;
- un avec quatre "1" : 1111 : il est blanc.

On reconnaît les coefficient du binôme et le triangle de Pascal

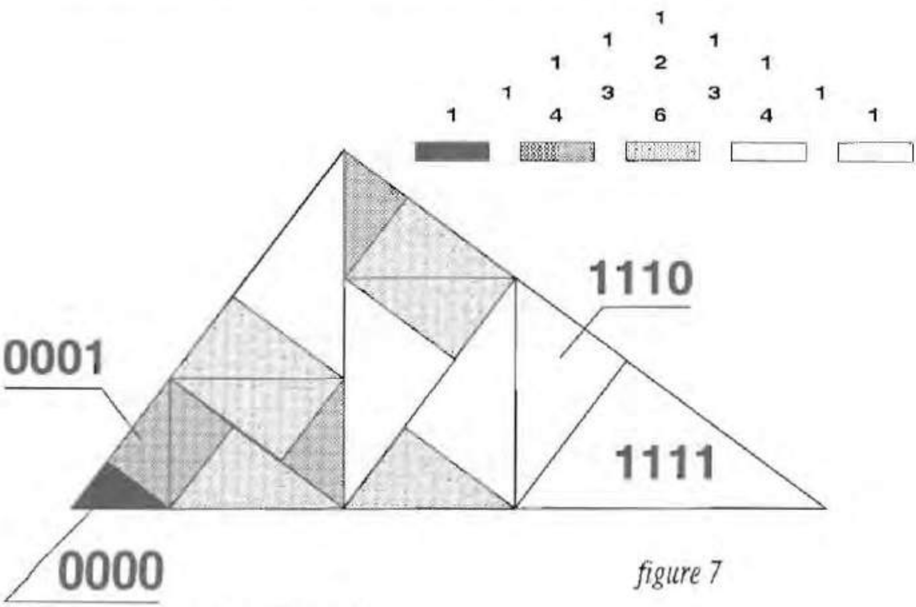


figure 7

Imaginons que nous continuions indéfiniment la dichotomie. On peut se demander quelle sera la couleur dominante du triangle. Si le triangle de départ était rectaugle isocèle, la réponse serait un gris moyen, car blanc et noir s'équilibreraient sur des aires égales. Mais dans notre figure, le 1 (blanc) l'emporte sur le 0 (noir), et la couleur dominante sera claire.

On peut vérifier cela par le calcul, et apporter d'intéressantes précisions sur la localisation des différents niveaux de grisé. Pour cela, convenons que le niveau de grisé au point $X(t)$, que nous désignons par β, est exprimé par la fréquence des 0 dans le développement binaire de t (pour simplifier, on peut se limiter aux t pour lesquels cette fréquence est bien définie ; sinon, il faudrait parler de fréquence supérieure ou inférieure). Quand on est au voisinage de $X(t)$, on regarde les variations de temps, disons Δt, et celles de l'espace, disons ΔX, et on constate que $|\Delta X| \approx \Delta t$ (au sens que le rapport des membres tend vers 1 quand Δt tend vers 0), l'exposant α étant fonction de β, ainsi que des angles du triangle rectangle. Désignons par $E(\beta)$ l'ensemble des points $X(t)$ où le niveau du grisé est β. Pour une valeur de β (donc aussi de α), $E(\beta)$ recouvre presque tout le triangle, c'est-à-dire que l'aire de $E(\beta)$ égale l'aire du triangle : c'est le grisé dominant. Pour les autres valeurs de β, $E(\beta)$ a une aire nulle, mais il y a une façon plus fine de mesurer, qui s'appelle la dimension ; par exemple, un point a une dimension nulle, un segment a pour dimension 1, et il y a des dimensions non entières, dont la théorie remonte à Hausdorff (1919).

La dimension de Hausdorff d'un ensemble E est précisément définie de la manière suivante : c'est l'inf des nombres α tels qu'il existe un recouvrement infini de E par des boules B_n pour lesquelles $\Sigma\,(diam)^{\alpha} < \infty$.

On peut calculer la dimension D de $E(\beta)$ en fonction de β (et aussi, naturellement, des angles du triangle rectangle). Ainsi on connaît $\alpha = \alpha(\beta)$ et $D = D(\beta)$, et on peut représenter (α, D) par un point dans le plan. La courbe obtenue a la forme indiquée sur la figure :

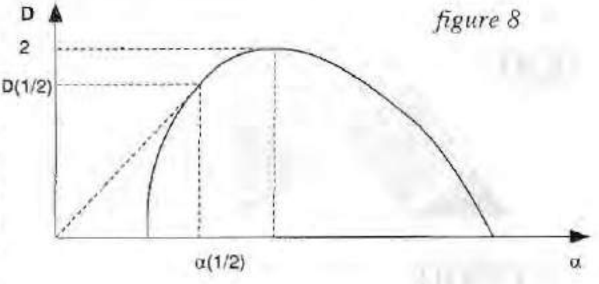


figure 8

α croît entre deux valeurs extrêmes, et D commence par croître puis décroît. La valeur maximum, $D = 2$, correspond au grisé dominant. Pour $\beta = 1/2$ (c'est-à-dire pour presque tout t), on a $D = \alpha$; on dit que la mesure image de dt dans le triangle (celle qui affecte pour masse à une partie donnée du triangle le temps qu'on y passe quand on parcourt la courbe) a pour dimension $D(1/2)$, et la variation de $D(\beta)$ en fonction de $\alpha(\beta)$ s'appelle l'analyse multifractale de cette mesure. L'analyse multifractale des mesures est un sujet récent, inspiré par les physiciens, et dont la théorie mathématique est encore en chantier.

Changeons maintenant de point de vue. La figure 9 montre trois choses. D'abord, on a recollé deux triangles rectangles pour former un rectangle. Ensuite, on a recollé deux intervalles, à la façon d'une ficelle fermée, pour figurer le paramètre. Enfin et surtout, on a changé de paramétrage. Désormais, les paramètres choisis seront proportionnels aux aires parcourues : des aires égales sont parcourues en des temps égaux (en assimilant toujours le paramètre au temps). En d'autres termes, si $x(t)$ est la position du point courant au temps t, l'ensemble balayé par $x(t)$ quand t parcourt un intervalle

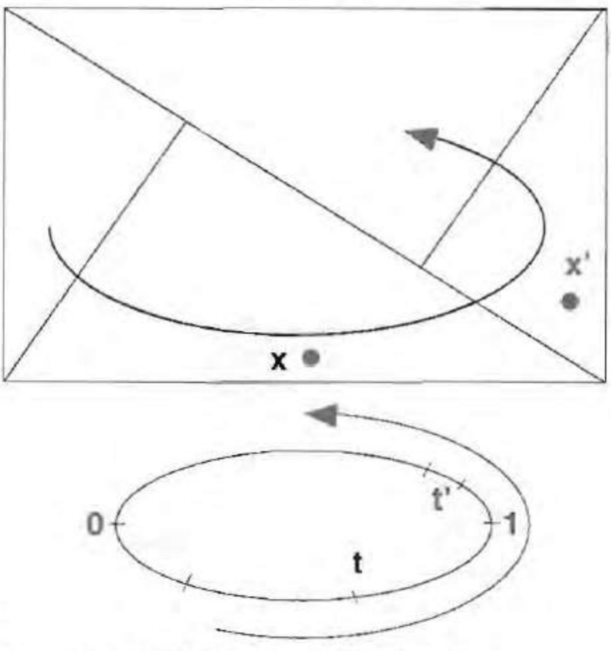
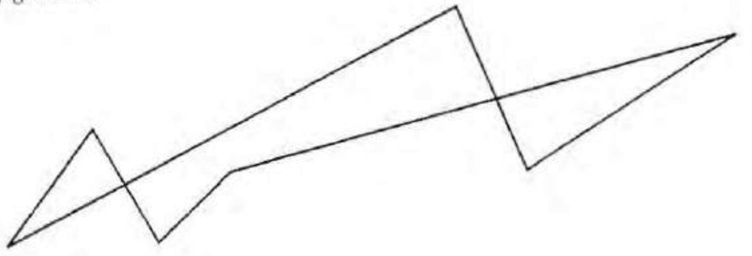


figure 9

a une aire proportionnelle à la longueur de cet intervalle.

On peut vérifier que le carré de la distance entre deux points est inférieur ou égal à la distance des paramètres. On résout ainsi le problème suivant : étant donné un rectangle et des points dans le rectangle, en nombre fini (10 ou un million) peut-on les joindre au moyen d'une ligne polygonale fermée de façon à obtenir un majorant de la somme des carrés des côtés qui soit fonction seulement du rectangle ?

figure 10



Théorème : on peut construire cette ligne polygonale fermée de telle sorte que la somme des carrés des côtés de la ligne soit inférieure à la somme des carrés des côtés du rectangle, ce qui donne la formule

$$\sum (M_n M_{n+1})^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

La solution consiste à énumérer les points dans l'ordre où on les trouve successivement en parcourant la courbe de Polya. Les mathématiciens reconnaissent ici une version quadratique du problème du voyageur de commerce. On impose au voyageur de commerce des villes à visiter ; il a un avion personnel et a le droit de choisir ses itinéraires. Il revient au point de départ, et souhaite minimiser la distance totale parcourue. Aucun voyageur n'a l'idée de minimiser la somme des carrés des distances : il semblerait que ce soit une distraction de mathématicien. Mais il n'en est rien, comme va le montrer le mouvement Brownien.

Celui-ci remonte au siècle dernier ; un botaniste anglais, Brown, avait regardé le mouvement désordonné des particules de pollen en suspension dans un liquide. Il avait remarqué qu'elles étaient agitées d'un mouvement perpétuel et d'autant plus vif que les particules étaient plus petites. Ce phénomène est resté mystérieux pendant tout le XIX° siècle. Einstein (en même temps que Smoluchovski, en 1905) publie un article dans *«Annalen der Physik»* (en même temps que des articles sur la relativité et sur l'effet photo électrique). Il donne la première théorie physique du mouvement Brownien. Il dit : *«Ce que je suis en train d'inventer ici : un mouvement désordonné des particules en suspension dans un liquide, causé par les chocs moléculaires, est peut-être ce que les gens connaissent sous le nom de mouvement Brownien».*

Einstein pense que c'est la variation quadratique qui importe. En France, Jean Perrin est impressionné par les possibilités que le mouvement Brownien offre pour la détermination du nombre d'Avogadro. Il fait sa thèse là-dessus, écrit en 1909 un grand article aux Annales de Physique et Chimie et publie en 1913 un livre *«les atomes»* où il décrit toutes ses expériences. Il dit : *«Les trajectoires du mouvement Brownien sont d'une infinie complexité. On ne peut trouver de direction ni mesurer de vitesse à aucun moment, c'est un cas où on est forcé de penser aux fonctions continues sans dérivées des mathématiciens».*

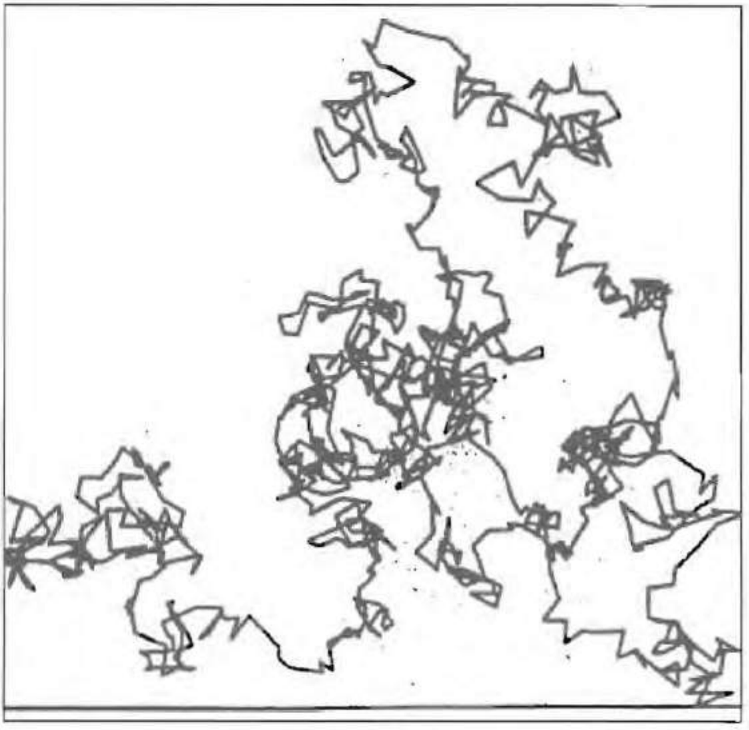


figure 11

Ce qu'il annonce sera le programme de Norbert Wiener dans sa théorie du mouvement Brownien : les trajectoires du mouvement Brownien sont des exemples physiques naturels de fonctions continues sans dérivées. Il mettra treize ans à le réaliser, en collaboration à la fin avec Paley et Zygmund. Wiener arrête alors ses recherches sur le mouvement Brownien et passe le flambeau à Paul Lévy. Paul Lévy accumule pendant 25 ans des travaux de mathématicien et d'entomologiste sur le mouvement Brownien. En lisant le mémorial Paul Lévy sur le mouvement Brownien plau, vous êtes happé par le mouvement Brownien. Il a une variation quadratique qui est exactement le temps passé, il a des propriétés topologiques intéressantes ; il ne va pas revenir au point de départ mais reviendra une infinité de fois au voisiuage de ce point, etc.

L'étude du mouvement Brownien ne se termine pas avec Paul Lévy. Citons le livre magnifique de D.Revuz et de M.Yor (*Martingales continues et Mouvement Brownien*, 1991) et aussi le nom de J.-F.Le Gall, l'un des spécialistes interuationaux du mouvement Brownien plan. Son cours à l'Ecole d'été de Saint Flour, qui n'est pas encore publié, sera la référeuce principale sur le mouvemeut Brownien plan.

La théorie d'Einstein est d'imaginer que la particule eu mouvement fait partie de tout un ensemble de particules ; uu nuage. C'est la théorie des parcours quadratiques eu moyenne, et non la théorie du parcours individuel. Un nuage de points peut se représeuter par un point à coudition d'être dans un espace de dimeusion suffisamment élevée. Si c'est uu nuage avec une infinité de points, il faudra un espace de dimension infinie et la proximité des nuages s'exprimera en termes de proximité de points dans des espaces de dimensiou infinie (les espaces de Hilbert). Einstein a découvert que ce sont des espaces d'Hilbert gaussiens. Dans les espaces de Hilbert, il y a une propriété remarquable : l'orthogonalité signifie l'indépendance. Un nuage petit au départ va grossir et va diffuser. Dans l'espace de Hilbert, il sera représenté par un point, décrivant une courbe.

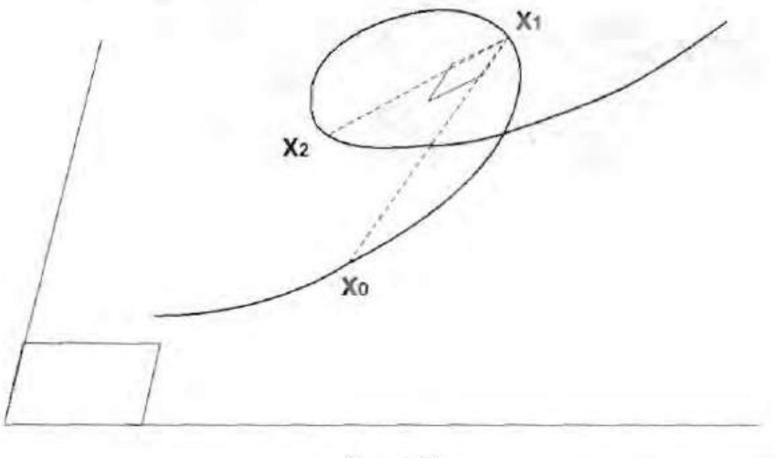


figure 12

L'évolution du nuage, du temps t_0 à t_1, puis du temps t_1 au temps t_2, se fait le long de cette courbe. La théorie d'Einstein est que les carrés des distances sont proportionnels aux temps : le carré de la distance $X_1 - X_0$ est proportionnel à $t_1 - t_0$, le carré de la distance $X_2 - X_1$ est proportionnel à $t_2 - t_1$, et le carré de la distance $X_2 - X_0$ est proportionnel à $t_2 - t_0$. Mais la somme $t_1 - t_0 + t_2 - t_1$ est le temps $t_2 - t_0$.

La somme des carrés de $X_2 - X_1$ et de $X_1 - X_0$ est donc le carré de $X_2 - X_0$, et c'est la propriété du triangle rectangle qui signifie que l'angle est droit. On a une courbe telle que la distance de deux points ne dépend que de la distance qui sépare les temps de ces deux points : on se déplace par isométrie le long de cette courbe, qu'on appelle une hélice. De plus, cette hélice a la propriété suivante : quand on choisit trois points sur la courbe, ils déterminent toujours un triangle rectangle.

L'interprétation physique sera : ce qui se passe à partir de X_1 est orthogonal à ce qui se passe avant X_1 ce qui veut dire que les accroissements du futur sont indépendants du passé. C'est la théorie physique du mouvement Brownien. Cette théorie est exprimée par l'image simple d'une courbe extrêmement régulière, une hélice sur laquelle trois points déterminent toujours un triangle rectangle. On l'appellera «hélice Brownienne». C'est une courbe très régulière, bien que le mouvement Brownien soit très irrégulier.

Le mathématicien interprète $x(t)$ (l'évolution du nuage) au moyen de $x(t,\omega)$ (l'évolution des particules individuelles, notées ω; l'ensemble des ω est «l'espace de probabilité»), et tout le travail est de construire et d'étudier cette fonction de t et de ω. Les probabilistes travaillent avec des processus, qui ont une version abstraite, généralement représentable de façon géométrique, simple, dans un espace abstrait. Mais l'évolution des particules elle-même est très chaotique : en général, continue, non dérivable.

Revenons à la vulgarisation. Je vous ai fait faire une grande promenade à travers les siècles. J'aurais pu m'attarder à l'étape initiale. Pour les Grecs, il y a un conflit entre l'arithmétique et la géométrie, qui provient du théorème de Pythagore : si on l'applique à un triangle rectangle isocèle, on a la formule $2a^2 = c^2$ et on en déduit que la diagonale du carré est incommensurable au côté du carré. Pour eux, le domaine de la géométrie esr donc irréductible à la théorie des nombres ; d'où les efforts d'Euclide pour obtenir des démonstrations purement géométriques, qui ne sont pas fondées sur des nombres.

Mon propos était d'arriver au mouvement Brownien, parce qu'il a un statut intéressant. Il y a trente ans, je crois que moins d'un sur vingt parmi les mathématiciens professionnels aurait pu en donner la définition.

Aujourd'hui, la proportion est bien plus élevée, parce qu'il est devenu un objet usuel, en géométrie (surfaces Riemaniennes), en analyse (théorie du potentiel, fonctions analytiques). Il intervient comme objet d'étude, comme prototype de tous les processus stochastiques, et aussi comme outil pour les mathématiciens et pour les physiciens, pour de nouvelles simulations.

Voici un exemple de simulation qui fascine actuellement les mathématiciens et les physiciens : prenez un objet plat ou dans l'espace. Faites parcourir l'espace par une particule Brownienne qui viendra se coller à l'objet. En se collant, elle l'agrandit, de façon infinitésimale, et modifiera son apparence. Des filaments, des arbres, une végétation vont se créer ; cela porte le nom de DLA, et cet objet est encore très mystérieux.

Cette année, le titulaire de la chaire Eisenstadt à l'Université de Montréal est Eugène Dynkin, et il fera un cours sur le «Super-Brownien», qui fournit une nouvelle manière de comprendre l'équation de Schrödinger en physique quantique. Le mouvement Brownien plonge loin dans l'histoire, mais reste d'actualité.

En amorce à la discussion qui doit suivre, je revieus à mon point de départ. On peut faire de la vulgarisation mathématique sur beaucoup de sujets (dont certains plus élémentaires et plus récents que celui-ci), mais pourquoi *doit-on* en faire ?