Notation et sens: une étude de cas.

Bernard PARZYSZ
IUFM et IREM de Lorraine
Equipe DIDIREM (Paris 7)

On peut juger *a priori* que le choix de telle ou telle notation pour désigner un concept mathématique est un sujet de peu d'importance, et il est vrai que pour un utilisateur familier du concept , seule la commodité d'emploi et/ou l'habitude entrent finalement en ligne de compte. Malheureusement, ceci ne s'applique pas à nos élèves lorsqu'ils abordent une notion nouvelle, et il arrive que la décision de l'enseignant d'utiliser un symbolisme de préférence à une autre (soit parce qu'il est habitué à l'utiliser, soit parce que c'est celui qui est employé dans le manuel de la classe, soit parce qu'il pense que c'est sans importance...) puisse ne pas être sans conséquences sur le rapport de sens que ses élèves vont avoir avec le concept en jeu.

Je prendrai comme exemple la notion de probabilité conditionnelle, qui est abordée en Terminale, et pour laquelle, comme l'indique le programme des classes scientifiques[1], il existe deux notations possibles: "L'étude d'expériences aléatoires (...) amène à définir la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $p_B(A)$ ou encore p(A/B)". Les auteurs ne prennent donc pas parti, et laissent le libre choix de la notation à l'enseignant concerné.

Il est de fait que la notation p(A/B) est la plus -sinon la seule- utilisée au

1 BOEN spécial n°2 - 2 mai 1991, p.51

Il est de fait que la notation p(A/B) est la plus -sinon la seule- utilisée au niveau post-baccalauréat, et on peut *a priori* penser que, si les élèves l'utilisent dès le départ, ils ne seront pas dépaysés plus tard. C'est certes là un argument valable, mais il me semble finalement de peu de poids au regard d'autres que je vais développer, et qui sont de nature plus directement didactique. Mais auparavant, il n'est peut-être pas inutile de rappeler le contenu mathématique de la notion de probabilité conditionnelle.

1. Le concept :

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé (Ω est l'ensemble fondamental, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et p une probabilité définie sur $\mathcal{T}$), et B un élément de $\mathcal{T}$, de probabilité non nulle. On appelle *probabilité conditionnelle sachant* B l'application de $\mathcal{T}$ dans [0;1] qui, à tout événement A de $\mathcal{T}$, associe $p_B(A) = (p(A \cap B)/p(B))$. On démontre que $(\Omega, \mathcal{T}, p_B)$ est également un espace probabilisé.

Il en résulte que la probabilité conditionnelle possède -entre autres- les deux caractères suivants:

1) il s'agit d'une probabilité sur le même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$
2) cette probabilité est différente, sauf exception, de la probabilité initiale p.

2. Les notations :

Ces deux caractéristiques sont bien apparentes dans la notation $p_B(A)$, où elles sont marquées respectivement par la place identique de l'événement A et par l'opposition p_B / p.

En revanche, ce n'est pas du tout le cas avec la notation p(A/B), dans laquelle l'une et l'autre de ces deux caractéristiques paraissent même contredites:

1°) la probabilité semble toujours être la même: p;
2°) cette probabilité semble s'appliquer à l'événement A/B.

Bien entendu, ce pseudo "événement conditionnel" n'a aucune réalité mathématique. Mais il n'en reste pas moins que le risque de confusion est réel. Je n'en veux pour preuve que le fait qu'elle a naguère été commise par le (ou les) auteur(s) d'exercices posés au baccalauréat.

3. Deux exercices du baccalauréat :

Dans le premier[2], il s'agissait d'une situation concernant la surdité, dans laquelle on considérait les événements D: "être atteint de surdité à l'oreille

---

2 SérieD, Juin 1989. Académies de Paris, Créteil, Versailles

droite", G: "être atteint de surdité à l'oreille gauche" et S: "être atteint de surdité (sur une oreille au moins)" . Et, dans le cours de l'énoncé, était posée la question, en apparence innocente mais ô combien énigmatique : "Les deux événements "D sachant que S" et "G sachant que S" sont-ils indépendants ?". La relation que l'on demandait de vérifier (ou non) était en fait: $p_S(D).p_S(G) = p_S(D \cap G)$. C'est-à-dire qu'il s'agissait de voir si, *pour la probabilité p_S*, les événements D et G étaient indépendants[3]. Avec la notation usuelle, la relation précédente s'écrit $p(D/S).p(G/S) = p(D \cap G/S)$., et ceci explique la confusion faite par les auteurs du sujet. Mais comment un élève aurait-il pu reconnaître de quoi il s'agissait? Le rapport avec la définition de l'indépendance de deux événements vue en cours est loin d'être évident.

La confusion due à la notation apparaît encore plus nettement dans un autre énoncé, proposé l'année suivante dans les mêmes académies[4], et dans lequel on trouve l'indication suivante: "si A et B sont deux événements, on pourra noter A/B l'événement «A sachant que B»". C'est on ne peut plus clair (si l'on peut dire...).

Il s'agit bien ici, incontestablement, d'effets pervers dus à la notation: avec la notation indicielle des probabilités conditionnelles, on conviendra que des énoncés aussi "surréalistes" n'auraient eu aucune chance de voir le jour. Or, si des enseignants se sont laissé piéger, pourquoi pas des élèves ?

4. Des rôles dissymétriques :

On peut également citer un autre aspect positif de la notation indicielle: dans l'écriture $p_B(A)$, les places qu'occupent A et B sont bien différenciées: la notation montre clairement que c'est à l'événement A que s'applique la probabilité, et que c'est l'événement B qui conditionne cette probabilité. Dans la notation $p(A/B)$ au contraire, le fait que A et B soient placés - graphiquement - au même niveau, ne se distinguant que par la latéralisation, tend à favoriser la confusion entre $p(A/B)$, $p(B/A)$ et $p(A \cap B)$.

Cette confusion, fréquente chez les élèves de Terminale, s'explique d'ailleurs en partie par les ambiguïtés que présente la langue naturelle, dès que l'on s'éloigne des formulations stéréotypées utilisant l'expression "sachant que". Dans une phrase telle que "quelle est la probabilité qu'un sourd le soit de l'oreille gauche ?", il est en effet assez difficile à un débutant de distinguer s'il s'agit (en reprenant les notations ci-dessus) de déterminer $p(G/S)$, $p(G \cap S)$ ou $p(S/G)$. On comprend alors qu'il faut, autant que faire se peut, éviter que la notation utilisée vienne ajouter à la confusion.

3 Ce qui, entre parenthèses, aurait pu offrir le mérite de montrer que l'indépendance de deux événements dépend de la probabilité considérée.

4 Série D, juin 1990. Académies de Paris, Créteil, Versailles.

5. Le problème du sens:

Que retenir de ceci ? De façon générale, on peut dire que c'est par le truchement de nos *sens* que s'élabore en nous le *sens* d'un concept (j'espère que l'on me pardonnera ce jeu sur les sens du mots "sens"). Cette construction du sens implique en particulier toutes les représentations visuelles qui sont associées au concept dans l'apprentissage. Constatation sans doute banale, mais qu'il n'est peut-être pas inutile de rappeler. Dans le cas de la probabilité conditionnelle, il peut s'agir des diagrammes de Carroll, des arbres probabilisés..., mais également des notations utilisées pour faire fonctionner la notion: l'exemple cité plus haut démontre la réalité de cette influence, même si le résultat obtenu n'est pas celui qui était souhaité.

On peut penser - et c'est théoriquement vrai - qu'un symbole n'a pas de sens par elle-même, qu'il n'a que celui qu'on lui donne, au moment où l'on définit le concept et la (ou les) symbole(s) associé(s), dont il fait partie : c'est en fait le concept qui donne son sens au symbole. Cependant celui-ci risque, en retour, par une sorte d'effet boomerang, de donner *un* sens au concept, dès lors que ce concept n'a pas encore pris véritablement *son* sens. Et ce sens induit peut très bien, on l'a vu, être en contradiction plus ou moins flagrante avec le sens correspondant à la définition. Ce qui est d'autant plus dangereux que ladite définition risque d'être rapidement oubliée, tandis que le symbole interviendra à chaque fois que l'on fera fonctionner le concept.

Est-ce à dire que, dans l'exemple considéré, il faille complètement abandonner la notation usuelle, au profit de la notation indicielle? Certes non (j'en suis d'autant plus convaincu que c'est celle que j'utilise moi-même en DEUG). Mais, s'agissant de l'introduction du concept et des notations associées, le choix exclusif -dans un premier temps- de la notation indicielle me semble nettement préférable à celui de l'autre notation. On pourra bien entendu introduire celle-ci, mais un peu plus tard, seulement lorsqu'on pensera que le concept aura acquis suffisamment de sens (au travers des situations dans lesquelles il sera intervenu) pour que le symbolisme de la notation ne risque pas de lui en substituer un autre.