Dans nos classes

«Pas le droit ?»

Philippe JACQUEMIER
Revel

«L'aire du parallélogramme ?
Facile !
on multiplie la base par la hauteur !
La hauteur ?…laquelle ?

Ci-contre, une façon de justifier le calcul de l'aire du parallélogramme : un découpage puis un transport. Cette aire est «le produit de la base par la hauteur». On précise parfois : «Le produit d'une base par la hauteur correspondante».

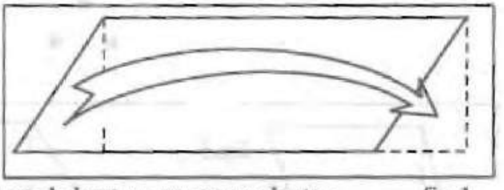
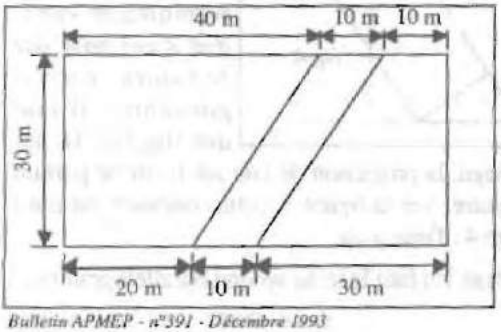


fig.1



Parmi les exercices d'application, on trouve celui-ci : «On construit une route qui traverse un terrain rectangulaire, selon le plan ci-joint. Calculer de deux façons l'aire du terrain qui ne sera pas cultivé».

fig.2

L'enfant de Sixième venu me trouver me décrit une première façon : «soustraire la somme des aires des trapèzes de l'aire du rectangle». S'il est venu me trouver, c'est qu'il n'en imagine pas une seconde.

Je vois tout de suite l'idée de l'auteur de l'énoncé : une base courte placée «comme une base» (c'est-à-dire, soyons clairs, au long d'une ligne du cahier...) et une hauteur à découvrir. (Il y faudra du flair : sous couvert d'originalité, une sorte de provocation).

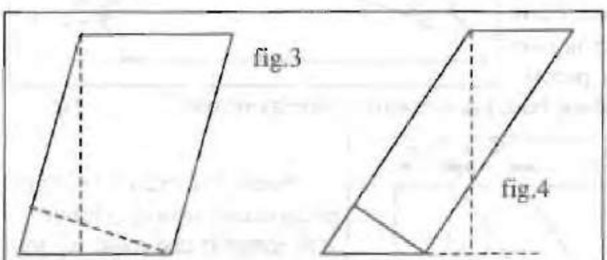
Le dialogue suivant s'engage :
– Cette figure, c'est un quoi ?
– Un parallélogramme.
– Tu sais calculer l'aire d'un parallélogramme ?
– Bien sûr, mais je ne connais pas les grandes bases (l'égalité de Pythagore est en effet pour plus tard).
– Eh bien alors, prends la petite : multiplie 10 m par 30 m.
– *(Protestation)* Mais je n'ai pas le droit !

Effectivement, le découpage donné comme justification lors de la leçon n'est pas faisable.

J'ai admiré la pédagogie de cet instituteur de CM2 qui avait fait en sorte que ses élèves retiennent ce qu'il fallait retenir, non par la répétition d'une suite de mots (*«Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, etc...»*), mais par l'évocation du raisonnement qu'on avait tenu lors d'une activité antérieure.

★

★ ★



Pour que le découpage et le transport d'un triangle justifient la formulation *«produit d'une base par la hauteur correspondante»*, il faut que (fig.3 et 4), des deux côtés encadrant un angle aigu, la projection de l'un sur la droite portant l'autre soit plus courte que cet autre. Sur la figure 3, cette condition est remplie de deux façons ; sur la figure 4, d'une seule.

«Je n'ai pas le droit», affirmait l'enfant face au second parallélogramme.

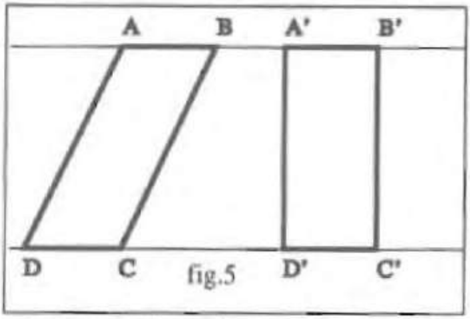


fig.5

Une translation dont la direction est celle du côté qu'on prendra comme base permet de justifier, quelle que soit la forme du parallélogramme, ce produit d'une base par la hauteur correspondante : le trapèze AA'D'D (fig.5), par glissement, vient en BB'C'C ; les parties de ce trapèze extérieures à leur partie commune ont même aire. Le lecteur pourra rechercher, dans les nombreux manuels de collège, actuels ou anciens, quelle attitude adoptent les auteurs.

Faut-il condamner, lors d'une première approche, le découpage de la figure 1 ? Non, sans doute. Mais, plutôt que d'annoncer, face à un parallélogramme type figure 4 «*On a encore le droit de multiplier etc...*», il est préférable de rester sur une interrogation :«*A-t-on encore le droit ?*». La translation ci-dessus prendra alors toute son utilité.

★

Une translation analogue (fig.6) permet de calculer le volume du prisme oblique : ce volume est égal à celui du prisme droit extrait de la même surface prismatique et d'arête latérale de même longueur ; il est donc le produit de cette longueur a par l'aire S d'une section droite - même s'il n'existe aucun plan de section droite coupant la totalité des arêtes latérales (fig.6).

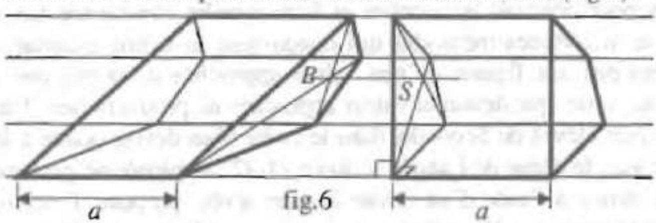


fig.6

Tout cela de la même façon que (fig.5) : l'aire du «parallélogramme oblique» est égale à celle du «parallélogramme droit» (du rectangle) extrait de la même paire de parallèles - même s'il n'existe aucune perpendiculaire à celles-ci coupant les deux côtés qu'elles portent, c'est-à-dire si le découpage de la figure 1 n'est pas faisable.

Que le volume du prisme oblique soit aussi, selon la «formule à retenir», le produit de l'aire B de sa base par sa hauteur h, cela s'en déduit rapidement (l'angle des hauteurs des deux prismes est aussi celui des plans de leurs bases). Ces deux expressions du volume du prisme sont les analogues, pour le parallélogramme, des deux produits de «la base par la hauteur».