Avis de Recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

N'hésitez pas non plus à envoyer des réponses, mêmes partielles !

J.P. Friedelmeyer (Strasbourg), signale en complément de réponse à l'avis de recherche n°1 sur le **symbole** ∇ que si Maxwell a bien utilisé ce symbole, son introduction a été faite plutôt par Hamilton et Tait, dans des traités sur les quaternions. D'autre part, le symbole avait déjà été utilisé par Laplace et Arbogast avec d'autres significations utilisant l'opérateur de différence finie, Δ à l'endroit.

A. Michel Pajus signale que "versorio" (ancien nom de la **versiera**, cf. le bulletin 389) signifie en latin amure (corde de marine), ce qui correspond bien à l'image de cette courbe.

J. Brette (Palais de la découverte), apporte une contribution intéressante au feuilleton des courbes unicursales (cf. le bulletin 389 page 386). Dans le précédent épisode, j'avais posé deux questions :

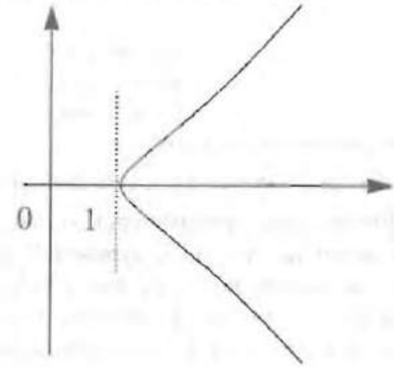
***Question 1* : quelle est la courbe algébrique non unicursale dont l'équation cartésienne est la plus simple, en un sens à définir ?**
***Question 2* : une courbe algébrique que l'on peut tracer d'un seul coup de crayon est-elle forcément unicursale ?**

Pour la question 1, le critère de simplicité peut être la minimalité du degré (ce sera donc une cubique), puis la concision de l'écriture. J. Brette propose la courbe d'équation $y^2 = x^3 - 1$ (je suppute que J. Brette a pris $y^2 = x^3 - 1$ et non $y^2 = x^3 + 1$ qui serait peut-être plus naturelle car un "-" est plus "concis" qu'un "+" ...). On peut montrer qu'elle n'est pas unicursale en montrant qu'elle ne possède pas de point singulier : son équation homogène est $f(X,Y,T) = Y^2T - X^3 + T^3 = 0$ et l'annulation des trois dérivées partielles de f donne $X = Y = T = 0$.

Cette même courbe fournit un contre-exemple à la question 2 : le mot "unicursale" n'est donc pas *synonyme* de "connexe dans le plan projectif réel".

Remarque : la détermination du nombre maximum d'ovales d'une courbe algébrique de degré donné d est encore un problème ouvert pour $d \geq 7$.

La courbe $y^2 = x^3 - 1$ se trace d'un coup de crayon, sans être unicursale



AVIS DE RECHERCHE N°7 sur l'origine de la notation actuelle de la valeur absolue.
D'après F. Cajori : a history of mathematical notations (1928) Volume 2, p. 312, les deux barres verticales apparaissent pour la première fois sous la plume de Weierstrass en 1841, dans un article sur les séries entières, et employées pour désigner le module d'un complexe. Les tentatives de notation précédentes avaient été mod z, et $\overline{\overline{z}}$.

AVIS DE RECHERCHE N°8 sur l'origine du terme pivot.

J. Berrard (Paris) a envoyé un article de la Revue de Mathématiques Spéciales de novembre 1947 écrit par A. Magnier, qui doit probablement constituer la première apparition française du terme pivot, emprunté aux "calculateurs anglais".

AVIS DE RECHERCHE N°9 sur l'existence d'un nombre premier entre deux carrés consécutifs.

Dans son livre sur les records des nombres premiers (the book of prime number record, Springer, 1988) Paulo Ribenboim discute de ce problème (pages 189, et 318 à 320 - référence envoyée par J. Brette).
On y apprend qu'en 1882, Opperman a conjecturé qu'il existait un nombre premier entre n^2 et $n^2 - n$ et un autre ente n^2 et $n^2 + n$ pour $n \geq 2$, ce qui impliquerait qu'il existe au moins *deux* nombres premiers entre n et $(n + 1)^2$, mais cette conjecture n'est pas démontrée à l'heure actuelle.

Sierpinski a formulé plus tard la conjecture suivante : dans la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & n^2 \end{bmatrix}$$

chaque ligne contient au moins un nombre premier. Si l'on regarde les deux dernières lignes de cette matrice, on retrouve alors la conjecture d'Opperman. Mais un joli exercice est de prouver que cette conjecture implique aussi l'existence de *quatre* nombres premiers entre deux *cubes* consécutifs.

C. Goldstein (Paris) m'a transmis par téléphone d'autres éléments de réponses dus à un spécialiste de la question, Étienne Fouvry de l'université de Paris-Sud (à qui l'on doit la première démonstration, en 1985, du premier cas de Fermat pour une infinité de valeurs de n). L'angle d'attaque actuel de ce problème est d'évaluer les nombres premiers entre n et $n + n^a$. Il y a fort longtemps (mais je n'ai pas de date précise) que l'on a démontré qu'il existe un nombre premier entre n et $n^{2/3}$ et que l'on connaît même leur proportion, ce qui *prouve* l'existence d'un nombre premiers entre deux *cubes* consécutifs. Pour obtenir l'existence entre deux *carrés*, il faudrait abaisser la borne a jusqu'à $a = 1/2$. Il y a quatre ans, Iwaniec a réussi à descendre à $a = 6/11$, mais d'après E. Fouvry, on est encore loin à l'heure actuelle de passer de $6/11 = 0{,}545...$ à $1/2 = 0{,}5$ ... Notre collègue de la Réunion qui a envoyé cet avis de recherche a donc mis le doigt sur un problème très actuel ...

La meilleure référence actuelle sur le sujet est: Montgomery, lectures notes in mathematics n° 227, Springer.

AVIS DE RECHERCHE N°10

sur les formules de Sheppard ; réponse de P. L. Hennequin.

La réponse à la question posée est traitée en détail et de façon complète dans l'ouvrage "the advanced theory of statistics" de M.G. KENDALL et A. STUART, GRIFFIN - LONDON, 3ème édition 1969, page 75 et suivantes.

Ces formules comparent pour une loi de probabilité de densité f nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$, les moments

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx = \int_a^b x^r f(x)\,dx$$

et leur approximation $\overline{\mu_r} = \sum_{j=1}^{n} a_j^r f_j$ obtenu par un découpage de l'intervalle

$[a, b]$ en n classes de même pas $h = \frac{b-a}{n}$ (avec $a_j = a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h$ et $f_j = \int_{-h/2}^{h/2} f(a_j + x)\,dx$).

A partir de la formule d'Euler - Mac Laurin, on obtient, en supposant f dérivable $2n$ fois et négligeable, ainsi que ses dérivées, sur les intervalles $[a, a + h/2]$ et $[b - h/2, b]$:

$$\mu_1 = \overline{\mu},$$

$$\mu_2 = \overline{\mu_2} - \frac{h^2}{12},$$

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} C_r^j (2^{r-j} - 1) B_j h^j \overline{\mu_{r-j}} \;,$$

où les B_j sont les nombres de Bernoulli.

Les hypothèses très restrictives faites sur f rendent ces formules peu fiables en général, comme le montrent les exemples développés dans la référence citée.

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

AVIS DE RECHERCHE N° 11 de M. Bouteiller (Brive) :

Qui était *Erchinger*, personnage qui aurait, d'après le livre de l'IREM de Strasbourg, Terminales CDE (Bordas) P. 21, réalisé avant Gauss la construction de l'heptadécagone à la règle et au compas ?

AVIS DE RECHERCHE N° 12 de M. Bouteiller (Brive) :

Qui pourrait et voudrait bien expliquer, *avec exemples*, ce qu'est une catégorie opposée ou duale ?

AVIS DE RECHERCHE N° 13 de G. Camguilhem (Aubervilliers)

On prend les symétriques du point G centre de gravité d'un triangle (ABC) par rapport à chacun de ses côtés ; on obtient un triangle ($A'B'C'$) de centre de gravité G' ; on réitère le procédé à partir de ($A'B'C'$). Obtient-on comme position limite un triangle équilatéral ? Que se passe-t-il si l'on prend un autre point pondéré que l'isobarycentre ?

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet, ou, beaucoup mieux, sur disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL

6, rue des annelets - 75019 PARIS.