Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes» … si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 222 (J.-P.FRIEDELMEYER, Strasbourg)

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, le nombre :

$$x_n = \frac{1}{\left(2\cos\frac{2\pi}{9}\right)^n} + \frac{1}{\left(2\cos\frac{4\pi}{9}\right)^n} + \frac{1}{\left(2\cos\frac{8\pi}{9}\right)^n}$$

est un entier naturel égal à :

$$x_n = \sum_{0 \leq p \leq [n/3]} (-1)^p \, 3^{n-2p} \frac{n}{n-2p} \mathrm{C}^p_{n-2p}$$

n = 0 3
n = 1 3
n = 2 9
n = 3 24
n = 4 69
n = 5 198
n = 6 570
n = 7 1641
n = 8 4725
n = 9 13605

ÉNONCÉ N° 223 (Igor CHARIGUINE, Moscou)

On inscrit dans un cercle Γ le trapèze $ABCD$, de bases $[AD]$ et $[BC]$. Le cercle inscrit dans le triangle ACD a pour rayon r, et est tangent à (AD) en M. Montrer que le cercle tangent aux segments $[AM]$ et $[BM]$ et au cercle Γ a, lui aussi pour rayon r.

ÉNONCÉ N° 224 (François LO JACOMO, Paris)

Montrer que quels que soient a et b, entiers non nuls, et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe u et v entiers tels que $\left|\exp\left(\frac{2}{a}\right) - \frac{u}{bv+1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{u^2}$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°207 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles)

Combien y a-t-il de façons de payer une somme de 199,20 F en pièces de 10 centimes, 20 centimes, 50 centimes, 1 F, 2 F, 5 F ou 10 F ?

RÉPONSE de Pascal Peter (La Rivière)

[...]

«Souhaitant que les longues heures de sommeil repoussé dont ce problème m'est redevable m'auront au moins permis d'en approcher la solution, je ne résisterai pas plus longtemps que la fin de cette phrase à l'envie d'écrire le nombre que j'ai trouvé, avant que de dire comment : **11 400 817 260»**

[...]

SOLUTION d'après Marie-Laure CHAILLOUT

Cela revient à chercher le nombre N_n de solutions dans $\mathbf{N}^7$ de l'équation :

$$10(10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4) + (5x_5 + 2x_6 + x_7) = n = 10q + r \text{ avec } q = \left[\frac{n}{10}\right] ,$$

$0 \leq r \leq 9$.

Pour $0 \leq i \leq q$, à chaque solution de $10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = i$ correspond $T_{10(q-i)+r}$ solutions de notre problème, en appelant T_{10k+r} le nombre de solutions de $5x_5 + 2x_6 + x_7 = 10k + r$.

Si on appelle S_i le nombre de solutions de $10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = i$, on a donc : $N_n = \sum_{i=0}^{q} S_i T_{10(q-i)+r}$.

On commence par calculer T_{10k+r} : à chaque valeur possible de x_5 (entre 0 et $2k$ ou $2k+1$ suivant que $r < 5$ ou $r \geq 5$) correspondent :

$1 + \left[\dfrac{10k + r - 5x_5}{2}\right]$ valeurs possibles de x_6 (en notant $[x]$ la partie entière de x), et x_7 en résulte, de sorte que $T_{10k+r} = \displaystyle\sum_{j=0}^{2k+1} 1 + \left[\dfrac{10k + r - 5j}{2}\right] + s(r)$

$s(r)$ étant nul si $r \geq 5$, mais compensant le terme en trop de la première somme (qui aurait dû s'arrêter à $j = 2k$) lorsque $r \leq 4$, soit : $s(0) = 2$, $s(1) = s(2) = 1$ et pour $r \geq 3$, $s(r) = 0$.

(ce que Marie-Laure Chaillout écrit : $s(r) = \dfrac{1}{2}\left(\left|2 + \left[\dfrac{r}{2}\right] - r\right| + 2 + \left[\dfrac{r}{2}\right] - r\right)$).

L'intérêt de sommer jusqu'à $2k + 1$ est que l'on peut regrouper les termes deux par deux en utilisant la relation vraie pour tout entier x : $\left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x+5}{2}\right] = x + 2$, donc $T_{10k+r} = \left[\displaystyle\sum_{j=0}^{k} (10k + r - 1) - 10j\right] + s(r)$

$$\boxed{T_{10k+r} = (k+1)(5k + r - 1) + s(r)} \quad (1).$$

En particulier, $T_{1992} = 199\,201$.

Si maintenant $i = 10x + y$ $(0 \leq y \leq 9)$, à chaque valeur de j comprise entre 0 et x correspondent, si l'on choisit $x_1 = x - j$, T_{10j+y} solutions de $10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = i$, de sorte que

$$S_i = \sum_{j=0}^{x} T_{10j+y} = 5\sum_{j=0}^{x} j(j+1) + (y-1)\sum_{j=0}^{x}(j+1) + s(y).(x+1)$$

$$= \frac{5}{3}x(x+1)(x+2) + \frac{1}{2}(y-1)(x+1)(x+2) + (x+1)s(y).$$

Par ailleurs, si $n = 10q + r$, la formule (1) donne :

$$T_{10(q-i)+r} = 5i^2 - (n+4)i + T_n,$$

d'où : $$N_n = \sum_{i=0}^{q} \left(5\,i^2 - (n+4)\,i + T_n\right) S_i$$

une simple calculette suffit : comme q se termine par un 9, il suffit de sommer (d'abord par rapport à y, puis par rapport à x) S_i , iS_i et $i^2 S_i$ en utilisant au mieux les sommes de coefficients binomiaux et les relations :

$\sum_{y=0}^{9}(y-1)=35$, $\sum_{y=0}^{9}s(y)=4$, $\sum_{y=0}^{9}y(y-1)=240$, $\sum_{y=0}^{9}y\,s(y)=3$ etc..., ce

qui donne : $\sum_{i=10x}^{10x+9} S_i = 100\,C_{x+2}^{3} + 35\,C_{x+2}^{2} + 4(x+1)$

$$\sum_{i=10x}^{10x+9} iS_i = 4000\,C_{x+3}^{4} - 1500\,C_{x+2}^{3} + 320\,C_{x+2}^{2} - 77(x+1)$$

$$\sum_{i=10x}^{10x+9} i^2 S_i = 200000\,C_{x+4}^{5} - 202000\,C_{x+3}^{4} + 51150\,C_{x+2}^{3} + 260\,C_{x+1}^{2} + 1745(x+1)$$

puis, en sommant par rapport à x :

$$\sum_{i=0}^{199} S_i = 100\,C_{22}^{4} + 35\,C_{22}^{3} + 4\,C_{21}^{2}$$

$$\sum_{i=0}^{199} iS_i = 4000\,C_{23}^{5} - 1\,500\,C_{22}^{4} + 320\,C_{22}^{3} - 77\,C_{21}^{2}$$

$$\sum_{i=0}^{199} i^2 S_i = 200\,000\,C_{24}^{6} - 202\,000\,C_{23}^{5} + 51\,150\,C_{22}^{4} + 260\,C_{21}^{3} + 1745\,C_{21}^{2}$$

d'où

$$N_n = 1\,000\,000\,C_{24}^{6} - 8\,994\,000\,C_{23}^{5} + 23\,169\,850\,C_{22}^{4} + 1300\,C_{21}^{3} + 6\,333\,315\,C_{22}^{3} + 959\,221\,C_{21}^{2}$$

et le résultat est accessible avec une calculatrice normale, d'autant que chaque terme est divisible par 70.

Autres solutions :
Edgard DELPLANCHE (Créteil), Francis DREY (Curepipe - Ile Maurice), Jacques LEGRAND (Biarritz), René MANZONI (Le Havre), Pascal PETER (La Rivière), Marguerite PONCHAUX (Lille).

Solutions partielles :
Denis HARTEMANN (Cayenne - Guyane) et M. VIDIANI (Dijon)
... et deux solutions fausses.

Remarques

Eugène EHRHART signale un résultat plus simple, traité dans son livre *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire* : «Combien y a-t-il de façons de payer une somme de n francs en pièces de 10, 20, 50 ou 100 centimes ?» La réponse étant : $N_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(5n+6)$

Ce n'est en fait qu'un cas particulier du calcul de S_i , pour $y = 0$. Pour $y = 2$ (donc le nombre de façons de payer n francs et 20 centimes en pièces de 10, 20, 50 ou 100 centimes), on aurait $N_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(5n+4)$.

Alors que Marie-Laure Chaillout, elle, rajoute les pièces de 5 centimes : le nombre de manières de payer 199,20 FF en pièces de 5, 10, 20, 50 centimes, 1, 2, 5 et 10 FF vaut : **3 397 980 594 955**.

Ces nombres semblent énormes, mais, nous dit Edgard Delplanche (Créteil), il est peut-être utile de rappeler le nombre de partitions en entiers positifs de 200 : 3 972 999 029 388, calculé par MacMahon et cité par Hardy and Wright.

Deux questions se sont posées à propos de cet énoncé : d'abord, dans quelle mesure a-t-on besoin d'un ordinateur pour faire des mathématiques ? René Manzoni nous propose deux programmes élémentaires, l'un en Turbo-Pascal 6.0 et l'autre en Turbo-C 2.0, confirmant le résultat qu'il a, par ailleurs, trouvé «mathématiquement», et dont l'exécution, sur ordinateur 486 DX - 33 Mhz, a demandé respectivement 2h20mn et 2h32mn. C'est le Pascal qui gagne ! et le mathématicien gagne quelques heures de sommeil au détriment de sa machine. Néammoins, les résultats obtenus par ordinateur ne sont pas tous exacts, même si l'erreur est alors imputable, non à la machine, mais au programmeur.

PROGRAMME EN TURBO-PASCAL (6.0)

```
PROGRAM Monnaie ;
USES  Crt , Dos ;
VAR   t,u,v,w,x,y,u1,v1,v2,w1,x1,y1,y2:Integer ;
      k0,k1,p : LongInt;
BEGIN
  ClrScr ; k0:=0 ; k1:=0 ; p:=1000000;
  FOR t:=0 TO 19 DO
   BEGIN u1:=39-2*t;
   FOR u:=0 TO u1 DO
     BEGIN v1:=5*(u1-u)+4 ; v2:=v1 DIV 2 ;
     FOR v:=0 TO v2 DO
       BEGIN w1:=v1-2*v ;
       FOR w:=0 TO w1 DO
         BEGIN x1:=2*(w1-w);
         FOR x:=0 TO x1 DO
           BEGIN y1:=5*(x1-x)+2 ; y2:=y1 DIV 2 ;
           FOR y:=0 TO y2 DO
             BEGIN
                Inc(k0) ;
                IF k0:=p  THEN
                    BEGIN
                       k0:=0 ; Inc(k1) ;
                    END;
             END;
END;END;END;END;END;
Writeln('   Le nombre de façons de payer 199,20
francs en pièces de 10, 20, 50 centimes,');
Writeln(' et de 1, 2, 5, 10 francs, est égal à :');
Writeln ;
Write('      '); Write(k1);
FOR t:=1 TO 6 DO
  BEGIN
      p:=p DIV 10;
      Write(k0 DIV p);
      k0:=k0 MOD p;
  END;
Writeln;
REPEAT UNTIL KeyPressed;
END.
```

PROGRAMME EN TURBO C (2.0)

```
/*PAIEMENT*/
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
main( )
{
int t,u,v,w,x,y,u1,v1,v2,w1,x1,y1,y2;
long int k0=0, k1=0, p= 1 000 000;
for (t=0; t<=19; t++)
  {u1=39-2*t;
  for(u=0; u<=u1; u++)
    {v1=5*(u1-u)+4; v2=v1/2;
    for (v=0; v<=v2; v++)
      {w1=v1-2*v;
      for(w=0; w<=w1; w++)
        {x1=2*(w1-w);
        for (x=0; x<=x1; x++)
          {y1=5*(x1-x)+2; y2=y1/2;
          for(y=0; y<=y2; y++)
            {
              k0++
              if(k0==p) {k0=0; k1++;}
            }
} } } } }
printf ("  Le nombre de façons de payer 199,20
     francs en pièces de 10,20,50 centimes, \n");
printf ("et de 1, 2, 5, 10 francs, est égal à:\n");
printf ("\t% ld", k1);
  for (t=1; t<=6; t++)
    {
      p=p/10;
      printf ("% ld", k0/p);
      k0=k0 % p;
    }
printf ("\n");
do {} while (! kbhit( ));
}
```

Enfin et surtout, la question posée peut être envisagée comme un cas particulier des développements «à la Herschell» : le nombre cherché est l'exposant de x^{1992} dans le développement en série de

$$\frac{1}{\left[(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100})\right]}.$$

Et c'est ce qui a beaucoup préoccupé, notamment, M.VIDIANI (Dijon), qui en a profité pour tester sur ce genre de développement le programme Maple sous Windows, sur un 486 à 66 Mhz. Plus précisément, l'ordinateur calcule le polynôme $\dfrac{(1-x^{100})^6}{\left[(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})\right]}$,

de degré 512, qu'il suffit de multiplier par $\dfrac{1}{(1-x^{100})^7}$ pour obtenir le résultat voulu. Le résultat, après quelques essais, est un impressionnant document de vingt pages obtenu en seulement quelques secondes, sous réserve que l'addition finale est laissée aux soins du lecteur (je l'ai vérifiée : ça marche!).

Toutefois, le fait que cet énoncé puisse être résolu par une méthode lourde mais très générale ne signifie pas qu'il faille recourir à cette méthode très générale pour traiter ce problème très particulier. L'intérêt d'un problème de ce type n'est pas seulement de prouver qu'on peut le résoudre comme cas particulier d'un problème classique et général, mais surtout de prouver qu'on peut le résoudre autrement, compte tenu de ses particularités, au prix de calculs qui ne sont pas démesurés par rapport au problème. Je reconnais qu'il y a là matière à débat…

ÉNONCÉ N°208 (Eugène EHRHART, Strasbourg).

Construire un point dont la somme des distances aux sommets d'un tétraèdre isocèle soit minimum (un tétraèdre «isocèle» est un losange gauche avec ses deux diagonales).

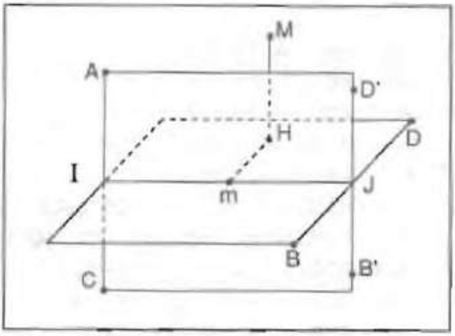
SOLUTION de R.RAYNAUD (Digne).

Soit $ABCD$ un tétraèdre isocèle : $AB = BC = CD = DA$.

Chacun des segments $[AC]$ et $[BD]$ est dans le plan médiateur de l'autre, et la droite (IJ) qui joint leurs milieux respectifs est leur médiatrice commune.

Soit M un point quelconque de l'espace. Projetons-le orthogonalement en

m sur (IJ) et en H sur le plan BDI ; $(mH) \perp (IJ)$.
$MB + MD \geq HB + HD$
$HB + HD \geq mB + mD$.
Donc $MB + MD \geq mB + mD$.
De même $MA + MC \geq mA + mC$.
Le point M rendant la somme $S = MA + MB + MC + MD$ minimale est donc à rechercher sur la droite (IJ).



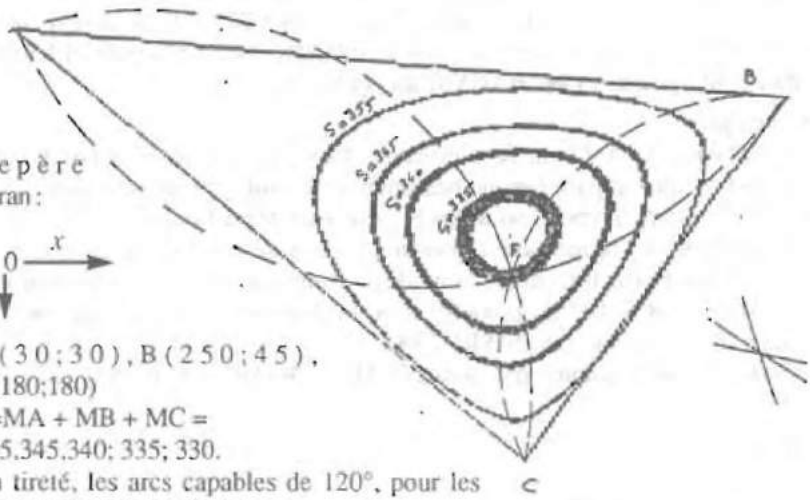
Par rotation autour de (IJ), amenons $[BD]$ en $[B'D']$ tel que $\overrightarrow{B'D'}$ ait la direction et le sens de $\overrightarrow{CA}$.
Pour tout point M de (IJ), $S = 2(MA + MB')$.
Et S est minimale quand M est le point commun à (IJ) et (AB').

Autres solutions:
Pierre BARNOUIN (Cabris), Michel BIGOT (Octeville), Guy BOUCHER (Paris), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Jean LEFORT (Wintzenheim), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), Maurice PERROT (Paris), Marguerite PONCHAUX (Lille) et Michel TANGUY.

Remarque :
Ce problème de la somme dses distances d'un point à trois ou quatre points du plan ou de l'espace fascine beaucoup de lecteurs et revient souvent, par exemple comme proposition d'article (voir également l'énoncé 181). Voici, par exemple, un programme informatique proposé l'an passé par J. COUVERT (La Ferté Bernard), pour déterminer des lignes de niveau de $S = MA + MB + MC$ et approcher le point de Fermat rendant cette somme minimale (programme en BASIC GFA).
FERMAT GFA Somme des distances MA+MB+MC = Cste (N%) BASIC GFA

```
PRINT "Donnez les coordonnées des sommets A,B,C (319 x 199)"
INPUT "coordonnées de A:";xa,ya
INPUT "coordonnées de B:";xb,yb
INPUT "coordonnées de C:";xc,yc
INPUT "Valeur de S=MA+MB+MC recherchée ";n%
' tracé du triangle
```

```
CLS
LINE  xa,ya,xb,yb
LINE  xb,yb,xc,yc
LINE  xc,yc,xa,ya
* tracé de la ligne de niveau n%
DIM   s%(319,199)
FOR j=MIN(ya,yb,yc) TO MAX(ya,yb,yc)
  FOR i=MIN(xa,xb,xc) TO MAX(xa,xb,xc)
   ma=SQR((i-xa)^2+(j-ya)^2)
   mb=SQR((i-xb)^2+(j-yb)^2)
   mc=SQR((i-xc)^2+(j-yc)^2)
   s%(i,j)=INT(ma+mb+mc)
    IF s%(i,j)=n% OR s%(i,j)=n%-10 OR s%(i,j)=n%-15
OR s% (i,j) = n% - 20…
       PLOT i,j
   ENDIF
  NEXT i
NEXT j
VOID INP(2)
```



Repère écran :

0 x →

y ↓

A(30;30), B(250;45), C(180;180)

S=MA + MB + MC = 355.345.340; 335; 330.

En tireté, les arcs capables de 120°, pour les côtés [AB], [BC] et [CA].

Leur point commun, F, est le point de Fermat : FA + FB + FC minimum.

Variation non linéaire du diamètre des ovales en fonction de S.

Le point de Fermat ne se trouve pas au centre de ces ovales ?

Nos lecteurs trouveront la solution de l'énoncé 209 dans le Bulletin n° 392.