Mots flous

Contrôler, Décrire, Vérifier

Commission Mots

CONTRÔLER

Pour qui ne se considère pas comme infaillible, il est bon, voire indispensable, de contrôler le résultat qu'il vient d'obtenir, c'est-à-dire de chercher à s'assurer de son exactitude.

Si le contrôle fait apparaître une anomalie, une contradiction, dans le résultat, c'est que ce dernier est incomplet, imprécis ou même erroné (sans qu'on sache, en général, quels oublis ou erreurs ont été commis). Sinon, le contrôle augmente la crédibilité du résultat, mais sans garantir son exactitude.

On espère fermement que le contrôle effectué ne comporte lui-même aucune erreur, faute de quoi, il serait plus nuisible qu'utile.

I- Les contrôles sont **de plusieurs sortes**, selon la qualité des informations qu'on attend d'eux. Voici des exemples :

I.1- Pour contrôler le résultat d'un calcul numérique, qu'il soit obtenu à la mais ou par une calculette, on peut calculer mentalement un **ordre de grandeur** (par exemple, 43×37 est voisin de 40×40, soit 1 600) ; on peut utiliser le «contrôle par 9» (improprement appelé «preuve par 9» (voir DEMONTRER-PROUVER-ÉTABLIR dans le *Bulletin* 384). On peut faire un autre calcul en utilisant par exemple une identité connue :

$$43 \times 37 = (40 + 3)(40 - 3) = 1\,600 - 9 = 1\,591.$$

On peut contrôler une identité grâce à des applications numériques : ainsi on démontre que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ n'est pas une identité puisque, par exemple $(1 - 2)^2$ n'est pas égal à $1^2 + 2^2$.

On peut contrôler le développement d'un produit de polynômes en vérifiant **le degré et le nombre de termes** du résultat.

On peut contrôler le calcul d'une longueur, d'un angle, des coordonnées d'un point par un **dessin** et des **mesurages**. On peut inversement contrôler un dessin par un calcul, compte tenu des inévitables imprécisions du dessin.

On peut contrôler le résultat d'un calcul portant sur des grandeurs en considérant **l'homogénéité** (voir MOTS VI, paragraphe X1-4), en se demandant si le résultat est **plausible** (l'élève qui trouve 4 km comme largeur d'une autoroute devrait sursauter...)

I.2- On peut contrôler le calcul du quotient de 2964 par 39 en multipliant le résultat par 39, une factorisation d'un polynôme en développant le produit obtenu. On fournit ainsi **une nouvelle démonstration** et non pas seulement un contrôle.

On contrôle le résultat de la résolution d'une équation en substituant à l'inconnue chacun des nombres obtenus. Mais attention ! l'ensemble des nombres ainsi validés comme solutions n'est pas forcément l'ensemble des solutions !

II- Le mot «contrôle» est parfois employé à tort.

II.1- Soit à résoudre l'équation dans **R** :

$$|x + 1| = 3 - 2x .$$

Voici une méthode :

1°) Soit l'équation E' dans **R** : $(x + 1)^2 = (3 - 2x)^2$.

Si un nombre est solution de E, alors il est solution de E'. On résout E' ; elle a deux solutions : 4 et 2/3.

2°) Reste à savoir :

- si 4 est solution de E ; la substitution de 4 à x dans E prouve que non ;
- si 2/3 est solution de E ; la substitution de 2/3 à x dans E prouve que oui.

3°) En conclusion, la seule solution est é/3.

Les deux substitutions effectuées dans le 2° ne sont pas des contrôles ; elles constituent une partie de la résolution. Dire, après la résolution de E' : «Contrôlons si 4 et 2/3 sont solutions de E» (ou pire : «contrôlons que 4 et 2/3 sont solutions de E»), c'est laisser entendre que la présence de 4 résultait d'une erreur, et occulter l'articulation logique de la résolution.

Le mot **vérification** relève ici exactement des mêmes reproches que **contrôle** (voir VÉRIFIER).

II.2- Plus généralement, quand une démonstration comporte la recherche d'une condition nécessaire (appelée parfois "partie directe"), ensuite la preuve que cette condition est aussi suffisante ("partie réciproque") [1], cette réciproque est **une étape de la démonstration**, et non pas un contrôle (ni une vérification).

III- Au contraire, lorsqu'on démontre par récurrence qu'une équation dans **N** d'inconnue n est une identité dans **N**, on doit s'assurer qu'on obtient une égalité vraie en remplaçant n par 0 (par exemple) ; si on éprouve le besoin de remplacer aussi n par 1, 2, ..., il s'agit alors de contrôles et non de calculs indispensables à la démonstration.

DÉCRIRE

Voilà un mot souvent utilisé sans que soient précisées ses conditions d'utilisation. Or, à y regarder de près, ces conditions ne s'imposent pas d'elles-mêmes.

1- → «Cette route décrit de nombreux lacets».

→ «Le centre de la Terre décrit une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers».

→ «Quand a décrit **R**, le point de coordonnées ($\cos a$, $\sin a$) décrit un cercle».

→ «Quand un point décrit une droite, son symétrique par rapport à un point donné décrit une droite».

→ «Quand x décrit **R**, $\sqrt{x^2} = |x|$ ».

La première phrase relève du langage courant.

Dans le deuxième, et plus généralement en cinématique, *décrire* signifie «avoir pour trajectoire», la trajectoire étant l'ensemble des positions occupées par le point mobile au cours du mouvement.

La troisième est d'ordre géométrique. Mais il suffit d'interpréter a comme la variable «temps» pour revenir à la cinématique.

La quatrième parle de l'image d'une courbe par une transformation ponctuelle.

La cinquième de relève ni de la géométrie ni de la cinématique.

2. Ainsi, dans les trois premières phrases, on peut donner une définition de **décrire.** Dans la quatrième, la cinématique en donne (clandestinement) une

1 On disait autrefois «démonstration par analyse et synthèse». Voir à ce sujet la brochure A.P.M.E.P. n°76 : *«Analyse et synthèse»* de Georges Glaeser.

image mentale ; mais en géométrie, où tout est figé ? Et dans la cinquième phrase ?

3. En mathématiques, **décrire** ne s'emploie que dans des expressions du type «x décrit E», x étant une lettre dite ici *variable* (ou *élément générique*) et E un ensemble dit *référentiel*.

4. En géométrie, «avoir pour lieu géométrique» a le sens de *décrire*.

5. «x est élément de E» a un sens. Il ne faut pas confondre cette phrase avec «x décrit E», qui, isolé, n'en a pas. Par exemple, quand x décrit **N**, x est élément de **R** ($x \in$ **R**) mais ne décrit pas **R**.

Cette distinction est occultée lorsqu'on remplace «$\forall_E x$» par «$\forall\, x \in$ E» ; en outre, dans cette dernière écriture, le symbole $\in$ se lit «appartenant à» ou «élément de » et non pas, comme il se devrait, «appartient à» ou «est élément de ».

VÉRIFIER

I. Ce mot est à peu près synonyme de *contrôler*.

Néanmoins, l'ordre de grandeur, la plausibilité, ... sont plutôt des contrôles que des vérifications. Il semble qu'un résultat à vérifier est *a priori* moins suspect d'inexactitude qu'un résultat à contrôler ...

II. En outre, **vérifier** a un sens que n'a pas **contrôler** : vérifier une équation, une inéquation, ... c'est en être solution.

Par exemple, 3 vérifie l'équation dans **R** : $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ (on dit aussi «3 satisfait à cette équation») ; 2 ne la vérifie pas (on pourrait dire que 2 la «falsifie», mais l'usage ignore cette tournure !).

On ne dit jamais : «3 contrôle cette équation».

Dans cette acception, le sujet de **vérifier** est un être mathématique, alors que les autres acceptions (celle du paragraphe I), le sujet est un être humain.