Examens et concours

Agrégation interne

session 1991
Deuxième épreuve de mathématiques

Solution(s) : indications
et compétences mobilisées

Christian JEANBRAU

L'énoncé de cette épreuve a été donné dans le *Bulletin n°384* (juin-juillet 92)

Remarque préliminaire : on nous dispense du détail indigeste et préalable des notations du texte. Bon début !

Première Partie

$$(E_0) \qquad 3(x^2+x)y'' + (8x+3)y' + 2y = 0$$

1.1 On a immédiatement :

$$y = 1 + \quad \Sigma_{n\geq 1}\, a_n x^n$$
$$y' = a_1 + \quad \Sigma_{n\geq 1}(n+1)a_{n+1}x^n$$
$$xy' = \quad \Sigma_{n\geq 1} n a_n x^n$$
$$xy'' = \quad \Sigma_{n\geq 1}(n+1)n a_{n+1}x^n$$
$$x^2y'' = \quad \Sigma_{n\geq 1} n(n-1)a_n x^n$$

(E_0) s'écrit alors :

$$(2+3a_1) + \Sigma_{n\geq 1}\,[(n+1)(3n+2)a_n + 3(n+1)^2a_{n+1}].x^n = 0$$

Soit : $a_1 = -2/3$ et , pour tout $n \geq 1$: $a_{n+1} = -\,[(3n+2)/(3n+3)]a_n$

<u>Intervalle de convergence</u> : $\lim_{n\,\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$

Le rayon de convergence est égal à 1

On peut examiner la convergence aux bornes , soit aux points -1 et +1 .On sait que , si la série entière $\Sigma_{n\geq 0}\, a_n z^n$ converge au point $Re^{i\theta}$ de son cercle de convergence , elle converge uniformément sur le segment $[0 , Re^{i\theta}]$ et sa somme est continue sur ce segment *(cf. note en fin de cette partie).*

Au point $x = -1$:

$\Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n = \Sigma_{n\geq 0}\, |a_n|$; $|a_{n+1}/a_n| = 1 - 1/3n + o(1/n)$

On applique la règle de Raabe_Duhamel : $\Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$ diverge .

Au point $x = 1$:

$\Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n = \Sigma_{n\geq 0}\, a_n = \Sigma_{n\geq 0}\, (-1)^n |a_n|$; série alternée . On pose : $v_n = \ln|a_{n+1}/a_n| = \ln|a_{n+1}| - \ln|a_n|$.

La série (Σv_n) et la suite $(\ln|a_n|)$ sont de même nature ; de plus : $\ln|a_n| = \Sigma_{1\leq k\leq n-1}\, v_k$.

Or , au voisinage de l'infini , $v_n \sim -1/3n$: la série Σv_n diverge ; c'est une série à termes tous négatifs :

$$\lim_{n\infty} \Sigma_{k\leq n}\, v_k = -\infty.$$

D'où $\lim_{n\infty} \ln|a_n| = -\infty$. Soit : $\lim_{n\infty} |a_n| = 0$. La suite $|a_n|$ est trivialement décroissante ; c'est le critère spécial aux séries alternées : le module du terme général tend vers zéro en décroissant ; $\Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$ converge au point $x=1$.

Bilan : $\Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$ converge sur $]-1,1]$. La fonction_série entière $\Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$ est-elle pour autant sur $]-1,+1]$ solution de (E_o) ?

Sa fonction_série dérivée , $\Sigma_{n\geq 0}\, n a_n x^n$, diverge au point $x=1$.

$$[(n+1)/n].|a_{n+1}/a_n| = 1+2/3n+o(1/n) :$$

la suite (na_n) est croissante à partir d'un certain rang et n'a pas pour limite 0 ... Bien que convergente sur $]-1,+1]$, la série entière $\Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$ n'est donc solution de (E_o) en tant que telle que sur $]-1,+1[$.

1.2 Par contre , soit $f(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$.

On a : $f(x) = 1 - (2/3)x + (5/9)x^2 - \ldots$

Or : $(1+x)^{-2/3} = 1 - (2/3)x + (5/9)x^2 - \ldots$

Par la relation de récurrence dégagée en 1.1 , on a :

$$a_n = (-1)^n (3n-1/3n)(3n-4/3n-3) \ldots (8/9)(5/6)(2/3)(1)$$

soit : $a_n = (-1)^n\, [2.5.8. \ldots .(3n-4)(3n-1)]/[3^n.n!]$

C'est le coefficient de x^n dans le développement en série entière de $(1+x)^{-2/3}$

D'où la reconnaissance de f(x) comme restriction à]-1,1] de la fonction :

$$x \longrightarrow (1+x)^{-2/3}$$

1.3

On connait donc explicitement une solution de (E_0)

Les calculs formels effectués à partir de l'expression explicite de f pour vérifier qu'il s'agit d'une solution de (E_0) sont valables sur tout intervalle de R\{-1} et on peut donc considérer (par intervalles , sur R \ {-1}) comme solution de (E_0) , la fonction :

$x \longrightarrow (1+x)^{-2/3}$. Soit g cette fonction .

On cherchera alors , sur R\{-1} , les autres solutions de Eo sous la forme : y = g.z

D'où l'équation différentielle en z : $3x(x+1).z'' + (4x+3).z' = 0$

D'où (sur R\{-1 , 0}) :

$$z''/z' = -(4x+3)/[3x(x+1)] = -1/x - (1/3).1/x+1$$

D'où : $z' = K/[x.(1+x)^{1/3}]$, K = Constante .

On primitive z' à l'aide d'une intégrale abélienne :

$\int dx / x(x+1)^{1/3}$; $u = (x+1)^{1/3}$: on est renvoyé à $\int 3udu / u^3-1$

$3u/u^3-1 = 1/u-1 + [-u+1] / (u^2+u+1)$ qui se primitive en

$\ln|(u-1) / (u^2+u+1)^{1/2}| + 3^{1/2}\text{Arctan}[(2u+1) / 3^{-1/2}]$ (+ C = Cte)

D'où l'ensemble des solutions de Eo ,sous la forme :

$$u = (1+x)^{1/3}$$

$$y = [K.[\ln|(u-1) / (u^2+u+1)^{1/2}| + 3^{1/2}\text{Arctan}[(2u+1)/3^{-1/2}]] + C]/u^2$$

<u>**Notes sur cette partie :**</u>

Les compétences mobilisées sont classiques :

- **. notion de série entière**
- **. calcul du rayon de convergence par la règle de d'Alembert**
- **. développement en série entière de x ----> $(1+x)^m$, pour m réel**
- **. intégration des équations différentielles linéaires**

d'ordre 2 connaissant une solution de l'équation homogène associée
. primitivation des fonctions rationnelles
. intégrales abéliennes : $\int f(x,(ax+b\ /\ cx+d)^{1/n})dx$

Dans le détail , on peut 'recadrer' quelques connaissances sur les problèmes associés à la convergence d'une série entière en un point de son cercle de convergence :

<u>Résultat :</u> Si une série de Taylor , $\Sigma_{n\geq 0}\ a_n z^n$, converge au point $Re^{i\theta}$ de son cercle de convergence $|z| = R$, alors , elle converge uniformément sur tout fermé K du disque $|z| \leq R$ n'ayant en commun avec le cercle que le point $Re^{i\theta}$, contenu dans un angle de mesure strictement inférieure à π , de sommet $Re^{i\theta}$, de bissectrice $[Re^{i\theta}\ , 0]$. Elle converge , en particulier , uniformément sur le segment $[0\ , Re^{i\theta}]$ et sa somme est continue sur ce segment . *La démonstration utilise la transformation d'Abel ; cf. par exemple , L.Schwartz . Analyse (Topologie générale et analyse fonctionnelle) Hermann Ed. Page 200 .*
Appliqué aux séries réelles , ce résultat incite à l'étude de la nature de la série aux bornes de l'intervalle de convergence , en vue d'un prolongement de l'intervalle de validité des propriétés de la somme . Une situation usuelle , quand on a utilisé la règle de d'Alembert , est celle du texte :

$$R.|a_{n+1}\ /\ a_n| = 1 - \alpha^2/n + o(1/n)$$

Si $\Sigma_{n\geq 0}\ a_n\varepsilon^n R^n$, $\varepsilon=1$ ou $\varepsilon=-1$, est à termes de signe fixe , on peut utiliser la règle de Raabe-Duhamel :

$u_n = 1/n^\beta$; $u_{n+1}/u_n = (1+1/n)^{-\beta} = 1 - \beta/n + o(1/n)$

$\alpha^2<1$ ==> (il existe β) $\alpha^2 < \beta < 1$; $u_{n+1}/u_n \leq |a_{n+1}/a_n|.R$

$\Sigma\ u_n$ diverge , donc aussi $\Sigma|a_n|R^n$ qui n'est autre que $\Sigma a_n\varepsilon^n R^n$.

$\alpha^2 > 1$ ===> (il existe β) $1 < \beta < \alpha^2$; $u_{n+1}/u_n \geq |a_{n+1}/a_n|.R$

Σu_n converge , donc aussi .... $\Sigma a_n\varepsilon^n R^n$.

Si $\Sigma\ a_n\varepsilon^n R^n$ est alternée , on peut contrôler la convergence

par le critère spécial aux séries alternées (module du terme général tendant vers zéro en décroissant) . La monotonie de $|a_n|R^n$ est une évidence par le développement limité associé à la règle de d'Alembert . Par ailleurs :

$$|a_n|R^n / |a_1|R = \Pi_{1\le k\le n-1}[|a_{k+1}/a_k|R] \quad , \text{ d'où on tire :}$$

$$\ln[|a_n|R^n] = \Sigma_{1\le k\le n-1} [1-\alpha^2/k + o(1/k)] + \ln[|a_1|R]$$

$\ln[|a_n|R^n]$ apparaît comme somme d'ordre n-1 d'une série numérique divergente à termes négatifs . On en déduit :
$\lim_{n\_\text{infini}} \ln[|a_n|R^n] = -\infty$

soit : $\lim_{n\_\text{infini}} |a_n|R^n = 0$ .... et le résultat annoncé .

On peut estimer à 1 heure le temps nécessaire à la recherche_rédaction de cette partie .

Deuxième Partie

2.1 (a_n) converge : $\lim_{n\infty} a_n = \lambda$; donc , pour n assez grand : $|a_n| \le |\lambda| + 1$; on a alors :

$$|a_n z^n / n!| < (|\lambda| + 1).| z^n / n! |$$

La série $\Sigma_{n\ge 0}\, z^n / n!$ converge absolument pour tout z , donc aussi , par cette majoration , $\Sigma_{n\ge 0}\, a_n z^n / n!$, et le résultat .

En déduire .... : $\Sigma_{n\ge 0}\, u_n$ converge ===> $\lim_{n\infty} u_n = 0$ et (il existe S ..) $\lim_{n\infty} S_n = S$. On applique simplement le résultat précédent aux suites: $a_n = u_n$, puis , $a_n = S_n$.

2.2 $B(x) = e^{-x}.\Sigma_{n\ge 0}\, S_n x^n / n! = e^{-x}.\beta(x)$

$\beta(x)$ est somme d'une série entière de rayon de convergence infini ; c'est une fonction intégrable et dérivable terme à terme sur tout R ; son produit par e^{-x} est évidemment dérivable . On peut écrire :

$B'(x) = e^{-x} [-\Sigma_{n\geq 0}\, S_n x^n / n! + \Sigma_{n\geq 1}\, S_n x^{(n-1)} / (n-1)!]$

$B'(x) = e^{-x}.[-\Sigma_{n\geq 0}\, S_n x^n / n! + \Sigma_{n\geq 0}\, S_{(n+1)} x^n / n!]$

$B'(x) = e^{-x}.[\Sigma_{n\geq 0}\, (S_{(n+1)} - S_n) x^n / n!]$

or : $S_{(n+1)} - S_n = u_n$, d'où :

$B'(x) = e^{-x}.[\Sigma_{n\geq 0}\, u_n x^n / n!]$

Par $S_0 = 0$, on a : $B(0) = 0$; on peut donc écrire :

$B(x) = B(x) - B(0) = \int_{[0,x]} B'(t)dt = \int_{[0,x]} e^{-t}.[\Sigma_{n\geq 0}\, u_n t^n / n!]dt$

2.3

a) L=0

... pour tout $\varepsilon > 0$ donné , il existe n_0 tel que:
$n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n| \leq \varepsilon$. Avec des abus de notation évidents , on peut écrire : $\Sigma_{n\geq 0} = \Sigma_{n<no} + \Sigma_{n\geq no}$

$e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0} = [e^{-x}.\Sigma_{n<no}] + [e^{-x}.\Sigma_{n\geq no}]$ (*)

$x \longrightarrow \Sigma_{n<no}$ est une fonction polynome

$\lim_{x\infty} e^{-x}.\Sigma_{n<no} = 0$

$|e^{-x}.\Sigma_{n\geq no}| \leq \varepsilon.e^{-x}.\Sigma_{n\geq no} |x|^n / n! \leq \varepsilon$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné , on choisit donc n_0 par $\varepsilon/2$, et $A>0$ tel que , pour $x>A$, $|e^{-x}.\Sigma_{n<no}| \leq \varepsilon/2$. Par ce choix de n_0 , pour tout x , $|e^{-x}.\Sigma_{n\geq no}| \leq \varepsilon/2$. Finalement , pour tout $x > A$, on aura , en exploitant (*) ci-dessus : $|e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0}| \leq \varepsilon$. C'est bien la définition 'en ε' de : $\lim_{x\infty} e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0} = 0$.

b) L quelconque

$a_n = L + (a_n - L)$

$b_n = a_n - L$

$\lim_{n\infty} b_n = 0$

$e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0}\, a_n.x^n / n! = e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0}\, L x^n / n! + e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0}\, b_n x^n / n!$

$e^{-x}\Sigma_{n\geq 0} L x^n / n! = L e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0} x^n / n! = L$ ... et on applique alors à $[\, e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0}\, b_n x^n / n!\,]$ le résultat du a) .

2.4 Application directe de ce qui précède :

$\Sigma_{n\geq 0}\, u_n = \lim_{n\infty} Sn$

Par 2.2 on a :

$$e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0}\, S_n x^n / n! = \int_{[0,x]} e^{-t}.\Sigma_{n\geq 0}\, u_n t^n / n!\, dt$$

Par 2.3 , on a :

$$\lim_{x\infty} e^{-x}.\Sigma_{n\geq 0}\, S_n x^n / n! = \lim_{n\infty} S_n \quad (= \Sigma_{n\geq 0}\, u_n\,)$$

Donc :

$\lim_{x\infty} \int_{[0,x]} e^{-t}.\Sigma_{n\geq 0}\, u_n t^n / n!\, dt = \Sigma_{n\geq 0}\, u_n$ ..... ce qui n'est autre que le résultat demandé .

2.5 $\Sigma\, u_n$ diverge .....

Soit α un réel non congru à 0 modulo 2π ; on peut poser $u_n = e^{\,i\alpha}$; par $|u_n|=1$, la divergence de la série Σu_n est acquise (le terme général de cette série ne tend pas vers 0 ...).

On a :

$$\Sigma_{n\geq 0}\, u_n t^n / n! = \Sigma_{n\geq 0}\, (te^{\,i\alpha})^n / n! = \exp(te^{\,i\alpha}) = / \ldots$$

$$\ldots / \;=\; e^{\,t\cos\alpha + i\, t\sin\alpha}$$

Donc :

$$\int_{[0,+\infty[} e^{-t}.\Sigma_{n\geq 0}\, u_n t^n / n!\, dt = \int_{[0,+\infty[} e^{\,bt}\, dt = \ldots$$

(avec :

$b = t\,(\cos a - 1\,) + i\, t\sin a$

d'où :)

$\ldots = [1/b]\,[e^{\,bt}\,]_{[0,+\infty[} = -1/b$ (par $\cos a - 1 < 0$)

C'est un contre exemple tel que suggéré !

Notes sur la deuxième partie :

RAS ! Les notions requises sont classiques et les

questions sans difficulté . Moyennant un peu de soin et d'attention , la partie doit s'étudier et se rédiger en une heure .

Un bon point supplémentaire pour l'annonce globale , in fine , du sens de l'étude à suivre

Troisième Partie

3.1 L'équation différentielle proposée est linéaire et scalaire . Elle est en outre résoluble en y" sur]0,+∞[et , dans la forme obtenue , y" = b(x)y' + c(x)y , b et c sont des fonctions continues sur]0,+∞[. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité d'une solution sur]0,+∞[répondant à des conditions initiales données . C'est le résultat demandé .

3.2 Recherche de $y(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$, avec $a_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
y &= \Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n \\
2y' &= \Sigma_{n\geq 0}\, 2na_n x^{(n-1)} = \Sigma_{n\geq 0}\, 2(n+1)a_{(n+1)} x^n \\
7xy' &= \Sigma_{n\geq 0}\, 7na_n x^n \\
3xy'' &= \Sigma_{n\geq 0}\, 3n(n-1)a_n x^{(n-1)} = \Sigma_{n\geq 0}\, 3n(n+1)a_{n+1} x^n \\
3x^2y'' &= \Sigma_{n\geq 0}\, 3n(n-1)a_n x^n
\end{aligned}$$

D'où :

$$\Sigma_{n\geq 0}\, [(n+1)[(3n+1)a_n + (3n+2)a_{n+1}]]x^n = 0$$

D'où :

pour tout $n\geq 0$: $a_{n+1} = -[(3n+1)/(3n+2)]\, a_n$

Le rayon de convergence est trivialement 1 .

On pose : $F(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$,

$a_0 = 1$

$a_{n+1} = -[(3n+1)/(3n+2)]a_n$

3.3 $G(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n / n!$

On applique la règle de d'Alembert :

$|a_{n+1}x^{n+1} / (n+1)!| / |a_n x^n / n!| = |a_{n+1}/a_n|.|x/n+1|$

Limite nulle, pour n infini, quel que soit x. G est bien définie comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

$G(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n / n!$

$2G'(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, 2na_n x^{n-1} / n! = \Sigma_{n\geq 0}\, 2(n+1)a_{n+1}x^n / (n+1)!$

$3xG'(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, 3na_n x^n / n!$

$3xG''(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, 3n(n-1)a_n x^{n-1}/n! = \Sigma_{n\geq 0}\, 3n(n+1)a_{n+1}x^n/(n+1)!$

D'où :

$$3xG''(x)+(3x+2)G'(x)+G(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, b_n x^n / n!$$

avec :

$$b_n = [(3n+2)a_{n+1} + (3n+1)a_n] / n!$$

On a donc, pour tout $n \geq 0$: $b_n = 0$

G est bien solution sur R de (E_1)

3.4 Pour tout x de $]-1,+1[$: $F(x) = \Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n$

pour x fixé, $u_n = a_n x^n$ est le terme général d'une série numérique à laquelle on peut appliquer les résultats de la partie 2. En particulier, le résultat 2.4 :

$$\Sigma_{n\geq 0}\, u_n = \int_{[0,+\infty[} e^{-t}.\Sigma_{n\geq 0} u_n t^n / n!\, dt$$

D'où, directement, pour tout x de $]-1,1[$:

$$F(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-t}\, \Sigma_{n\geq 0}\, a_n x^n t^n / n!\, dt$$

$$F(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-t}.G(xt)\, dt$$

Notes sur la troisième partie

Mêmes compétences que dans la partie précédente. Une remarque toutefois sur la question 3.1 : elle se réduit

en fait à un recours (magique !) au théorème de Cauchy-Lipschitz dont on n'attend visiblement rien d'autre que la référence à y faire . On peut se reporter par exemple aux cours de mathématiques spéciales édités par Dunod (Ramis-Deschamps-Odoux ; tome 4) ou par Masson (Arnaudiés-Fraysse ; tome 3) .

> **Mais s'agit-il de compétence ou d'énoncé formel ? Partie facile , quoi qu'il en soit et qui peut se résoudre / rédiger environ en 30 minutes .**

Quatrième Partie

4.1 Remarquer simplement que : $<(x,y) \mid (x',y')> = xx'+(1/2)yy'$ est un produit scalaire sur R^2 . Les vérifications sont triviales et la propriété demandée en découle directement.

4.2 pour tout (x,y) de R^2 , tout t non nul , on a :
$L_t(x,y) = ((-2/3t)x+y/4\ ,\ x)$
$\| L_t(x,y) \|^2 = [(-2/3t)x+y/4]^2 + x^2/2$

Se fait par exemple ' à la main ' :

$\| L_t(x,y) \|^2 \le k^2.\|(x,y)\|^2$ équivaut à

$(y/4 - 2x/3t)^2 + x^2/2 \le k^2(x^2 + y^2/2)$ soit

$U(x,y) = (1/16 - k^2/2)y^2 - xy/3t + (4/9t^2 + 1/2 - k^2)x^2 \le 0$

La forme quadratique U(x,y) est de signe fixe si et seulement si son discriminant $\Delta(k,t)$ est négatif ou nul ; soit :

$\Delta(k,t) = 1/9t^2 - 4(1/16 - k^2/2)(4/9t^2+1/2-k^2)$
$\Delta(k,t) = 8k^2/9t^2 - (1/8)(1-8k^2)(1-2k^2)$

$\Delta(k,t) \le 0$ équivaut à : $t^2 \ge 64k^2/[9(1-8k^2)(1-2k^2)]$

Le signe , fixe , de U(x,y) est alors celui du coefficient de y^2 (ou de x^2) , soit le signe de : $(1-8k^2)$. Pour $k > (1/2)^{1/2}$, $1-8k^2$ est négatif et U(x,y) est négatif ou nul pout tout t strictement supérieur à t_o , avec :

$$t_o = 8k/[9(1-8k^2)(1-2k^2)]^{1/2}$$

4.3 Globalement , on va écrire la récurrence proposée sous la forme courte , exploitant le symbole intégral comme s'étendant aux applications de R dans R^2 :

$$Z_o(t) = V_o \,;\, Z_n = (X_n, Y_n)$$

$$Z_{n+1}(t) = V_o + \int_{[to,t]} L_\lambda(Z_n(\lambda))\, d\lambda$$

On en déduit trivialement :

$$\|Z_1(t)-Z_o(t)\| = \|\int_{[to,t]} L\lambda(V_o) d\lambda\| = \|L\lambda(V_o)\| . \|\int_{[to,t]} d\lambda\| \; /$$

..

$$.. / = \|L\lambda(V_o)\|.|t-t_o| \leq k|t-t_o|.\|V_o\|$$

et (majoration de la norme de l'intégrale par l'intégrale de la norme :)

$$\|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)\| = \| \int_{[to,t]} L\lambda[Z_n(\lambda) - Z_{n-1}(\lambda)]\, d\lambda \| \quad .... /$$

$$/ \; ... \leq \int_{[to,t]} \|L\lambda[Z_n(\lambda) - Z_{n-1}(\lambda)]\|\, d\lambda$$

$$/ \; ... \leq \int_{[to,t]} k.\|Z_n(\lambda) - Z_{n-1}(\lambda)\|\, d\lambda$$

$$/ \; ... \leq k.\int_{[to,t]} \|Z_n(\lambda) - Z_{n-1}(\lambda)\|\, d\lambda$$

4.4 A partir de : $\|Z_1(t) - Z_o(t)\| \leq k|t-t_o|\|V_o\|$, on démontre par récurrence , pour tout $n \geq 1$ de N :

$$\|Z_n(t) - Z_{n-1}(t)\| \leq [k^n|t-t_o|^n / n!]\, \|V_o\|$$

... c'est une conséquence immédiate de la majoration intégrale obtenue en 4.3

On peut écrire , pour n>p :

$\|Z_n(t) - Z_p(t)\| \leq \Sigma_{1 \leq i \leq n-p} \|Z_{p+i}(t) - Z_{p+i-1}(t)\|$
d'où :

$$\|Z_n(t) - Z_p(t)\| \leq [\Sigma_{1 \leq i \leq n-p} (k(t-t_0))^{p+i} / (p+i)!\ ].\|V_0\|$$

qui est la majoration demandée . Sur tout intervalle $[t_0,t_1]$, on aura donc la majoration 'indépendante de t' :

$$\|Z_n(t) - Z_p(t)\| \leq [\Sigma_{p+1 \leq j \leq n} (k(t_1-t_0))^j / j!\ ].\|V_0\|$$

Notons $M_{p,n}$.$\|Vo\|$ ce majorant ; $M_{p,n}$ est la 'tranche' $p+1 \leq j \leq n$ de la série de terme général $(k(t_1-t_0))^n/n!$, convergente et de somme $\exp(k(t_1-t_0))$. La convergence de la série fait de la suite de ses sommes partielles une suite de Cauchy et permet de rendre $M_{p,n}$ aussi petit qu'on le veut pourvu que p soit suffisamment grand. On en déduit trivialement que la suite $Z_n(t)$ est uniformément de Cauchy sur $[t_0,t_1]$ et , à ce titre , uniformément convergente sur $[t_0,t_1]$ •

<u>Notes sur la quatrième partie</u>

R.A.S. Les compétences demandées sont usuelles .... L'ensemble est facile et doit pouvoir être recherché / rédigé en une demi - heure .

<u>Cinquième Partie</u>

5.1 (E_1) $3xy'' + (3x+2)y' + y = 0$

$$y = z.e^{-x/2}$$
$$y' = z'.e^{-x/2} - (1/2)z.e^{-x/2}$$
$$y'' = z''.e^{-x/2} - z'e^{-x/2} + (1/4)z.e^{-x/2}$$

D'où :

$$(E_2)\quad 3xz'' + 2z' - (3/4)xz = 0$$

5.2 En reprenant la notation $t \longrightarrow Z(t)$
pour $t \longrightarrow (X(t),Y(t))$
(E_3) se lit : $Z'(t) = L_t(Z(t))$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire et homogène .

$t \dashrightarrow L_t$ est une application trivialement continue. On sait qu'alors, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité d'une solution sur $]0,+\infty[$ répondant à une condition initiale $Z(t_0) = (a,b)$ donnée.

5.3 La suite de fonctions de la partie 4 est telle que :

pour tout t de $[t_0, +\infty[$: $Z_0(t) = Y_0 = (a,b)$

pour tout n de N : $Z_{n+1}(t) = Z_0 + \int_{[t_0,t]} L\lambda(Zn(\lambda))d\lambda$

d'où :

$Z_{n+1}(t_0) = Z_0 = (a,b)$

$Z'_{n+1}(t) = L_t(Z_n(t))$ (*)

Par passage à la limite pour n infini : $Z(t_0) = (a,b)$

Par 4.2 :

$$\|Z'_{n+1}(t) - Z'_{m+1}(t)\| \leq k \|Z_n(t) - Z_m(t)\|$$

La suite (Z'_n), comme la suite (Z_n), converge uniformément sur tout intervalle $[t_0,t_1]$. Cette double convergence uniforme est une condition forte, suffisante pour fonder la dérivabilité sur $[t_0,+\infty[$ de Z, limite de la suite (Z_n), avec Z' comme limite de la suite (Z'_n).

D'où, en passant à la limite dans (*) ci dessus :

$$Z'(t) = L_t(Z(t))$$

Z est bien, sur $[t_0, +\infty[$, solution de (E_3), répondant en outre à la condition intiale : $Z(t_0) = (a,b)$

5.4 Relecture de (E_2) :

$$3xz'' + 2z' - (3/4)xz = 0 \qquad \text{équivaut à ...}$$

$X = z'$; $Y = z$; $Z = (X,Y)$ avec : $Z'(t) = L_t(Z(t))$

soit : Z solution de (E_3)

Soit alors y une solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$

Soit z, $z(t) = y(t).e^{t/2}$; soit $a = z'(t_0)$, $b = z(t_0)$, $t_0>0$ introduit en partie 4.

Alors, la solution de $Z = (X,Y)$ de (E_3) associée à la condition intiale (a,b) est telle que, pour tout $t \geq t_o$, $Y(t) = z(t)$, soit : $y(t) = Y(t).e^{-t/2}$

On a, par 4.4 :

$$\|Z_n(t) - Z_p(t)\| \leq \|V_o\| \Sigma_{p+1 \leq m \leq n} \; k^m(t-t_o)^m/m!$$

soit, pour p=0 :

$$\|Z_n(t) - Z_o(t)\| \leq \|V_o\| \Sigma_{1 \leq m \leq n} \; k^m(t-t_o)^m/m!$$

soit : $\|Z_n(t)\| = \|(Z_n(t)-V_o) + V_o\| \leq \|V_o\| + \|Z_n(t) - V_o\|$

$$\|Z_n(t)\| \leq \|V_o\| \cdot \Sigma_{0 \leq m \leq n} \; k^m(t-t_o)^m/m!$$

et, par passage à la limite pour n infini :

$$\|Z(t)\| \leq \|V_o\| \Sigma_{m \geq 0} \; k^m(t-to)^m / m!$$

soit :

$$\|Z(t)\| \leq \|V_o\|.e^{k(t-to)}$$

Par ailleurs :

$$Z(t) = (X(t),Y(t)) \dashrightarrow \|Z(t)\| = [X^2(t)+Y^2(t)/2]^{1/2}$$

Donc:

$$|Y(t)| = 2^{1/2}[Y^2(t)/2]^{1/2} \leq 2^{1/2}\|Z(t)\| \leq 2^{1/2} \|V_o\|e^{k(t-to)}$$

$$|y(t)| = |Y(t)e^{-t/2}| = |Y(t)|e^{-t/2} \leq (2^{1/2}\|V_o\|e^{-kto}).e^{(k-1/2)t}$$

Toute solution y de (E_1) sur $]0,+\infty[$ est donc, pour t assez grand ($t \geq t_o$ avec les notations précédentes), majorée par une fonction du type $M_o e^{\alpha t}$, en posant :

$$M_o = 2^{1/2}\|V_o\|e^{-kto} \text{ et } \alpha = k-1/2$$

C'est la majoration demandée.

5.5 On étudie alors l'intégrale $\int_{[0,+\infty[} e^{-t}.G(xt)dt$

G, on l'a montré en 3.3, est une solution de (E_1), en particulier sur $[0,+\infty[$. On a donc, au voisinage de l'infini, par ce qui précède, la majoration :

$|e^{-t}G(xt)| \leq M_0 e^{(\alpha x-1)t}$

Pour que cette majoration conduise à l'absolue convergence de l'intégrale, il suffit que l'on ait : $\alpha x-1 < 0$ soit $k > 1/x + 1/2$.

Le raisonnement de 4.4 sur lequel on se fonde, suppose $k > 2^{-1/2}$. Il est donc nécessaire (et suffisant) pour obtenir une vakeur de k par l'inégalité $k > 1/x + 1/2$ que l'on ait :

$2^{-1/2} < 1/x + 1/2$ soit $x < 2 + 2^{3/2}$

Finalement :

Pour tout x positif majoré par $2+2^{3/2}$, et en particulier, pour tout x de $[1, 2+2^{3/2}[$, le caractère non vide de l'ouvert $]2^{-1/2}, 1/x+1/2[$ permet d'y choisir (arbitrairement) une valeur de k à partir de laquelle la démarche 4 soit applicable, avec une majoration exponentielle de G, par 5.4, conduisant à l'absolue convergence de l'intégrale figurant dans l'égalité 3.4.

5.6 G est solution de (E_1). Donc, par 5.1, $z(x)=G(x)e^{x/2}$ est solution de (E_2).

On a :

$$G(x) = z(x)e^{-x/2}$$

$$G'(x) = z'(x)e^{-x/2} - (1/2)z(x)e^{-x/2} \quad (*)$$

$$x \text{ décrit } [x_1, x_2],\ 0 < x_1 < x_2 < 2+2^{3/2}$$

Z étant la solution de (E_3) utilisée en 5.4, on a $Z=(X,Y)$ et $X=z'$. On peut donc écrire, en utilisant des résultats établis en 5.4 :

pour tout $t \geq to$ $\quad |z'(t)| = |X(t)| \leq ||Z(t)|| \leq ||Vo||e^{k(t-to)}$

pour tout $t \geq to$ $\quad |z'(t)e^{-t/2}| \leq (||Vo||e^{-kto})e^{(k-1/2)t}$

et donc, par (*), pour tout $t \geq to$:

$$|G'(t)| \leq |z'(t)e^{-t/2}| + (1/2)|z(t)e^{-t/2}|$$

$$|G'(t)| \leq M_1 . e^{\alpha t} \quad \text{avec :}$$

$$M_1 = ||Vo||(1+2^{-1/2})e^{-kto}$$

$$\alpha = k - 1/2$$

On en déduit, pour tout x de $[x_1, x_2]$, tout $xt \geq to$:

$e^{-t}.|G'(xt)| \le M_1.e^{(\alpha x-1)t}$ avec : $\alpha x-1 = (k-1/2)x-1$

$\alpha x-1 \le (k-1/2)x_2-1$

On pose : $\delta = 1-(k-1/2)x_2$;

On a : $\delta > 0 \iff k < 1/2+1/x_2$

En choisissant donc, au départ, k sur $]2^{-1/2}, 1/2+1/x_2[$, démarche déjà validée en 5.5, puis, t_1=to défini en fonction de k en 4.2, on obtient bien la majoration indiquée, valable pour tout x de $[x_1,x_2]$ et pour tout $t \ge t_1$.

On a obtenu, en 5.5, une majoration valable ici pour x sur $[x_1,x_2]$ et $t \ge t_1$=to : $e^{-t}.|G(xt)| \le M_o e^{-\delta t}$

Mais G est solution de (E1), d'où :

$G''(xt) = -(3xt+2)/(3xt).G'(xt) - G(xt)/3xt$

$|G''(xt)| \le (3xt+2)/3xt|G'(xt)| + |G(xt)|/3xt$

$e^{-t}.|G''(xt)| \le [[(3xt+2)M_1+Mo]/3xt].e^{-\delta t}$

La fonction $u \longrightarrow M_1+(Mo+2M_1)/u$ est une fonction décroissante de u. Donc, pour u=3xt, avec $x \ge x_1$ et $t \ge t_1$, elle est maximum pour $u=3x_1t_1$.

On pose $M_2 = M_1+(Mo+2M_1)/3x_1t_1$

Pour tout x de $[x_1,x_2]$, tout $t \ge t_2=t_1$: $e^{-t}.|G''(xt| \le M_2e^{-\delta t}$

Soit donc H, définie sur $]0,2+2^{3/2}[$ par :

$H(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-t}.G(xt)dt$

H(x) est une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.
On peut introduire les deux intégrales impropres associées :

$U(x) = \int_{[0,+\infty[} te^{-t}.G'(xt)dt$

$V(x) = \int_{[0,+\infty[} t^2e^{-t}G''(xt)dt$

Par les majorations obtenues en 5.5 et ci-dessus, ces trois intégrales impropres sont uniformément convergentes sur $[x_1,x_2]$ car elles vérifient le critère de Cauchy uniforme pour les intégrales impropres, globalement résumé par :

(pour tout $\varepsilon > 0$) (il existe $\alpha > 0$) (pour tous λ,μ de $[\alpha,+\infty[$)
(pour tout x de $[x_1,x_2]$) : $|\int_{[\lambda,\mu]} \cdots| \le \varepsilon$

On a en effet, dans les trois cas, pour $\mu > \lambda \geq \alpha \geq to=t_1=t_2$,
une majoration du type : $|\int_{[\lambda,\mu]} ....| \leq K.e^{-\delta\alpha}$

H : $|\int_{[\lambda,\mu]} ...| \leq Mo\int_{[\lambda,\mu]} e^{-\delta t}dt \leq Mo\int_{[\alpha,+\infty[} e^{-\delta t}dt \leq (Mo/\delta)e^{-\delta\alpha}$

U : $|\int_{[\lambda,\mu]} ...| \leq M_1\int_{[\lambda,\mu]} te^{-\delta t}dt \leq M_1\int_{[\alpha,+\infty[} te^{-\delta t}dt \leq ...$

$\int te^{-\delta t}dt = (-t/\delta - 1/\delta^2)e^{-\delta t}$ (+cte) ==> ..... $\leq [M_1(\alpha\delta+1)/\delta^2]e^{-\delta\alpha}$

V : $|\int_{[\lambda,\mu]}...| \leq M_2\int_{[\lambda,\mu]} t_2e^{-\delta t}dt \leq M_2\int_{[\alpha,+\infty[} t^2e^{-\delta t}dt \leq ...$

$\int t^2e^{-\delta t}dt = (-t^2/\delta - 2t/\delta^2 - 2/\delta^3)e^{-\delta t}$ (+cte) ===> / ....

..../ $\leq [M_2(\alpha^2\delta^2+2\alpha\delta+2)/\delta^3]e^{-\delta\alpha}$

Ces trois convergences uniformes permettent d'affirmer que la fonction $x \longrightarrow H(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,2+2^{3/2}[$ avec par dérivation sous le signe somme :

$H'(x) = U(x)$; $H''(x) = V(x)$

H coïncide avec F (cf. troisième partie) sur]0,1[
Le contrôle de l'affirmation selon laquelle ' H est solution de (E)' renvoie à un calcul formel (non explicité) utilisant, de fait, les propriétés de la fonction G à travers celles de la suite (a_n).
Ce calcul est validé sur]-1,+1[, donc sur]0,1[, par l' acquis global antérieur : 'F est solution de (E)'.
Cette validité formelle se prolonge à tout domaine incluant]0,1[sur lequel $x \longrightarrow \int_{[0,+\infty[} e^{-t}G(xt)dt$ est définie et deux fois dérivable, donc se prolonge à l'ouvert $]0,2+2^{3/2}[$ et même à l'ouvert $]-1,2+2^{3/2}[$, par utilisation de F sur]-1,0].

<u>Notes sur la cinquième partie</u>

Elle est nettement plus longue à rédiger que les précédentes, même si, hormis 5.6, elle reste du même niveau de difficulté. Il me semble qu'une recherche / rédaction de l'ordre de deux heures n'est pas exclue. Les compétences requises restent classiques, avec la nécessité néanmoins de soigner les références aux théorèmes sur l'intégrale fonction d'un paramètre. On pourra se reporter à l'un des cours de Spéciales déjà cités dans les notes de la partie I : tome 4, chap. 2 chez Dunod ou tome 2, chap. VIII, chez Masson.

En récapitulant ....

La durée cumulée du travail demandé est ici estimée à .... 5h . Sauf grossière erreur d'appréciation , le texte est raisonnable ....

J'ai déjà détaillé les compétences requises en partie I dans les notes associées . Elles font la part belle , ce qui est l'esprit du problème , aux séries entières . Dans la partie II , outre le principe constant exploité en 2.1 (... dire que la limite d'une quantité est α , c'est garantir , sous les conditions limites , qu'on est aussi près qu'on le souhaite de α ...) , on utilise un théorème fondamental de l'intégrale de Riemann :

f dérivable et f' intégrable sur un intervalle I ===> pour tout (x,x_0) de I^2 , $f(x) = f(x_0) + \int_{[x_0,x]} f'(t)dt$

Dans la partie III , Cauchy-Lipschitz a déjà été signalé . Dans la quatrième partie , 4.1 nécessite un vernis sur les normes euclidiennes de R^2 . Dans 4.2 , on exploite des résultats classiques sur les formes quadratiques dans $R\times R$: $ax^2+2bxy+y^2$. Utilisation , dans 4.3 , de l'intégration des fonctions vectorielles , essentiellement pour l'inégalité de la norme . On y fait aussi référence aux outils usuels :

. la convergence d'une série est celle de la suite de ses sommes partielles

. dans R , suite convergente équivaut à suite de Cauchy

... et on utilise la notion de convergence uniforme d'une suite de fonctions .

Dans la cinquième partie , on exploite justement la convergence uniforme pour fonder la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions . La référence doit être précise . On y travaille (5.3)dans le cadre :

. I un intervalle de R

. $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications dérivables de I dans R^p

. la suite (f_n) converge simplement sur I vers une application f

. la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une application g

. alors : f est dérivable sur I et f' = g

En fait , la convergence simple de (f_n) entraine sa convergence uniforme sur tout borné de I et , parce que R^p est complet , la même convergence simple peut être installée comme simple conséquence de la convergence , pour un t_0 de I , de la suite numérique $(f_n(t_0))$. Mais ici , l'accès direct à la convergence uniforme dispense de ces détours et on est d'emblée dans des conditions plus fortes que les conditions minimales permettant d'aboutir .

Dans 5.6 , on s'appuie essentiellemnt sur la notion d'intégrale impropre dépendant d'un paramètre , déjà citée en notes.

Le problème me paraît bien 'gradué' en termes de difficultés . Le candidat peut éventuellement s'embourber dans la rédaction de la dernière partie , il n'en a pas moins eu largement la possibilité , en temps , de réfléchir à 80% du texte et d'avancer dans la solution (cf. mes estimations ...)

Une remarque pour finir , à propos du 'Tout document et tout dictionnaire interdits ' introductif .... Quand en serons nous débarrassés ? Certes , se pose le problème de la limitation raisonnable du volume de la documentation transportée , mais la possibilité , pour le candidat , de disposer par exemple d'un cours de Spéciales et d'y aller chercher , rapidement , la confirmation de quelques énoncés tels que ceux évoqués (Cauchy-Lipschitz ; convergence(s) uniforme(s) ; intégrale(s) à paramètre ; ...) cette possibilité me semble lui être <u>très abusivement</u> fermée . Il faudra y revenir .