Dans nos classes

Introduction progressive en Première

de la dérivation et de ses applications

avec l'aide du logiciel GRAPHE

Pascal CHANTRIAUX
Lycée Marie Curie - Echirolles.

En 91-92, au lycée Marie Curie d'Echirolles, nous avons traité la dérivation en première S de façon inhabituelle. La démarche adoptée, facilement adaptable aux autres séries de premières, a permis d'aborder simultanément la dérivation et ses applications et ce très tôt dans l'année.
La progression suivie (fonction dérivée, tangente, nombre dérivé, limite en zéro) est l'inverse de la progression classique et a grandement été facilitée par un usage modéré mais efficace de l'informatique.

Les raisons du choix de la progression

a) Pourquoi traiter «fonction dérivée» avant «nombre dérivé» ?

On introduit habituellement le nombre dérivé avant le fonction dérivée afin

NDLR : Une démarche identique a été présentée par J. PINAUD à l'IREM de POITIERS et à la Commission Second Cycle. Elle a fait l'objet d'un article dans PLOT, et elle est à rapprocher de celle du manuel "SPIRALE" (Belin) de 1ère S-E, qui parle de dérivation en évitant les limites.

de pouvoir définir cette dernière avec rigueur. En procédant ainsi, on aborde la dérivation par une notion difficile (car faisant appel à la notion de limite), dont l'intérêt n'apparaît pas immédiatement et qui conduit à utiliser des techniques provisoires en exercices (obtention du nombre dérivé par un calcul de limite).

Au contraire, on peut admettre dans un premier temps (à partir d'observations, de conjectures et de vérifications faites sur des graphiques obtenus à l'aide de micro-ordinateurs) l'existence et le mode de calcul de la fonction dérivée pour quelques fonctions usuelles ainsi que le lien entre les variations de f et le signe de f'. on dispose alors d'un outil puissant dont la maîtrise est rapide, l'intérêt évident, et grâce auquel on peut résoudre tout de suite des problèmes variés et consistants par des méthodes définitives. On pourra plus tard, lorsque cet outil et ses applications seront dominés, s'intéresser à la façon dont on construit cette fonction dérivée, c'est-à-dire, traiter l'aspect local de la dérivation dont l'étude sera ainsi motivée.

b) Pourquoi se limiter d'abord aux polynômes et aux fractions rationnelles ?

L'objectif essentiel en première est l'acquisition de la fonction dérivée et son application à la résolution de problèmes divers conduisant à une étude de variation, une recherche d'extremum ou un encadrement de racine. Les fonctions polynômes et rationnelles permettent de traiter de nombreux exemples de ce type sans présenter de difficultés théoriques (elles sont dérivables sur leur ensemble de définition) et sans nécessiter un arsenal important de formules de dérivation (celles concernant $x \to a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ et u/v peuvent suffire ; on peut y ajouter $(au)' = au'$ pour les fonctions dans lesquelles intervient une constante littérale et $(u + v)' = u' + v'$ pour éviter les réductions au même dénominateur).

Les autres règles de dérivation (ainsi que les problèmes éventuels de dérivabilité que certaines peuvent soulever) pourront n'être introduites qu'après l'étude d'un nombre dérivé et des limites. A ce moment de la progression, il sera d'ailleurs éventuellement possible de les faire découvrir et justifier par les élèves eux-mêmes.

c) Pourquoi traiter «tangente» avant «nombre dérivé» ?

Une présentation souvent adoptée en première est la suivante: après avoir introduit le nombre dérivé, on se base sur des considérations d'ordre cinématique pour définir la tangente comme étant la droite de pente $f'(a)$ passant par le point d'abscisse a.

Or, pour un élève de lycée, ce n'est pas la tangente qui illustre la notion de nombre dérivé mais plutôt le nombre dérivé qui est un outil pour manipuler les tangentes. Il semble donc plus naturel de réfléchir d'abord un peu à la notion de tangente, dont les élèves ont encore une idée vague, pour la cerner un peu mieux. Ceci peut se faire assez rapidement à partir d'observations sur écrans d'ordinateurs à l'aide de grossissements successifs. De plus, ces manipulations permettent de dégager un énoncé très proche d'une définition géométrique rigoureuse de la tangence, mais dans un langage très abordable.

On peut ensuite, en utilisant exactement les mêmes arguments que dans la présentation classique, motiver le fait qu'on s'intéresse au comportement de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h devient petit pour approcher la pente de cette tangente.

d) Pourquoi «nombre dérivé» avant «limite en zéro» ?

Lorsque, pour introduire la notion de limite sur un exemple simple, on essaie d'expliquer à partir de majorations pourquoi on pose que h^2 tend vers zéro lorsque h tend vers zéro, les élèves ne comprennent pas toujours pourquoi on dépense tant d'énergie pour cela. En effet, ils trouvent le résultat évident car h^2 est défini pour $h = 0$ donc ils estiment la justification démesurément compliquée et de plus ils n'ont aucune idée de l'intérêt de la notion introduite. En d'autres termes, on a introduit une nouvelle notion en voulant en donner tout de suite une formalisation (qui est compliquée) à partir d'un exemple sur lequel l'intérêt de la notion n'apparaît pas du tout (car l'exemple est trop simple et ne correspond pas à un problème qui se pose).

Mieux vaut donc faire le contraire : commencer par travailler avec une idée intuitive de ce qu'est une limite (sans chercher à la formaliser dans un premier temps) sur des exemples pour lesquels la valeur de cette limite n'est pas évidente mais présente un intérêt.

Le cas de $x \to \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est idéal : cette fraction n'existe pas pour $h = 0$ (donc la limite n'est pas évidente) ; l'intérêt de la limite et de sa justification découlent des observations faites à partir de la tangente (cf.c). Enfin, à l'aide du logiciel GRAPHE qui permet de tracer de façon cinématique plusieurs sécantes successives s'approchant de la tangente et en même temps les pentes de ces sécantes, on peut utiliser cet exemple pour introduire la notion de limite qui est visualisée à l'écran simultanément par le mouvement et le comportement numérique (cf. les possibilités du logiciel GRAPHE, §2.c).

e) Pourquoi «taux de variation» avant «approximations affines» ?

Le programme de Première S suggère (mais n'impose pas) d'aborder l'aspect local de la dérivation à partir des approximations affines (développements limités d'ordre 1). Nous avons cependant préféré commencer par la limite du taux de variation, d'une part parce que la façon dont la limite intervient y est plus simple que dans le cas de l'approximation affine (qui fait intervenir l'idée d'ordre de grandeur, de comparaison, et qui nécessite donc de maîtriser un peu mieux la notion de limite), d'autre part car elle a une application immédiate (vitesse instantanée), enfin parce qu'elle s'inscrit mieux dans la progression choisie.

L'aspect développement limité trouve sa place après l'étude de la notion de limite, lorsque celle-ci est bien maîtrisée et que l'on peut donc mieux comprendre l'énoncé correspondant et être capable de saisir le lien entre les deux formulations. On pourra à cette occasion l'utiliser pour découvrir et/ou démontrer les formules de dérivation non données dans le premier chapitre, notamment $(uv)' = u'v + uv'$.

2. Quelques unes des possibilités du logiciel GRAPHE

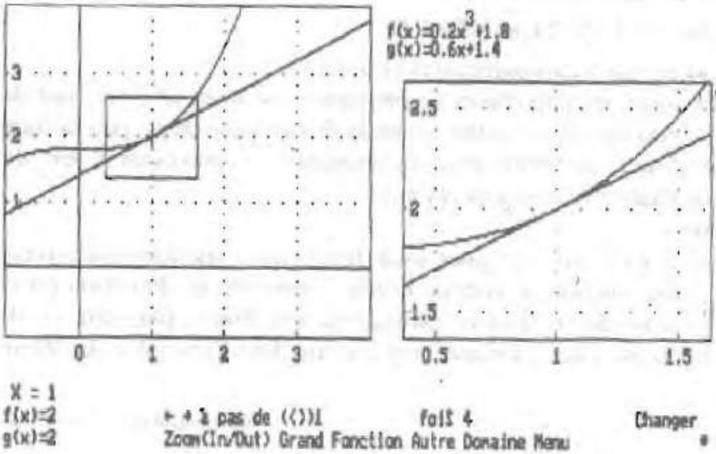
Le logiciel GRAPHE est une réalisation de la société VU-Soft (Amsterdam). Il est actuellement distribué par les édition NATHAN.

a) Option «2 : Tracer des courbes»

Il s'agit d'un grapheur ordinaire : représentations graphiques de plusieurs fonctions dans un repère et possibilité d'effectuer des «zooms».

b) Option 3 : «Loupe»

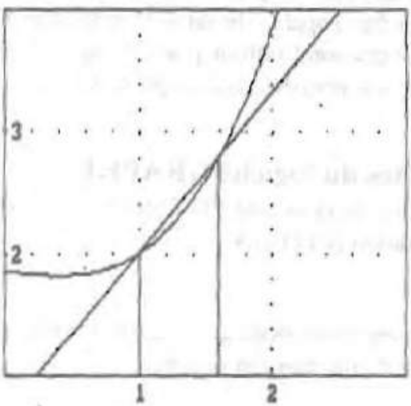
Il s'agit d'une fonction de «zoom» qui a la particularité d'afficher simultanément le graphique initial et la partie «zoomée» ; cela permet un meilleur contrôle de la situation en cas d'agrandissements répétés de la même zone car l'utilisateur a la possibilité de remplacer à chaque étape le graphique initial par l'agrandissement réalisé avant de réitérer le «zoom» (cf. fig. suivante)



c) Option «4 : Dérivation»

Le logiciel peut tracer automatiquement les cordes successives passant par un point fixe de la courbe choisie et par un point mobile se rapprochant du point fixe. Il affiche simultanément les pentes des sécantes obtenues, ce qui peut être une introduction concrète à la notion de limite.

On peut réitérer la manipulation en réduisant de plus en plus le déplacement du point mobile (cf. figure ci-dessous).



Normal Vite

$f(x)=(2x^3-x+13)/7$

Δx	pente
1	1,8571
0,9	1,7171
0,8	1,5829
0,7	1,4543
0,6	1,3314

le point fixe est (1,2)

Une autre fonctionnalité de l'option 4 du logiciel permet de tracer une dérivée numérique approchée de la fonction choisie.

3 La progression adoptée.

a) Chapitre FONCTION DÉRIVÉE

- Séance 1 sur micro-ordinateurs (1 heure) :

  Des fonctions polynômes accompagnées de leurs dérivées sont données, on conjecture le lien entre variation de f et signe de f' puis la formule de calcul de f'; on vérifie les deux conjectures en prévoyant le sens de variation d'autres fonctions polynômes.

- Cours :

  On admet l'existence pour toute fonction f d'une fonction privilégiée f' appelée fonction dérivée de f dont l'ensemble de définition est contenu dans celui de f et dont la construction sera donnée plus tard. On dit que f est dérivable sur I lorsque I est contenu dans l'ensemble de définition de f'.

Dérivée de $x \rightarrow a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ et de u/v (admis pour l'instant).

Théorème donnant le lien entre le sens de variation de f et le signe de f' (admis)

- Exercices et travaux dirigés :

  Etudes de variations et recherches d'extremums faisant intervenir uniquement des polynômes et des fractions rationnelles.

- Cours :

  Dérivées de $x \rightarrow 1/x^n$, $u + v$, et au (qui permettent par exemple de dériver $x \rightarrow 5 - \dfrac{3}{x}$ sans réduire au même dénominateur ou de dériver $x \rightarrow k(x^2 - 3x)$ sans développement inutile) et éventuellement de uv et u^2 (qui permettent par exemple d'obtenir plus rapidement la dérivée de $x \rightarrow (x+3)(2x-1)^2$ sous forme factorisée).

  Théorème permettant de montrer qu'une fonction dérivable réalise une bijection entre deux segments (admis après quelques observations en activité d'introduction).

- Exercices et travaux dirigés :

  Etudes de variations, recherches d'extremums et encadrement de racines faisant éventuellement intervenir des fonctions dont la dérivation est facilitée par l'utilisation des formules précédentes (par exemple des fonctions dépendant d'une constante littérale).

b) Chapitre NOMBRE DÉRIVÉ

- Séance 2 sur un micro-ordinateur (1 heure) :

  Des manipulations répétées utilisant des zooms successifs permettent de préciser la notion de tangente ; on conjecture ensuite le lien entre coefficient directeur de la tangente et fonction dérivée puis on vérifie cette conjecture en calculant plusieurs équations de tangentes.

- Cours :

  Notion intuitive de tangente à une courbe : *en grossissant un voisinage suffisamment petit du point considéré, on peut toujours obtenir un dessin sur lequel la courbe soit aussi proche de la droite qu'on le souhaite.*

  Equation de la tangente.

- Exercices : Equation de la tangente.
- Séance 3 sur micro-ordinateurs (1 heure) :

  On observe le comportement de la corde passant par les points d'abscisses a et $a + h$ lorsque h se rapproche de zéro et on s'aperçoit intuitivement que $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ lorsque h tend vers zéro ; on découvre donc, d'une part la notion de limite en zéro et son intérêt, d'autre part la façon de fabriquer $f'(a)$.

Les plus forts tracent point par point quelques dérivées numériques.

- Cours :

  Définitions rigoureuses du nombre dérivé et de la fonction dérivée (la notion de limite étant cependant encore intuitive).

  Vitesse instantanée.
- Exercices :

  Quelques calculs de nombres dérivés à partir de la définition, vérification de quelques-unes des formules de dérivation données au chapitre précédent. Problèmes faisant intervenir la notion de vitesse.

c) Chapitre LIMITES

Traité de façon classique, sans s'appesantir sur le sujet ; tous les cas de limite, asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

d) Chapitre COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION.

Lien entre nombre dérivé et approximation affine (développement limité d'ordre 1).

Suite et fin des formules de dérivation : dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, de $x \to \sqrt{x}$ (avec les difficultés concernant les intervalles sur lesquels ces fonctions son dérivables) et éventuellement de u^n .

4 Quelques remarques

a) Sur la progression :

- Elle permet d'aborder la dérivation très tôt et de l'appliquer tout de suite à la résolution de problèmes d'extremums (conformément aux instructions accompagnant les programmes).
- Elle est facilement adaptable à toutes les section de Premières.
- Elle va du plus simple (fonction dérivée) au plus compliqué (aspect local, limites)
- Elle introduit les différentes notions dans un ordre cohérent avec les acquis antérieurs et l'intuition des élèves (il est plus naturel de s'intéresser d'abord au comportement global des fonctions, la notion de tangente étant plus intuitive que celle de nombre dérivé, il est préférable de la traiter avant).
- Les méthodes introduites sont toujours des méthodes définitives.

b) Sur l'utilisation de l'informatique

- Seulement trois séances de travaux dirigés d'une heure par demi-classe suffisent.

- Chaque séance comporte un temps d'observation et de conjectures suivi *d'un temps pendant lequel on vérifie les conjectures en pratiquant des méthodes définitives (par exemple, dès la première séance d'informatique, c'est-à-dire dès la première heure de cours consacrée à la dérivation, les élèves dérivent des fonctions polynômes pour en déduire les variations).*
- Chacune des séances fait gagner du temps par rapport à l'équivalent réalisé «sur papier».

5. Énoncés des T.D.

Séance 1 : introduction à la notion de fonction dérivée

Choisir l'option 2.«Tracer des courbes» du logiciel GRAPHE.

1.a) Tracer les courbes représentatives des fonctions f et f' définies par :

$f(x) = x^2 - 2x - 1$; $f'(x) = 2x - 2$

Quelles remarques peut-on faire concernant le lien entre le signe de f' et le sens de variation de f ?

b) Effacer les courbes précédentes et recommencer le même travail avec :

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 2$; $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

c) Même travail avec :

$f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^3 + 4x - 1$; $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$.

2. Nous admettons que, pour chaque fonction polynôme f, il existe une fonction polynôme privilégiée appelée *fonction dérivée de f* et notée f', ayant, vis-à-vis de f, les propriétés constatées sur les exemples du 1.

a) On donne la fonction polynôme f (**ne pas** tracer tout de suite sa courbe représentative) ainsi que la fonction dérivée :

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Etudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f, contrôler les résultats en traçant les deux courbes représentatives.

b) Même travail avec :

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$; $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

3.a) A partir des exemples rencontrés en **1** et en **2**, conjecturer la règle permettant d'obtenir l'expression de $f'(x)$ à partir de celle de $f(x)$.

b) Appliquer cette règle pour calculer la fonction dérivée d'un polynôme f choisi au hasard, puis contrôler ce calcul en traçant les représentations graphiques de f et de f'.

Séance 2 : introduction aux notions de tangente et de nombre dérivé

1. *Observation de courbes*

Choisir l'option «3.Loupe» du logiciel GRAPHE

a) Entrer la fonction $f: \mapsto 0{,}2x^3 + 1{,}8$, choisir pour domaine : $-1 \leq x \leq 4$, $-1 \leq y \leq 4$. Utiliser ensuite la commande «Autre» pour entrer la fonction $g : x \mapsto 0{,}6x + 1{,}4$.

Quel rôle semble jouer la droite D représentant g pour la courbe représentative C de f en sont point A d'abscisse $a = 1$?

Pour compléter l'observation du graphique au voisinage du point A, utiliser le «zoom» :

- à l'aide des flèches, placer la croix sur le point A,
- sélectionner la taille de la fenêtre qui sera agrandie à l'aide de la commande «In»
- utiliser la commende «Zoom».

Qu'observe-t-on lorsque le grossissement est suffisamment grand ? Que peut-on dire de la fonction g pour la fonction f au voisinage de a ?

b) Recommencer le même travail avec : $f: x \mapsto -2x^3 + 11x - 10$ et $g : \mapsto -x + 8$ pour $2 \leq x \leq 5$, $3 \leq y \leq 7$ et $a = 3$.

c) Recommencer le même travail avec : $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 14x - 11$ et $g : x \mapsto 2x - 3$ pour $-10 \leq x \leq 15$, $-10 \leq y \leq 15$ et $a = 2$.

2 *Une conjecture*

Pour chacun des cas a), b), c), du §1, calculer le réel $f'(a)$. Quel lien semble-t-il y avoir entre $f'(a)$ et la fonction affine g ? Emettre une conjecture. En quoi cette conjecture est-elle cohérente avec le théorème liant le sens de variation d'une fonction au signe de sa dérivée ?

3.*Vérification de la conjecture*

a) En admettant le résultat conjecturé ci-dessus, déterminer l'équation de la tangente à la courbe C d'équation $y = 2x^3 - 9x + 6$ au point A de C d'abscisse $a = 4$.

Ensuite, en procédant comme au §1, vérifier à l'aide du logiciel la validité de l'équation obtenue.

b) Même travail avec $C : y = x^3 - 12x - 19$ et $a = -2$.

c) Même travail avec $C : y = \dfrac{x - 3}{x^2 + 1}$ et $a = -1$.

c) Même travail avec $C : y = x^3 - 0{,}5x + 1$ et $a = 0$.

Séance 3 : fabrication du nombre dérivé et de la fonction dérivée.

Choisir l'option «4.Dérivation» du logiciel GRAPHE. Entrer la fonction :
$f : x \mapsto (2x^3 - x + 13)/7$.

1. Aspect local : étude au voisinage de 1

Choisir le domaine : $0 \le x \le 3$, $1 \le y \le 4$, puis l'option «1.Tracer les cordes d'un seul point» et enfin donner l'abscisse du point : 1.

a) Utiliser la commande «Tracer». Que se passe-t-il sur le graphique ? Quels renseignements le logiciel affiche-t-il sur le tableau situé à droite de l'écran ? Utiliser de nouveau «Tracer». Qu'est-ce qui a changé ? Redonner la valeur 1 au pas (touche P ou touche >), puis renouveler les manipulations précédentes en choisissant l'option «Stop» (Il faut appuyer sur «Entrée» à chaque étape) puis l'option «Vite».

b) Revenir au pas 1 et utiliser plusieurs fois la commande «Tracer» jusqu'à atteindre le pas 0,000001 (ne pas descendre en dessous de cette valeur car pour un pas trop petit, le logiciel ne maîtrise plus les erreurs d'arrondis dans les calculs). Que semble-t-il se passer pour les valeurs de la colonne de droite ? Expliquer le phénomène observé.

c) Répéter les manipulations du b) avec des valeurs négatives du pas : choisir au départ le pas -1 (touche P ou touches > et -).

d) Quelle est la valeur exacte du coefficient directeur de la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 ? Comparer cette valeur à celles obtenues dans la colonne de droite du tableau en b) et c).

e) On dit que la pente de la sécante **tend vers** la pente de la tangente **lorsque** Δx **tend vers zéro**. On dit aussi que la pente de la tangente est la **limite** de la pente de la sécante quand Δx **tend vers zéro**. Dans la suite, nous utiliserons plutôt la notation h que Δx et l'expression «coefficient directeur» que «pente».

On considère la droite D_h sécante à la courbe aux points d'abscisses 1 et $1 + h$ (faire une figure). Exprimer le coefficient directeur de D_h en fonction de f et de h. Expliquer pourquoi le nombre dérivé de f en 1 est la limite de $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ quand h tend vers zéro.

2 Aspect global

Revenir au menu précédent pour choisir le nouveau domaine :
$-3 \le x \le 3$, $-4 \le y \le 6$.

a) Choisir l'option «2.Courbe du taux d'accroissement» puis choisir $h = 0{,}00001$. A chaque étape, le logiciel trace, d'une part, la droite D_h sécante à la courbe aux points d'abscisses x et $x + h$ et, d'autre part, le point de coordonnées $(x\ ,\ G(x))$ où $G(x)$ est le coefficient directeur de D_h , c'est-à-dire que $G(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Le logiciel effectue ces deux tracés pour plusieurs valeurs de x. Lorsqu'il a terminé, répondre NON à «relier les points ?». Pour bien comprendre ce qui se passe, on pourra éventuellement recommencer la manipulation avec l'option «Stop» (pour recommencer, redonner la valeur de h puis répondre OUI à «effacer l'écran ?»). Expliquer pourquoi la sécante D_h semble tangente à la courbe.

b) Utiliser la commande «Dérivée» pour entrer l'expression de la dérivée de f. Tracer ensuite la courbe représentative de f' sur le graphique (commande «2.$f'(x)$» suivie de «Tracer»). Que constate-t-on ? Etait-ce prévisible ? Expliquer le phénomène. La fonction G coïncide-t-elle vraiment avec la fonction f' ? Quelle importance a le choix de la valeur de h dans les manipulations précédentes ?