



Quand un devoir peut devenir un sujet de réflexion pour les modules en seconde

J.F. Zuccheta

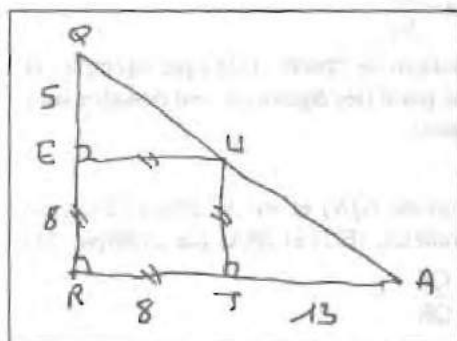
LYON

J'avais pour objectifs de montrer et faire prendre conscience aux élèves qu'il existe différentes méthodes qui conduisent au même résultat, qu'un dessin n'est pas une figure, qu'une valeur approchée n'est pas une valeur exacte et par suite, que dessin et valeur approchée ne prouvent rien. J'ai donc proposé à mes élèves de Seconde, dans le cadre d'un devoir donné à la maison donné vers le début de l'année scolaire 91-92, un problème géométrique. L'énoncé, donné à l'aide d'un dessin à main levée, propose d'examiner la position de trois points. Y a-t-il alignement ou non-alignement de ces points? Le dessin conduit à la conjecture de l'alignement, mais qu'en est-il vraiment ?

La quantité de démarches possibles permet de poser l'exercice en tout début d'année. Ce problème donné dans une classe de Seconde est extrait d'un livre de Mathématiques niveau Quatrième (*Pythagore*, page 134, édition 88). Il utilise dans ses données numériques des termes consécutifs de la suite de Fibonacci comme dans le fameux problème de Sam Loyd qui constate, grâce à un puzzle, que $64 = 65$.

Il me semble intéressant de travailler cet énoncé dans d'autres cadres et en particulier celui des modules. Par exemple, en gardant la forme devoir à la maison, les modules peuvent permettre de faire se confronter des élèves qui, sur un même type de démarche, ont conclu, soit à l'alignement, soit au non-alignement. Mais il y a sans doute d'autres approches.

Je vous propose donc cet énoncé, tel que je l'avais donné, puis les démarches possibles (y sont-elles toutes?) et enfin des résultats d'élèves.



Le dessin ci-contre est un dessin à main levée. Les dimensions sont données en centimètres.

Que pouvez-vous dire des points Q , U et A ?

J'ai trouvé trois méthodes. Qui dit mieux?

Quelles sont les démarches possibles des élèves pour la résolution de ce problème?

En supposant que tous les élèves donnent (trouvent) la bonne réponse, à savoir, les points ne sont pas alignés, ils peuvent utiliser plusieurs méthodes :

a) Calcul des aires QUE , $UTRE$, AUT et QRA . Confrontation et conclusion. Ici, les calculs utilisent des nombres décimaux et c'est ce qui était proposé dans le livre de Quatrième.

b) Utilisation du théorème de Pythagore pour calculer les hypoténuses des triangles $[QU]$, $[UA]$ et $[QA]$ et vérification de l'inégalité $QU + UA > QA$ (inégalité triangulaire avec des racines carrées).

c) Utilisation des mesures d'angles (ce qui reviendra à calculer des lignes trigonométriques).

i) Dans le triangle QRA , rectangle en R , les angles \widehat{Q} et \widehat{A} sont complémentaires (ou le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre). On utilise alors les triangles rectangles QUE et UTA .

ii) On vérifie si l'angle \widehat{QUA} est plat. D'où, avec les mêmes petits tri-

angles, on évalue les angles \widehat{EUQ} et \widehat{TUA} .

iii) Si des droites sont parallèles, les angles correspondants sont égaux.

On compare les angles \widehat{EQU} et \widehat{TUA} .

d) Dans un repère (orthonormé en général) défini par $(R ; \frac{1}{21}\vec{RA} ; \frac{1}{13}\vec{RQ})$

on utilise deux des trois droites (QU), (UA) et (QA).

i) On compare les coefficients directeurs des droites (on utilise aussi les pentes des droites) avec la formule: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

ii) On détermine l'une des équations de droites, (QA) par exemple, et on vérifie l'appartenance du troisième point (les équations sont données sous forme réduite ou sous forme cartésienne).

e) Utilisation du théorème de Thalès.

On suppose que U' est sur la droite (QA) et sur la droite (EU), on applique Thalès avec les droites parallèles, (EU) et (RA) par exemple. On

calcule EU' avec les rapports $\frac{EU'}{RA} = \frac{QE}{QR}$.

D'où $EU' = \frac{QE \times RA}{QR}$; $\frac{5 \times 21}{13} \neq EU$ car $\frac{5 \times 21 - 8 \times 13}{13} = \frac{1}{13}$.

f) Calcul vectoriel, en vérifiant la colinéarité des vecteurs \vec{QA} et \vec{QU} et en utilisant la définition de points alignés et la propriété du carré. Ainsi:

$$\vec{QU} = \vec{QE} + \vec{EU}$$

$$\vec{QA} = \vec{QR} + \vec{RA} \text{ avec } \vec{QR} = \frac{13}{5}\vec{QE} \text{ et } \vec{RA} = \frac{21}{8}\vec{EU}$$

$$\text{d'où } \vec{QA} = \frac{13}{5}\vec{QE} + \frac{21}{8}\vec{EU}$$

or, dire que les points sont alignés signifie que $\vec{QA} = k\vec{QU}$, ce qui

conduit à écrire $\frac{13}{5} = \frac{21}{8}$!!!

g) Utilisation de l'homothétie et de ses propriétés (à condition de l'avoir vue dès le début de l'année). On peut rapprocher de l'agrandissement ou de la

réduction du programme de Troisième.

Remarques.

Le devoir étant donné à la maison et complété par la "consigne" suivante: «*J'ai trouvé trois méthodes, qui dit mieux?*», j'ai eu la grande surprise (c'était la première fois que je posais ce type de "consigne") de constater que:

- 1 - Beaucoup d'élèves (presque tous) m'ont donné au moins quatre méthodes. Certains sont allés bien au-delà (quand je dis "méthode", c'est "démonstration").
- 2 - Je n'ai pas eu l'impression de corriger 30 fois la même copie, même si la correction a été plus longue.

Quels sont les résultats obtenus?

Certains élèves ont basé leur conviction sur le dessin, à savoir que, faute de précision (un seul a fait un dessin sur papier millimétré), les points sont alignés. Les justifications, basées sur une démarche citée ci-dessus, étaient étayées par des calculs approchés.

D'autres, ce qui me paraît très étonnant, ont, suivant la méthode utilisée, obtenu à l'aide d'une *preuve* des points qui sont alignés puis, à l'aide d'une autre *preuve*, des points non alignés. C'est en fait le résultat le plus surprenant que je n'aurais pas eu l'occasion de voir autrement. Ils ne sont pas aperçus de la contradiction et de l'incohérence des résultats proposés.

La méthode basée sur le calcul de l'aire n'est apparue qu'une fois (c'était la méthode de Quatrième et, au moment de la correction, certains ont eu une révélation. Comment n'y avaient-ils pas pensé? Pour d'autres, ce n'était pas une méthode digne d'un élève de Seconde. Faut-il entendre que l'argumentation n'est pas sérieuse quand il n'y a aucune référence au cours?).

En général, ce fut l'utilisation de *Pythagore*, de la trigonométrie (sous toutes ses formes) mais sans utiliser le vocabulaire des angles correspondants pour le cas des droites parallèles.

Le cas des vecteurs colinéaires est apparu, mais plus pour des raisons de contrat que de conviction personnelle des élèves-auteurs car, peu de temps auparavant, nous l'avions étudié (à vrai dire, je m'attendais un peu à cette démarche).

Certains ont utilisé *Thalès* avec un essai de mise en œuvre d'un raisonnement par l'absurde de façon maladroite, mais il est à noter que la démarche est quand même naissante; l'ont-ils vue en Quatrième ou dans les classes

antérieures? J'en doute car cette démarche est très abstraite et je ne saurais dire si elle les a vraiment convaincus ou si elle les a éclairés.

Une des questions posée par un élève a été : «Si la conclusion est fautive, est-ce que cela veut dire qu'une des hypothèses est fautive?» Question à laquelle je me suis abstenu de répondre et qui a permis d'ouvrir un débat. La démarche de l'élève s'apparente plus à un raisonnement contraposé.

En ce qui concerne la comparaison des rapports et racines carrées (les nombres décimaux sont bien traités), le travail ne fut pas traité de manière correcte chez tous: le syndrome de la calculatrice a frappé chez la plupart! D'où certaines conclusions erronées car, à deux décimales, les résultats concordent. Par contre, un travail parfois remarquable a été fait chez certains quand à la comparaison des racines carrées :

$$a) \sqrt{89} + \sqrt{233} = \sqrt{610} \text{ ssi } 89 + 233 + 2 \times \sqrt{20737} = 610$$

comme $\sqrt{20737}$ n'est pas un entier, la somme $89 + 233 + 2 \times \sqrt{20737}$ ne peut être égale à 610.

$$b) \sqrt{89} + \sqrt{233} = \sqrt{610} \text{ ssi } \frac{610 - 89 - 233}{2} = \sqrt{20736} \neq \sqrt{20737}$$

Bien sûr, j'ai rencontré l'utilisation du produit en croix pour les rapports, mais je n'ai jamais eu la réduction au même dénominateur.

Enfin, le calcul avec des racines a conduit aussi à des formules du genre : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Conclusion

C'est un travail qui fut long à corriger, mais les élèves se sont pris au jeu. A la correction, j'ai fait le point sur toutes les méthodes (les élèves prenaient des notes). La séance suivant la correction a été l'occasion de donner une interrogation de 20 minutes environ demandant :

- la comparaison de $\sqrt{89} + \sqrt{233}$ et $\sqrt{610}$
- la méthode de leur choix
- une méthode avec les angles (la comparaison des lignes trigonométriques d'angles aigus suffit à comparer les angles aigus sans passer par des valeurs approchées d'angles).

Si certains utilisent cet exercice, j'aimerais connaître leurs commentaires, en particulier sur la manière dont ils l'ont utilisé, sur des résultats et réactions d'élèves et enfin sur le contexte (modules, travaux dirigés, devoir à la maison, etc.) Un travail de ce genre me semble important et intéressant à

faire avec les élèves. En effet, il y a plusieurs méthodes de démonstration, et le rôle des valeurs approchées et celui du dessin sont à repreciser ici, même pour des élèves de Seconde. En voici un autre (toujours *Pythagore 4^{ème}*) que je n'ai pas encore essayé mais qui semble intéressant à proposer à des élèves après avoir vu les vecteurs orthogonaux (ce qui n'est pas forcément nécessaire, puisque les élèves de Troisième ont vu les coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires). Le travail sur les valeurs exactes-valeurs approchées (racines carrées) était l'objectif en Quatrième ...

Voici cet énoncé :

BOIS est un carré de 12 cm de côté, $N \in [BO]$ et $BN = 3$ cm, $P \in [SB]$ et $PI = 13$ cm. Que peut-on dire de PIN ?