Le territoire de l'indécis

Jean Delcourt
Equipe Imagiciels
C.R.E.E.M - C.N.A.M.

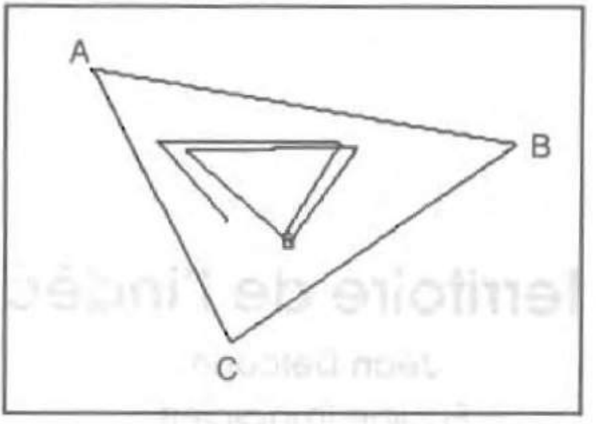
Cet article présente une variante de l'exercice bien connu sous le nom de "parcours de l'indécis". Cette variante est naturelle, puisqu'elle se contente d'ajouter encore un peu plus d'indécision à l'indécis, elle est également très facilement programmable sur micro-ordinateur, et conduit à de jolies images, très à la mode, les fractales.

L'indécis systématique

Rappelons d'abord la règle du jeu de cet exercice classique : un individu I, représenté par un point du plan, hésite entre plusieurs ami(e)s[1] A, B, C... Depuis sa position initiale, notée I_0, il se dirige d'abord vers A, en ligne droite, mais change d'avis à mi-parcours, et se dirige alors vers B, puis change d'avis à mi-parcours et se dirige vers C, etc...Il se dirige ainsi vers chacune

1-Pour améliorer la lisibilité de ce texte, nous garderons le genre féminin aux amies par la suite.

de ses amies dans un ordre circulaire, et l'on constate que son parcours s'approche d'un parcours limite.



La méthode classique consiste à étudier la suite des positions de I (notée (I_n)) en la définissant par récurrence ; si pour fixer les idées, nous supposons que l'indécis a trois amies A, B et C, les points I_n sont définies par :

$$I_{3n} = h_C o h_B o h_A (I_{3n-3})$$
$$I_{3n+1} = h_A o h_C o h_B (I_{3n-2})$$
$$I_{3n+2} = h_B o h_A o h_C (I_{3n-1})$$

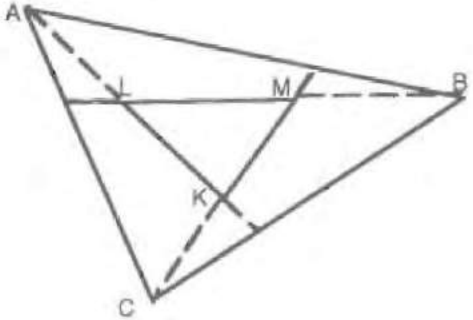
en appelant h_A l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, de même pour h_B et h_C.

Les trois composées sont des homothéties de rapport $\frac{1}{8}$, et de centres respectifs K, L et M.
On a ainsi :

$$I_{3n} = h_K (I_{3n-3}) = (h_K)^n(I_0)$$
$$I_{3n+1} = h_L (I_{3n-2}) = (h_L)^n(I_1)$$
$$I_{3n+2} = h_M (I_{3n-1}) = (h_M)^n(I_2)$$

On en déduit que :

$KI_{3n} = \left(\frac{1}{8}\right)^n KI_0$ et donc que I_{3n} est aussi proche qu'on le veut de K. On traite de même les trois autres sous-suites.



Ainsi, la trajectoire limite est le triangle KLM. Remarquons également que, si I_0= K, alors :

$I_1 = h_A(K) = L$ puisque $h_A o h_C o h_B\ (h_A(K)) = h_A(h_C o h_B o h_A(K)) = h_A(K)$, ce qui prouve que $h_A(K)$ est invariant par h_L, c'est donc L.

On peut donc caractériser le triangle (KLM) par: L est le milieu de [KA], M est le milieu de [LB] et K est le milieu de [MC]. Sa construction est classique ; cherchons par exemple l'intersection de (AK) avec (BC) : de $h_K = h_C o h_B o h_A$, on peut déduire que $h_K o {h_A}^{-1} = h_C o h_B$; cette transformation est une homothétie de rapport $\frac{1}{4}$ et dont le centre est au tiers de [BC] du côté de C, la droite (AK) passe donc par ce point.

Le parcours de l'indécis systématique est maintenant identifié, cette méthode se généralise à un nombre quelconque d'amies.

L'indécis aléatoire

Supposons maintenant que l'on modifie la règle du jeu : l'indécis continue à se diriger vers l'une de ses amies, il continue à changer d'avis à mi parcours, mais fait alors un tirage au sort entre les amies et se dirige vers celle que le sort a désignée...pour changer à nouveau d'avis à mi parcours.

Lorsque le tirage au sort se fait entre toutes les amies, avec équiprobabilité, il est facile de constater par une simulation sur micro-ordinateur, que le parcours de l'indécis doit être dense dans le triangle ABC (ou plus généralement dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des amies). Mais les choses deviennent plus surprenantes lorsque l'indécis choisit, aléatoirement, une amie *différente* de celle vers laquelle il se dirigeait. On constate qu'il semble y avoir des positions "interdites", et que l'indécis semble confiné dans un territoire tourmenté...

Pour examiner cette situation, prenons un cas particulier : il y a quatre amies, disposées aux sommets d'un carré(ABCD). Nous choisirons un repère tel que les points A, B, C et D aient pour affixes respectives : 0, 1, $1+i$ et i, que nous noterons a, b, c et d.

Considérons alors la suite des affixes (z_i) de l'indécis et appelons (h_i) la suite des centres des homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ qu'il subit.On a donc la relation de récurrence:

$$z_{i+1} - h_i = \frac{1}{2}(z_i - h_i) \quad \text{soit}$$

$$z_{i+1} = \frac{1}{2} h_i + \frac{1}{2} z_i \qquad (0)$$

Cette relation de récurrence se résout facilement, par exemple en combinant les égalités obtenues, et donne:

$$z_n = \frac{1}{2^n} z_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_{n-i}}{2^i} \qquad (1)$$

On voit donc que le point d'affixe z_n est proche d'un point dont l'affixe est donné par le sigma. Ce point dépend de la suite des homothéties et non de la position initiale.

Considérons maintenant les complexes de la forme :

$$t = \sum_{i=1}^{i=+\infty} \frac{u^i}{2^i} \qquad (2)$$

où (u_n) est une suite de complexes choisis dans l'ensemble { 0, 1, $1+i$, i }. Ces séries sont convergentes: si l'on considère les parties réelles et les parties imaginaires, ce sont des nombres de l'intervalle [0 ; 1] écrits en base 2; on peut même, si on le désire, considérer les quatre valeurs possibles de h_i comme les quatre chiffres de l'écriture d'un nombre complexe en base 2.

Supposons maintenant que l'indécis suit une des règles R (par exemple la règle systématique R_1, du premier paragraphe, ou la règle R_0, de l'indécis aléatoire), qui précise comment peuvent être choisies les homothéties successives qu'il subit. A chaque régle est associée un ensemble de nombres complexes t de la forme (2).[2]

Définition

On appelle *Territoire de l'indécis* l'ensemble des points dont l'affixe t est donnée par (2). On note T(R) ce territoire.

Notre définition se justifie par les affirmations suivantes :

- L'ensemble T(R) est stable par toute suite d'homothéties qui suit la règle R: il suffit d' appliquer à t la formule obtenue plus haut (formule (0)).

-Toute position de l'indécis, quelle que soit sa position initiale, est aussi proche qu'on le veut d'un élément de T(R). Soit en effet :

$$z_n = \frac{1}{2^n} z_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_{n-i}}{2^i}$$

$$= \frac{1}{2^n} z_0 + \left(t - r_n\right)$$ où r_n est le reste

d'ordre n de la série t et donc :

$$|z_n - t| \leq \frac{1}{2^n}\left|z_0 - 2^n r_n\right|$$ qui peut être rendu aussi

petit qu'on le veut ($r_n < \frac{k}{2^n}$ où k est une constante).

Il est maintenant possible d'examiner les cas particuliers:

T(R_0), le territoire de l'indécis totalement aléatoire, est l'intérieur du carré (ABCD)

Dans ce cas les u_i sont quelconques et le territoire T(R_0) est alors formé de tous les points d'affixes de parties réelle et imaginaire quelconques dans

[2]De façon plus précise, la suite des (u_i) vérifie : pour tout n, il existe $p \geq n$ et il existe (h_i) suite de p centres d'homothéties satisfaisant R tels que $u_i = h_{p-i}$, pour tout i de [[0;p-1]]. Cette définition montre que les premiers "chiffres" de t correspondent aux homothéties faites "en dernier".

l'intervalle [0;1].

$T(R_1)$, le territoire de l'indécis systématique est formé de quatre points, sommets d'un carré.

Dans ce cas en effet, il n'y a que quatre possibilités pour t :

$$t_1 = \frac{d}{2} + \frac{c}{2^2} + \frac{b}{2^3} + \frac{a}{2^4} + \frac{d}{2^5} + \frac{c}{2^6} + \frac{b}{2^7} + \frac{a}{2^8} + \dots$$

$$t_2 = \frac{c}{2} + \frac{b}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \frac{d}{2^4} + \frac{c}{2^5} + \frac{b}{2^6} + \frac{a}{2^7} + \frac{d}{2^8} + \dots$$

$$t_3 = \frac{b}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \frac{c}{2^4} + \frac{b}{2^5} + \frac{a}{2^6} + \frac{d}{2^7} + \frac{c}{2^8} + \dots$$

$$t_4 = \frac{a}{2} + \frac{d}{2^2} + \frac{c}{2^3} + \frac{b}{2^4} + \frac{a}{2^5} + \frac{d}{2^6} + \frac{c}{2^7} + \frac{b}{2^8} + \dots$$

On a alors:

$16\,t_1 = 8d + 4c + 2b + a + t_1$, et l'on trouve $t_1 = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$, et des résultats analogues. En particulier, les quatre points d'affixes t_i sont les sommets d'un carré intérieur au carré (ABCD).

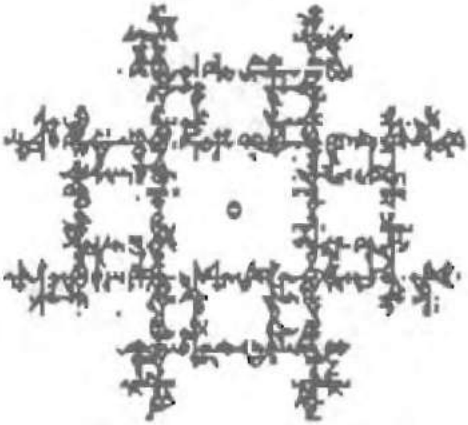
On peut bien sûr retrouver ces résultats en composant les homothéties comme dans la première partie. Remarquons au passage que la relation obtenue montre que le point d'affixe t_1 est barycentre des points A, B, C et D avec les coefficients 1, 2, 4 et 8.

$T(R_2)$ le territoire de l'indécis aléatoire est un ensemble fractal

Nous appelons *indécis aléatoire*, un individu qui suit la règle R_2 : changeant d'avis à mi-parcours, il se dirige vers *une autre* de ses amies; il est ainsi plus cohérent que l'indécis totalement aléatoire qui peut éventuellement, se diriger plusieurs fois de suite vers la même amie.

Les affixes des points de $T(R_2)$ sont donc les tels que deux u_i consécutifs soient toujours distincts, autrement dit, dont le développement en base 2 ne contient pas deux "chiffres" consécutifs égaux.

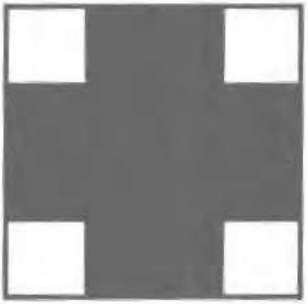
Voici une représentation de ce territoire :



(quelques points parasites subsistent sur cette image obtenue par ordinateur, en particulier le petit carré central qui représente la position initiale de l'indécis.)

Cet ensemble peut également être décrit par "soustraction" : sont à rejeter les complexes de développement en base deux :

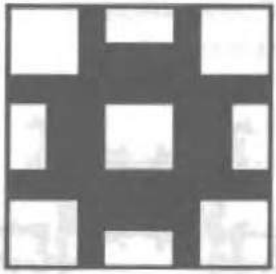
0, *a a* . . . . . ou 0, *b b* . . . . ou 0, *c c* . . . . ou 0, *d d* . . . ; on est amené à enlever les quatre "coins" du carré (ABCD) :



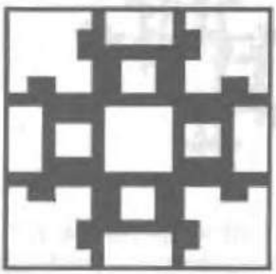
puis les complexes dont le développement en base deux est :

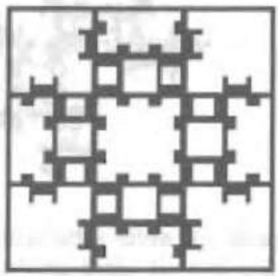
0, . *a a* . . . ou 0, . *b b* . . . ou 0, . *c c* . . . ou encore 0, . *d d* . . .

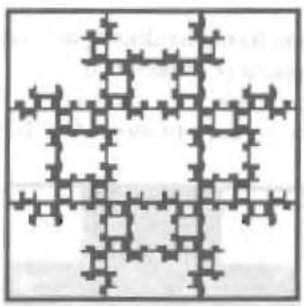
On applique la même procédure d'écornement à chacun des quatre quarts du carré :



et ainsi de suite:







Prolongements

La situation décrite peut bien sûr être généralisée; modifier le nombre des amies ne change pas grand chose. Contentons-nous de modifier le "degré d'attraction" de chacune des quatre amies, et jouons sur les règle R_1 et R_2 :

Pour la règle R_0, l'indécis totalement aléatoire, on peut observer deux phénomènes :

- si les amies sont très attirantes, (rapport d'homothétie plus grand que $\frac{1}{2}$, le territoire de l'indécis est le carré ABCD tout entier, comme quand le rapport d'homothétie est $\frac{1}{2}$, mais il semble ne pas se remplir de façon uniforme.

- si le rapport d'homothétie est inférieur à $\frac{1}{2}$, le territoire se fragmente de plus en plus; dans le cas du rapport $\frac{1}{3}$, par exemple, notre formalisation montre que le territoire de l'indécis est le produit de l'ensemble de Cantor par lui-même :

La formule (0) devient : $$z_{i+1} = \frac{2}{3}\ h_i + \frac{1}{3}\ z_i \qquad (0)$$

et le territoire est l'ensemble des points dont l'affixe est : $t = 2 \sum_{i=1}^{i=+\infty} \frac{u_i}{3^i}$

où u_i est choisi dans $\{\ 0,\ 1\ ,\ 1+i\ ,\ i\ \}$; les parties réelles et imaginaires des nombres t sont donc les réels de [0;1] dont le développement triadique ne contient que des 0 et des 2.

Les territoires les plus jolis sont obtenus avec la règle R_2, qui "fractalise" les territoires précédents, et en prenant des rapports d'homothétie proches de $\frac{1}{2}$.

Conclusion

La situation décrite dans cet article n'est pas d'une grande originalité; on trouvera par exemple dans l'article de Daniel Goffinet référencé ci-dessous l'étude complète d'un problème assez voisin. Nous voulons surtout montrer que des exercices classiques peuvent être revisités. Une dernière remarque : c'est souvent l'informatique qui permet de telles expériences, et ce fut le cas en l'occurrence ; il est en effet tellement facile d'obtenir une multitude d'images, en modifiant un peu la règle du jeu, et il est normal que certaines des images obtenues soient intéressantes...

Références :

Daniel Goffinet, *Serpents et Dragons*, Quadrature n° 10 Sept-Oct 1991

C.R.E.E.M. *Activités Mathématiques avec Imagiciels* - logiciel L'indécis - CRDP de Poitou-Charente (à paraître).