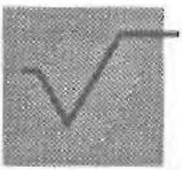
Certaines racines échappent à toute raison.

Yves Baelde
Collège P. de Ronsard (Paris)



Quand elle n'est pas un nombre entier, la racine carrée d'un entier positif est un nombre irrationnel. Comment le prouver, en ignorant la notion de nombre premier? Une répétition à l'infini est à la clé.

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, nous voudrions en convaincre un lecteur peu averti. En plus du faible niveau des connaissances requises pour suivre cette démonstration-là, l'intérêt de notre méthode géométrique vient de sa traduction possible en une preuve algébrique, facile à généraliser. En cette matière, les démonstrations habituelles utilisent les notions de fraction irréductible, de nombre premier, ou la notion de nombre pair ou impair, s'il s'agit d'étudier $\sqrt{2}$. Plus récemment, dans des livres pour lycéens, on exploite le développement en fraction continue de certaines racines carrées. On démontre que ce développement est infini, parce qu'il est périodique. On en déduit que la racine carrée en question est irrationnelle. Mais, dans nos preuves, les concepts mis en œuvre sont plus fondamentaux. S'il est possible de trouver une suite infinie de nombres positifs, qui est strictement décroissante, par contre, il est impossible que cette suite soit constituée de nombres tous entiers. En exhibant la construction absurde d'une telle suite, dans l'hypothèse où $\sqrt{2}$ est égal à une fraction quelconque, nous aurons prouvé l'absurdité de cette hypothèse. Ensuite, l'existence de la division euclidienne, dans l'ensemble des nombres entiers naturels, nous permettra de généraliser le raisonnement à la racine carrée d'un entier positif quelconque, qui n'est pas un carré parfait.

Qu'est-ce qu'un nombre irrationnel ?

Le mot «raison» qui vient en écho, quand on parle de «nombres irrationnels», ne le prenons pas dans ses premières acceptions. La raison en question n'est pas une cause, dans ce contexte, elle n'est pas non plus une faculté de l'homme de penser ou d'agir selon des principes.

Est ici appelée «raison» la base d'un calcul, ou d'une évaluation. Par exemple, on dira : à *raison* de 0.35F la page. Ou encore : la suite de nombres (3 ; 6 ; 12 ; 24) est une suite géométrique, de *raison* 2. Ou encore : avec un dérailleur, le développement d'une bicyclette varie en *raison* inverse du nombre de dents choisi sur la roue arrière.

La dénomination a un sens précis en mathématiques : un nombre *rationnel* est un nombre égal à une fraction. Autrement dit, c'est un nombre $\frac{a}{b}$, égal au quotient exact de deux nombres **entiers** a et b. Ou encore, un nombre $a \times \frac{1}{b}$, égal à un nombre **entier** de fois l'inverse d'un nombre **entier**. Et il existe des nombres non rationnels, qui sont appelés des nombres *irrationnels*. Est-ce bien raisonnable de vouloir prouver leur existence ?

La géométrie oblige à inventer des nombres nouveaux

Une première idée de théorie des nombres est donnée en géométrie, où l'enfant, progressivement, appréhende ce qu'est l'exactitude d'une évaluation. Il arrive que, dans une figure très simple, le système décimal ne permette pas d'écrire la longueur exacte d'un segment de droite, mais qu'une fraction y pourvoie. La figure 1 en est un exemple.

Dans d'autres cas, aucune fraction ne vaudra la longueur l, exprimée dans une certaine unité u, sauf à se contenter d'une valeur approximative de

$\frac{l}{u}$. Le rapport $\frac{l}{u}$ sera alors un nombre *irrationnel*. On dira aussi que les longueurs l et u sont *incommensurables*.

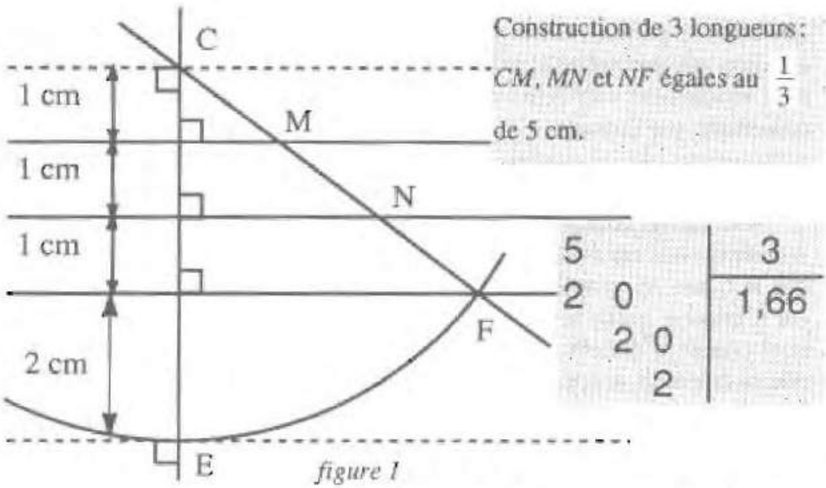


figure 1

En évitant le théorème de Pythagore, nous pourrons prouver que les longueurs OA et AB de la figure 2 sont incommensurables, quel que soit le triangle OAB rectangle et isocèle en O. En effet, si une fraction

$\frac{a}{b}$ valait $\frac{AB}{OA}$, nous pourrions choisir la longueur $\frac{OA}{b}$ comme unité, qui

serait aussi égale à $\frac{AB}{a}$. Alors, avec cette unité-là, les longueurs AB et OA seraient entières : $AB = a$, et $OA = b$. Or, ceci est impossible, ce sera démontré à l'issue de notre premier problème, avec cette assertion $\mathcal{C}$: « quelle que soit l'unité de longueur choisie, il n'existe aucun triangle rectangle isocèle, dont les longueurs des trois côtés soient des nombres entiers ». Ainsi, prouver la proposition $\mathcal{C}$ nous permettra d'affirmer que, dans la figure 2, aucune fraction nepeut valoir exactement le rapport des longueurs $\frac{AB}{OA}$.

Pour traiter le problème de géométrie, qui aboutit à la conclusion $\mathcal{C}$, il ne sera pas seulement possible d'ignorer le théorème de Pythagore, mais il sera nécessaire de l'ignorer, volontairement ou non. Pour convaincre un auditoire

de la vérité de la proposition $\mathcal{C}$, nous devrons obtenir son assentiment sur ce point crucial : une suite strictement décroissante de nombres entiers positifs, qui commence par le nombre k, possède au maximum $k+1$ termes. Pour éviter de décourager le néophyte dès le début, aucun nombre ne sera désigné par une lettre, pour commencer, mais une valeur numérique sera imposée : 70, comme premier terme de la suite infinie absurde. Ainsi, parce qu'il n'existe pas une infinité, mais seulement 70 nombres entiers positifs, qui sont strictement inférieurs à 70, la proposition plus particulière $\mathcal{P}$ sera démontrée, par l'absurde :
« il n'existe pas de triangle rectangle isocèle, dont les deux côtés égaux « mesurent 70 mm, et dont la longueur de l'hypoténuse soit 99 mm ».

Nous dirons pourquoi, avec le couple (70 mm ; 99 mm), les mesures des segments effectuées par les élèves restent intéressantes à critiquer, à mesure que la figure se complique. Mais ensuite, quand le millimètre sera remplacé par n'importe quelle unité de longueur, et le couple (70 ; 99) par n'importe quel couple d'entiers $(b\ ;\ a)$ strictement positifs, le même raisonnement pourra être tenu, si $b < a$. Et la conclusion générale $\mathcal{C}$ sera atteinte. Voici le principe de la démonstration.

Le coup gagnant en géométrie.

Sur deux droites d et Δ perpendiculaires en O, les points A et B sont marqués, de façon que, dans une certaine unité de longueur u, les longueurs OA et OB soient le même nombre **entier** strictement positif, noté b. La bissectrice de l'angle $\widehat{OAB}$, appelée d_1, coupe Δ au point A_1. La symétrie d'axe d_1 transforme O en C, et B en B_1.

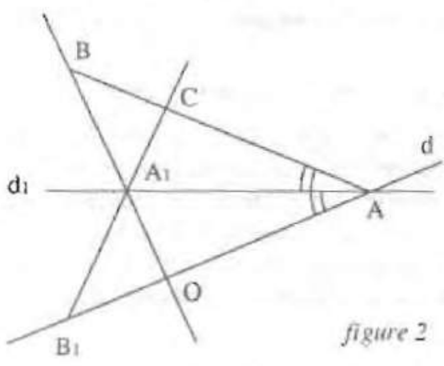


figure 2

Enfin, nous supposons le contraire de ce que nous voulons démontrer, à savoir que, dans la même unité de longueur u, un nombre **entier**, noté a, représente la longueur AB.
Sur le chemin vers l'absurdité, l'étape décisive sera la conclusion suivante, *que nous appelons* le « *coup gagnant* » :

OA_1B_1 est un triangle isocèle rectangle en O;

$OA_1 = AB - AC = a - b$;

$A_1B_1 = b - (a - b)$

$= 2b - a$; et $0 < OA_1 < OA$.

A partir du triangle OAB, un autre triangle est donc construit, nommé OA_1B_1, qui est aussi rectangle et isocèle en O, et dont les longueurs des côtés sont encore des nombres **entiers**, si on les exprime dans la même unité u.

Encore par l'absurde, démontrons les inégalités : $A_1 \neq O$, et $A_1 \neq B$. Si la longueur OA_1 était nulle, l'angle $\widehat{A_1AO}$ serait nul, et l'angle $\widehat{OAB}$, qui vaut le double de $\widehat{A_1AO}$, serait nul aussi. Alors, le triangle OAB ne serait plus un triangle. Nous aboutirions à la même absurdité en supposant que $A_1B = 0$, parce que l'angle $\widehat{A_1AB}$ serait alors nul. En admettant que $A_1 \in [OB]$, les inégalités strictes sont donc vraies : $0 < OA_1 < OB$, ou encore $0 < OA_1 < OA$.

En répétant le « coup gagnant », nous obtiendrons une infinité absurde de triangles. Voici comment. Supposons un moment que le triangle donné au départ ne soit plus OAB, mais qu'il soit OA_1B_1. A partir du triangle rectangle isocèle OA_1B_1, nous pouvons, comme précédemment, construire un autre triangle rectangle et isocèle en O, l'appeler OA_2B_2, démontrer que $OA_2 \in \mathbb{N}$, que $A_2B_2 \in \mathbb{N}$ et que $0 < OA_2 < OA_1$.

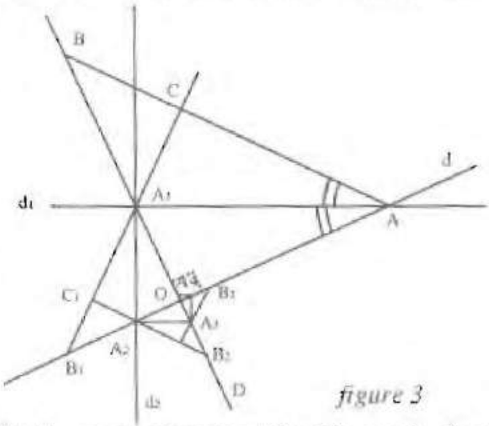


figure 3

Les constructions indiquées dans la figure 3 permettent d'inventer, en tournant autour du point O, une succession infinie de triangles OA_iB_i, tous rectangles et isocèles en O, dont les longueurs des côtés sont des nombres **entiers** de fois u. En effet, une nouvelle longueur sera toujours trouvée par une soustraction, à partir de deux

longueurs obtenues précédemment, et la différence entre deux nombres entiers est encore un nombre entier. On peut aussi remplacer A par A_i, et A_1 par A_{i+1}, dans la preuve des inégalités strictes $0 < OA_1 < OA$. Ainsi, on démontre par l'absurde que $0 < OA_{i+1} < OA_i$. Donc, les nombres **entiers** de fois u, qui sont les longueurs OA, OA_1, OA_2, OA_3, etc, constituent une suite **infinie strictement décroissante**. Puisqu'il existe seulement b nombres **entiers positifs**, qui sont **strictement inférieurs à** b, c'est absurde. Donc, l'existence du triangle rectangle initial est fausse. Et la proposition $\mathcal{C}$ est prouvée :
« il n'existe aucun triangle rectangle isocèle, dont les longueurs des trois côtés soient des nombres entiers d'une certaine unité de longueur ».

Dans l'hypothèse où $OA = OB = 70$ mm, et où $AB = 99$ mm, la fraction $\frac{AB}{OA}$ et les cinq termes de la suite $\left(A_iB_i/OA_i\right)_{1\le i\le 5}$ sont :

$\frac{99}{70}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{1}$. Ce sont les six premières *fractions de meilleure approximation* de $\sqrt{2}$, dans l'ordre inverse du développement en fraction continue de $\sqrt{2}$

Avec des lycéens, nous pourrions étudier des algorithmes qui génèrent ces fractions particulières, dans un ordre ou dans l'ordre inverse. Mais, dans le problème « des triangles trop nombreux », prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est comprendre que le premier choix des longueurs entières OA et AB n'est pas essentiel, et que la preuve de l'absurdité est toujours la même, quand $0 < OA < AB$. Ceci doit apparaître aux élèves, déjà convaincus de la vérité de la proposition $\mathcal{P}$: « il n'existe pas de triangle rectangle isocèle, dont les deux côtés égaux mesurent 70 mm, et dont la longueur de l'hypoténuse soit 99 mm ». Bien sûr, le nombre des étapes avant d'atteindre la conclusion $\mathcal{P}$ rend le raisonnement difficile pour des collégiens, et la généralisation demandée pour démontrer la proposition $\mathcal{C}$ réclame un certain sens de l'abstraction. Mais, au collège, puis au lycée, il s'agit d'apprendre à dégager une idée principale, pour que les idées aillent aussi loin que possible.

Le lien n'existe plus entre notre méthode et la théorie du développement en fraction continue, quand on remplace $\sqrt{2}$ par la racine carrée d'un autre entier naturel, qui n'est pas un carré parfait. Dans l'hypothèse où $\sqrt{2}$ est rationnel, une suite absurde est engendrée par les relations de récurrence : $a_{n+1} = 2b_n - a_n$ et $b_{n+1} = a_n - b_n$. Mais avec $\sqrt{12}$, par exemple, voici les relations qui interviendront : $a_{n+1} = 12b_n - 3a_n$ et $b_{n+1} = a_n - 3b_n$.

Dans le développement en fraction continue de $\sqrt{12}$, par exemple, les deux fractions $\frac{7}{2}$ et $\frac{45}{13}$ se suivent. A partir des égalités $a_0 = 45$, $b_0 = 13$, et des relations de récurrence précédentes, on obtient : $a_1 = 21$, et $b_1 = 6$. Certes, $\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ Mais $\frac{21}{6}$ n'est pas une fraction de meilleure approximation de $\sqrt{12}$, puisqu'elle n'est pas irréductible. Donc, l'étude d'une technique d'approximation, de $\sqrt{12}$ ou de $\sqrt{2}$, par des fractions, n'est ici qu'une question subsidiaire. Et il faudra bien laisser dans l'ignorance des collégiens, qui se poseraient la question du choix du couple (70 ; 99), dans l'énoncé ci-dessous.

Des triangles trop nombreux : pourquoi pas en quatrième ?

Partie I.

d et Δ sont deux droites perpendiculaires, qui se coupent au point O ; A est un point de la droite d, B est un point de la droite Δ, et ces deux points sont tels que : $OA = OB = 70$ mm. La droite d_1 est la bissectrice de l'angle $\widehat{OAB}$. Cette droite d_1 coupe Δ au point A_1. La symétrie d'axe d_1 transforme O en C, et B en B_1 (les triangles OAB et CAB_1 sont symétriques l'un de l'autre par rapport à d_1).

1°) Sur une feuille séparée, faire une figure précise, et écrire l'hypothèse. Mesurer ensuite le segment $[AB]$.

2°) Démontrer que B_1 est un point de la demi-droite $[AO)$, et que OA_1B_1 est un triangle rectangle.

3°) Démontrer que, si $AB = 99$ mm, alors $OB_1 = (99-70)$ mm $= 29$ mm.

4°) Démontrer que les points C, A_1, et B_1 sont alignés. Démontrer que CAB_1 est un triangle rectangle isocèle.

et que $\widehat{A_1B_1O} = 45°$.

5°) Démontrer que OA_1B_1 est un triangle rectangle isocèle, et que $CA_1 = OB_1$. En déduire que, si $AB = 99$ mm, alors $A_1B_1 = (70-29)$ mm.

Partie II.

Dans la même figure qu'à la partie I, d_2 est la bissectrice de l'angle $\widehat{OA_1B_1}$. Cette droite d_2 coupe d au point A_2. La symétre axiale d'axe d_2 transforme O en C_1, et B_1 en B_2.

1°) Compléter la figure de la question I.1°, et écrire le complément d'hypothèse.

2°) Est-il besoin d'un long discours pour prouver la particularité du triangle OA_2B_2 ? Que valent les longueurs OA_2 et A_2B_2, si $AB = 99$ mm ?

3°) De la même façon qu'on a obtenu OA_1B_1 à partir de OAB, et OA_2B_2 à partir de OA_1B_1, on peut indéfiniment construire un triangle rectangle isocèle à partir d'un autre.
Tracer OA_3B_3, pour montrer comment on peut ainsi, en tournant autour du point O, inventer une infinité de segments $[OA_1]$, $[OA_2]$, $[OA_3]$, etc, dont les longueurs sont des nombres entiers de millimètres.
Démontrer que $OA > OA_1 > OA_2 > OA_3$, etc.
Pourquoi est-il absurde de supposer que $AB = 99$ mm ?

Partie III.

Démontrer qu'il n'existe pas de triangle rectangle isocèle, dont les longueurs des trois côtés soient des nombres entiers d'une certaine unité de longueur.

La preuve algébrique peut être généralisée.

Dans n'importe quel triangle rectangle et isocèle, le rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur d'un autre côté vaut toujours le même nombre positif, dont le carré vaut 2. Pour le prouver sans trop d'algèbre, on peut choisir une échelle de reproduction du triangle rectangle isocèle, de façon que les côtés perpendiculaires du nouveau triangle mesurent une certaine unité de longueur, 1 dm par exemple.

Dans le problème précédent, l'égalité $\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{AB}{OA}$ peut s'écrire :

$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{a}{b}$. Cette égalité peut être obtenue par un raisonnement purement algébrique, dans l'hypothèse où $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, et où les nombres a et b sont deux entiers strictement positifs. Remarquer que des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, et que : $1^2 < 2 < 2^2$, permet de prouver que $0 < a-b < b$. Autrement dit, dans notre hypothèse, le quotient de la division euclidienne de a par b est la partie entière de $\sqrt{2}$, qui vaut 1. Et le reste de cette division, qui vaut $a-b$, n'est pas nul.

Si a et b sont deux entiers strictement positifs, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$,

alors : $\frac{a}{b} = \frac{2b}{a} = \frac{2b-a}{a-b}$; $a-b \in \{p \in \mathbf{N} : 0 < p < b\}$; et $2b-a \in \mathbf{N}$. L'itération permet de prouver l'absurdité de l'hypothèse.

La preuve se généralise sans difficulté, car une division euclidienne par b n'est rien d'autre qu'une soustraction du nombre b, répétée autant de fois que c'est possible dans N Résumons la démonstration.

Supposons que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, pour des nombres entiers n, a, et b strictement positifs. En notant q la partie entière de $\frac{a}{b}$, on prouve que $q \neq 0$, et que $\frac{qa}{qb} = \frac{nb}{a}$. Si $a - qb = 0$, alors $\sqrt{n}$ vaut l'entier q. Et si $a - qb \neq 0$, alors l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{nb-qa}{a-qb}$ est le « coup gagnant ».

Dans l'étude d'un exemple, il y aura moins de notations que dans le cas général. Une certaine habitude du calcul littéral est pourtant nécessaire pour traiter le problème suivant, avec le nombre $\sqrt{12}$.

Des entiers naturels trop nombreux.

On suppose qu'il existe une fraction qui vaut $\sqrt{12}$. On note $\frac{a}{b}$ cette fraction, où les deux nombres entiers a et b sont strictement positifs. On pose aussi : $b_1 = a - 3.b$.

1°) Démontrer que $b_1 \in \mathbb{N}$ et que $0 < b_1 < b$.

2°) Démontrer que $a.\sqrt{12} = 12.b$, et que

$b_1.\sqrt{12} = 12.b - 3.a$. En déduire que $b_1.\sqrt{12} \in \mathbb{N}$.

3°) En posant $a_1 = b_1.\sqrt{12}$, le raisonnement précédent permet d'obtenir une fraction $\frac{a_1}{b_1}$, qui vaut $\frac{a}{b}$, mais dont le dénominateur est strictement inférieur à b.

En procédant avec $\frac{a_1}{b_1}$ comme avec $\frac{a}{b}$, on invente une fraction $\frac{a_2}{b_2}$, qui vaut encore $\frac{a}{b}$, et dont le dénominateur b_2 est un entier positif strictement inférieur à b_1. Pourquoi est-ce absurde ?

4°) Conclure sur le nombre $\sqrt{12}$.

Pour la valeur de $\left(\frac{1\,694\,157}{489\,061}\right)^2$, quel résultat affiche votre calculatrice ? Qu'en pensez-vous ?

Une dernière fois, évoquons Euclide. L'anneau $\mathbb{Z}$ est un anneau principal, parce qu'il est euclidien. Si x est un nombre réel donné, alors $E_x = \{p \in \mathbb{Z} : px \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Et il existe un seul entier naturel b tel que $E_x = b.\mathbb{Z}$.

Si $b = 0$, alors x est irrationnel. Si $b \neq 0$, et si x est la racine carrée d'un entier positif, on peut nommer q la partie entière de x, poser $a = b.x$, et prouver que $a - qb \in E_x$. On en déduit que $a - qb = 0$, et alors $x = q$. Dans ce cas, x est un entier naturel.

Jadis, les nombres irrationnels étaient un sujet tabou, réservé aux seuls initiés de la secte des Pythagoriciens. Pour quelle raison ? De nos jours, des films et des livres mythifient l'ordinateur. Et l'exactitude absolue continue de nous fasciner.