Etudes

Une vision projective des courbes

Robert FERREOL
Lycée d' Enghien (95)

Résumé : *comment un programme informatique d'une cinquantaine de lignes peut nous faire (re)découvrir de belles propriétés projectives des courbes.*

Pour illustrer mon article sur les sujets d'étude (Cf *Bulletin* n°379 p. 309), je souhaiterais détailler un exemple qui en montre l'intérêt, pour l'enseigné comme pour l'enseignant.

Voici l'intitulé du sujet que j'ai donné parmi 50 autres, dont une dizaine faisait appel à l'outil informatique: *Ecrire un programme en turbo-pascal qui permette de tracer des courbes planes en perspective. Observer les perspectives de quelques courbes classiques et remarquer quelques-unes de leurs* *propriétés concernant leur comportement à l'infini.*

J'avais simplement eu l'idée de ce programme après avoir utilisé dans une démonstration le fait que la parabole est *tangente* à la droite de l'infini. Cette propriété n'est pas intuitive, et se trouve en général énoncée dans des cours sur les coniques dans le plan projectif complexe, sans la moindre illustration (par exemple dans *Cagnac Ramis Commeau (Masson 1971) tome 3 p.505*). Elle devait pouvoir se visualiser à l'aide d'un tel programme (dont je n'avais aucune idée a priori) ainsi que toutes les propriétés asymptotiques des courbes. De plus, le tracé classique des courbes en repère orthonormé, ne dépassant que rarement le carré $-2 \leq x, y \leq 2$, ne permet pas franchement de *voir* ce qui se passe à l'"infini".

Olivier Ramat qui a choisi ce sujet était en face d'un double problème brut : mathématique (car les perspectives coniques et la géométrie projective en général sont quasi exclues de tout le cursus scolaire), et informatique.

Il a réalisé un programme intéressant à la fois d'un point de vue mathématique car il permet de joliment visualiser les propriétés projectives des courbes, et informatique par sa convivialité.

Après simplification (et c'est là l'un des dangers de l'informatique : une expression mathématique compliquée se calcule aussi vite sur ordinateur que l'expression simplifiée et clarifiée, et les élèves ont tendance à s'arrêter à partir du moment où "ça tourne"), les formules de transformation qu'il a trouvées sont les suivantes :

```
Function xecran: REAL;
Begin
  If y + d <> 0 Then xecran := d * x / (y + d)
End;
Function yecran: REAL;
Begin
  If y + d <> 0 Then yecran := h * y / (y + d)
End;
```

Il est probable qu'il ait trouvé ces formules par examen de la figure qu'il voulait obtenir ("donnant l'impression d'une piste d'atterrissage"), ce qui est méritoire, car plus difficile que de les interpréter de la façon suivante : l'espace étant rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, les yeux d'un observateur se trouvent en Ω de coordonnées $(0, -d, h)$ (h = hauteur depuis le "sol" Oxy, d = distance à l' "écran" Oyz) et regardent un point $M(x, y, z)$; les coordonnées $x_e =$ `xecran` et $y_e =$ `yecran` sont alors respectivement l'abscisse et la cote du point d'intersection N de la droite (ΩM) avec l'écran.

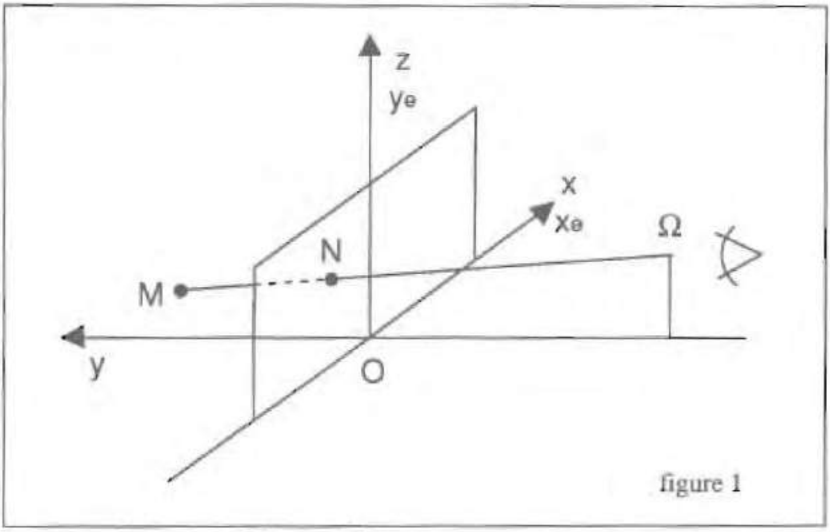

figure 1

En effet, la relation $\overrightarrow{\Omega N} = \lambda\, \overrightarrow{\Omega M}$ donne :

$x_e = \lambda x, \quad d = \lambda (d + y), \quad y_e - h = \lambda (z - h)$ soit :

$x_e = \dfrac{d\,x}{d+y} \qquad y_e = \dfrac{h\,y + d\,z}{d+y}$ ce qui redonne les formules de transformation de l'élève si l'on prend $z = 0$.

Ces deux formules sont celles d'une homographie du plan projectif dans lui-même, qui transforme la droite de l'infini de xOy en la droite $y_e = h$ (la ligne d'horizon). Mais comme rien ne se perd ni ne se crée, la droite $y = -d$ a, elle, été rejetée à l'infini de l'écran. Nous allons donc perdre des informations sur les courbes aux points d'ordonnée voisine de $-d$, mais en gagner de précieuses sur les points d'ordonnée voisine de $\pm\infty$.

Les formules de transformation inverse, qui nous permettront d'obtenir les équations écran des courbes planes réelles, sont les suivantes :

$$x = \frac{h\,x_e}{h - y_e} \qquad x = \frac{h\,x_e}{h - y_e}$$

Et maintenant, regardons les perspectives de quelques courbes, à commencer par les droites d'équation $y = ax + b$

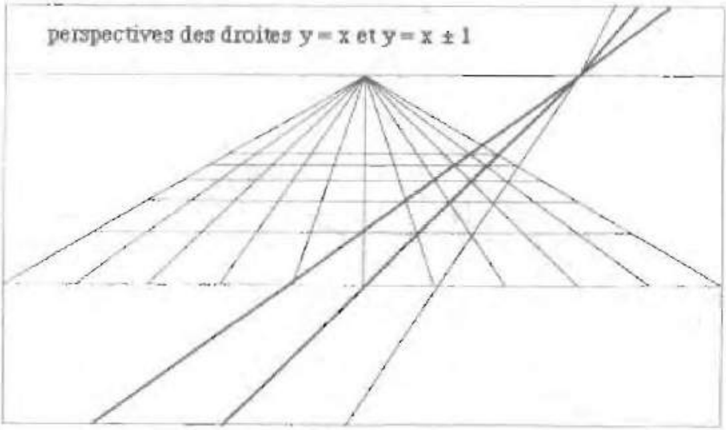

fig.2

Leur équation écran peut s'écrire : $(d + b)y_e = ahx_e + bh$ ou encore

$y_e - h = \dfrac{h\,a}{b+d}\left(x_e - \dfrac{d}{a}\right)$ et l'on constate que les perspectives des droites parallèles de pente a ≠ 0 passent toutes par le point à l'infini $I(a)=(d/a,\ h)$ (que l'on peut appeler le *point de fuite* des droites correspondantes), les perspectives des droites de pente nulle étant parallèles à la ligne d'horizon. Quant aux droites de pente infinie $x=cte$, leurs perspectives passent par $I(\infty) = (0, h)$. Chaque point de la ligne d'horizon caractérise donc une direction de droite.

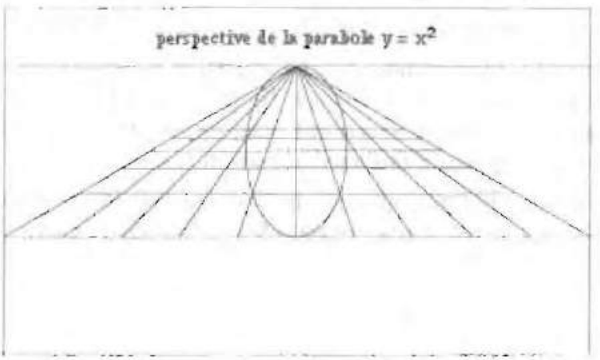

fig.3

Regardons maintenant la perspective de la parabole $y = x^2$:

Voilà enfin une preuve visuelle du fait que la parabole est tangente à la droite de l'infini !

Déterminons son équation écran ; $y = x^2$ devient :
$h^2 x_e^2 + d\, y_e^2 - dhy_e = 0$. C'est une **ellipse** de sommets O et I(∞) !

Observons maintenant la parabole penchée réunion des deux courbes $y = x - \sqrt{x}$ et $y = x + \sqrt{x}$:

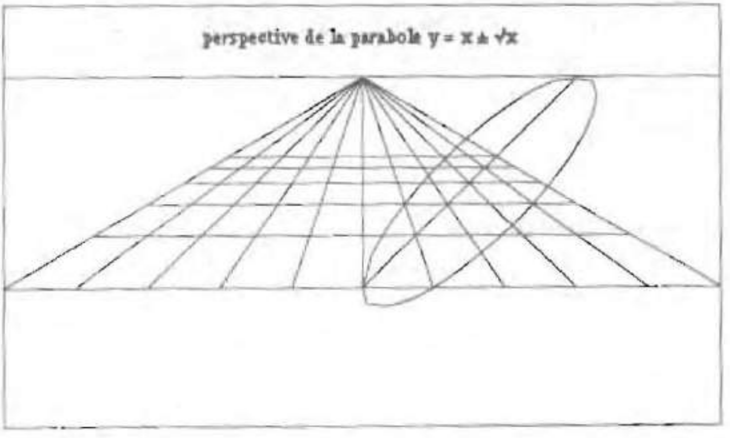

fig.4

C'est encore une ellipse, d'équation écran :

$$(dy_e - hx_e)^2 = hx_e(h - y_e)$$

Et ce qui est remarquable, c'est qu'elle est tangente à la droite de l'infini exactement au point I(1), le nombre 1 correspondant à la pente de sa direction asymptotique.

Ce résultat est-il général ? Supposons que le point M(x, y) aille à l'infini avec une direction asymptotique de pente a : ceci signifie que $\lim y_e = h$ et $\lim(y/x) = a$; la relation $x_e = d\,\frac{x}{y}\,\frac{y_e}{h}$ montre que le projeté écran (x_e, y_e) tend vers $(d/a,\ h) = \mathrm{I}(a)$. Autrement dit, toutes les courbes ayant une branche infinie de direction asymptotique de pente a ont une perspective qui passe par le point de fuite I(a) et réciproquement d'ailleurs. Voilà qui pourrait peut-être mieux faire passer auprès de nos élèves la notion de direction asymptotique.

On peut maintenant se demander comment va se visualiser la différence entre *asymptote* et *branche parabolique*. Un petit calcul nous donne $\dfrac{y_e - h}{x_e - \frac{d}{a}} = \dfrac{h\,a}{y - ax + d}$ ce qui nous montre que:

- si la courbe possède une asymptote $y = ax + b$, sa perspective est *tangente* à la perspective de l'asymptote au point de fuite I(a) (les nombreux élèves qui confondent tangente et asymptote n'ont donc pas foncièrement tort ...).

- si la courbe possède une branche parabolique de pente a ($y \sim ax$, et $lim(y - ax) = \infty$), sa perspective est *tangente* à la droite de l'infini en I(a).

Et ces raisonnements s'étendent au cas $a = \infty$. Regardons encore quelques exemples. Tout d'abord $y = 1/x$:

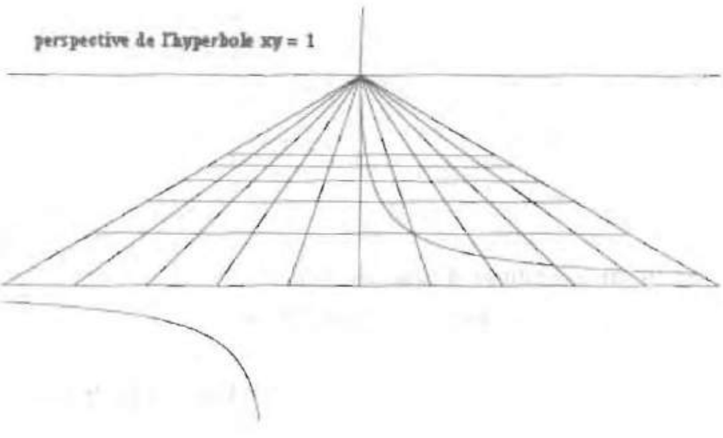

fig.5

On constate que les perspectives des deux branches infinies $x \to 0^+$ et $x \to 0^-$ se réunissent au point de fuite I(∞) et y forment un point tout à fait ordinaire avec pour tangente la droite $x_e = 0$. Vérification : l'équation écran de la courbe $xy = 1$ est :

$$hdx_e y_e = (h - y_e)^2$$

qui est de nouveau une hyperbole (dont tous les points sont ordinaires) d'asymptotes $x_e = 0$ et $y_e = hdx_e + 2h$.

D'un point de vue projectif, une courbe asymptote aux deux extrémités d'une droite et de part et d'autre, ou bien un point ordinaire, c'est la même chose...

Et quand les deux parties de la courbe sont à la même extrémité de l'asymptote ? Regardons $y = 1/x^2$:

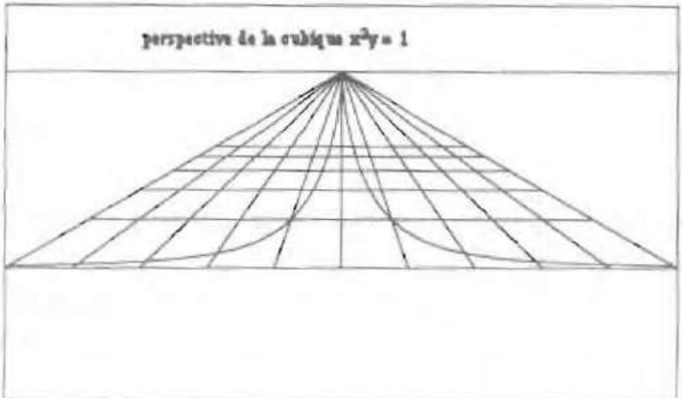

fig.6

On obtient un point de rebroussement de première espèce.

Pour regrouper tous les cas possibles, on peut écrire le tableau de conversion infini<->fini suivant :

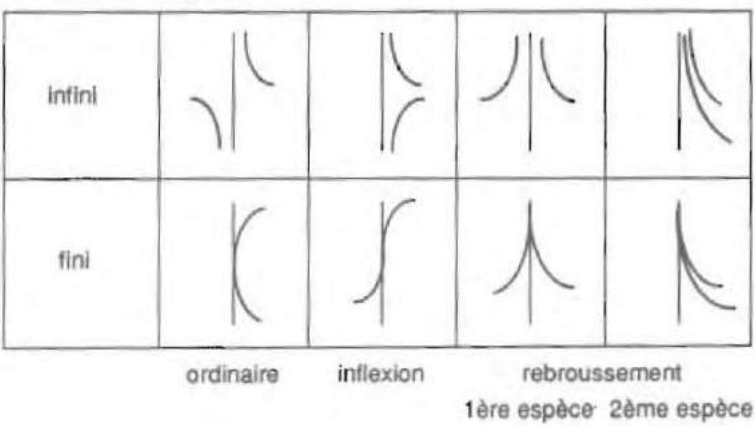

fig.7

O. Ramat a aussi proposé de regarder les perspectives du cercle trigonométrique en faisant varier le paramètre d, et il a observé que l'on obtenait de très diverses figures, qui ne sont pas toutes des ellipses comme on se l'imagine couramment. Avant de regarder les figures qui suivent, on pourra déjà regarder les figures formées par une pièce de monnaie que l'on rapproche horizontalement de son œil...

Pour percer le mystère, faisons tout de suite l'étude mathématique : l'équation écran de la projection est :

$$h^2 x_e^2 + d^2 y_e^2 = (h - y_e)^2$$

ce qui donne pour d ≠ 1 la forme réduite (!):

$$h^2 x_e^2 + (d^2 - 1)\left(y + \frac{h}{d^2 - 1)}\right)^2 = \frac{h^2 d^2}{d^2 - 1}$$

On obtient donc pour $d > 1$ (autrement dit les pieds de l'observateur sont en dehors du cercle) une ellipse, et plus précisément:

- pour $d > \sqrt{(1 + h^2)}$, c'est une ellipse de grand axe parallèle à Ox_e et dont le centre se rapproche de O quand d croit mais n'est pas égal à O.

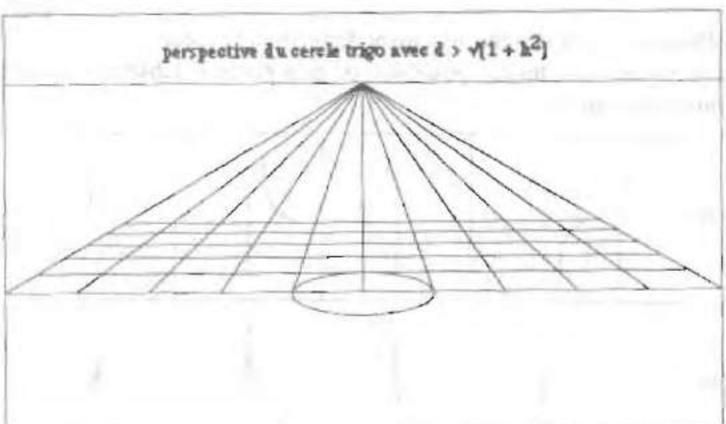

fig.8

- pour $d = \sqrt{(1 + h^2)}$, c'est le cercle d'équation :

$$x_e^2 + (y_e + 1/h)^2 = 1 + 1/h^2$$

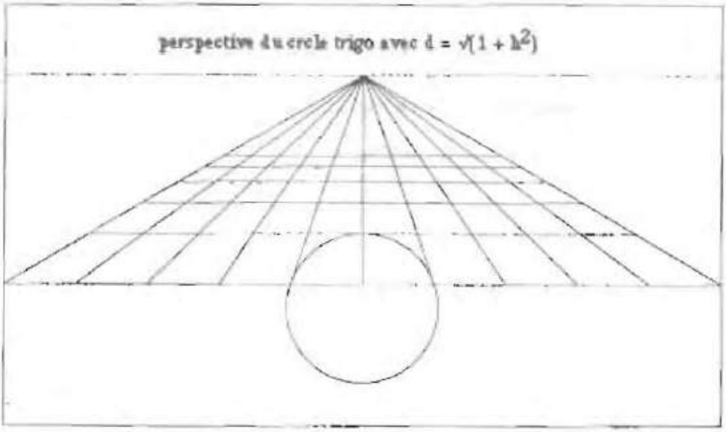

fig.9

- pour $1 < d < \sqrt{(1 + h^2)}$, c'est de nouveau une ellipse mais cette fois de grand axe Oy_e.

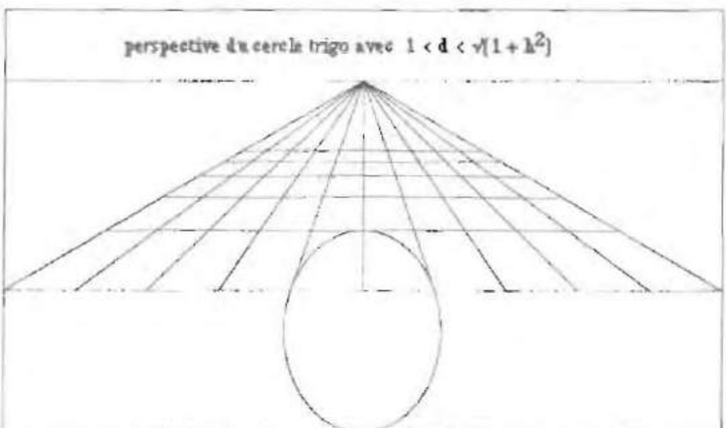

fig.10

- pour $d = 1$, c'est la parabole d'équation : $2y_e = h(1 - x_e^2)$

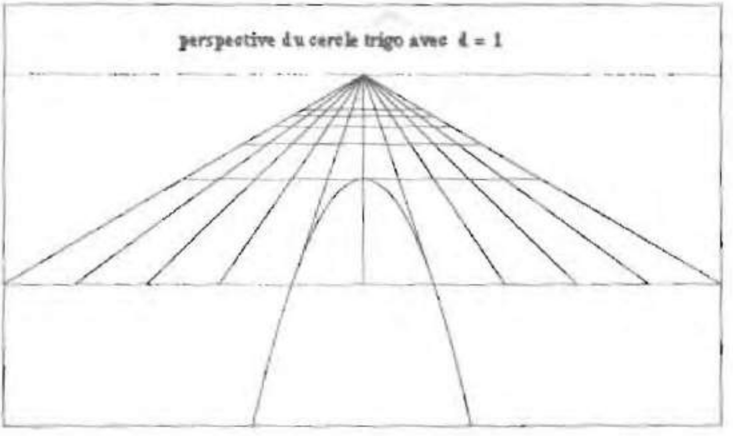

fig.11

et enfin pour $0 < d < 1$, c'est une hyperbole dont il semble que les asymptotes soient les perspectives des deux droites $x = \pm 1$.

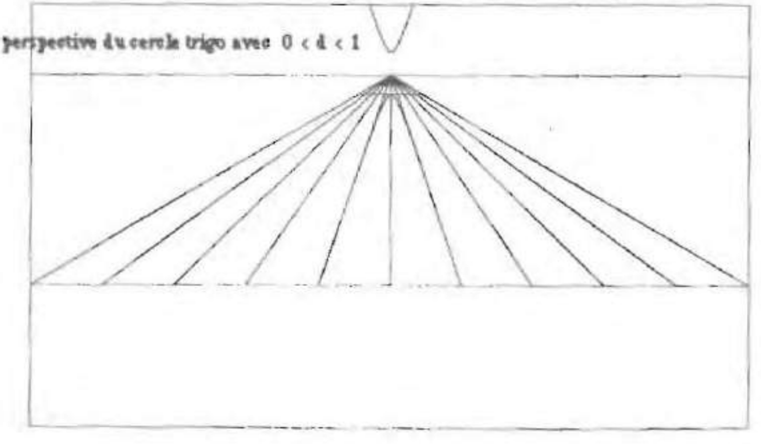

fig.12

Mais on sait que ceci est impossible puisque ces deux droites doivent aussi être des *tangentes* (une projection conique conserve le contact !).

Cependant ce n'est pas très faux car l'équation exacte de ces asymptotes est : $y_e - h/(1-d^2) = \pm hx_e / \sqrt{(1-d^2)}$, . Elle s'approxime pour d petit en $y_e - h = \pm hx_e$, qui est bien l'équation des droites supposées.

Tout ce qui précède illustre joliment le fait que cercle, ellipse, parabole et hyperbole sont diverses formes affines d'une même notion projective : les coniques propres.

O. Ramat a proposé d'étendre son programme aux courbes de l'espace (nous avons donné les formules de transformation ci-dessus) et a observé la projection d'une hélice circulaire, ce qui a encore été l'occasion d'observer une jolie propriété.

Choisissons une hélice d'axe Oy et regardons-la avec une hauteur $h = 0$.

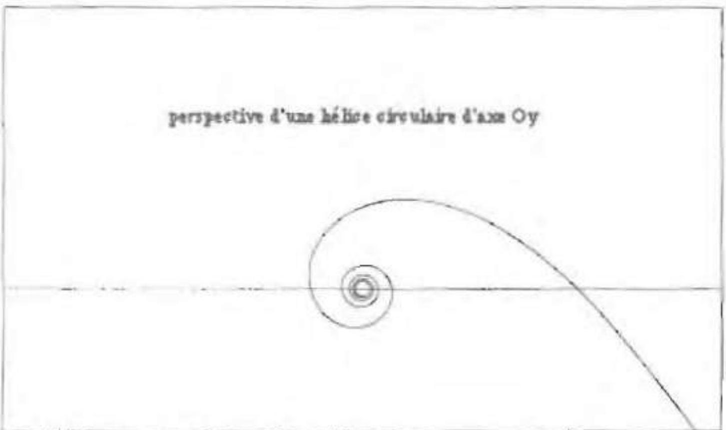

fig.13

On obtient une spirale dont on aimerait bien connaître le type; l'équation de départ : $x = a \cos t \quad y = b\, t \quad z = a \sin t$ devient

$$x_e = (d\, a \cos t)/(d + b\, t)$$

$$y_e = (d\, a \sin t)/(d + b\, t)$$

ce qui donne l'équation polaire $\rho = da/(d + b\ )$; on reconnaît une spirale *hyperbolique* $\rho = c\,/(\theta - \theta_0)$ avec

$c = da/b$ et $\theta_0 = -d/b$.

Une spirale hyperbolique est donc une perspective centrale d'hélice circulaire !

Ce qui précède est, je pense un bon exemple de dialogue fructueux entre professeur et élève obtenu à l'aide d'un sujet d'étude dont ni l'un ni l'autre ne savait où il allait les mener. Ceci demande évidemment un gros investissement de part et d'autre, mais je crois que le jeu en vaut la chandelle.

On trouvera en annexe le programme qui a servi à faire les figures ci-dessus. Je peux envoyer à toute personne qui m'adressera une disquette et une enveloppe de retour affranchie, ce programme, le programme originel de l'élève (avec utilisation de la souris, donc plus convivial mais non épuré de ses erreurs) ainsi que le module "graph5tr" auquel il fait appel.

R. FERREOL
6, rue des annelets
75019 PARIS

ANNEXE

```
Program TracesEnPerspective;
       (Olivier Ramat, avril 1992 ; version simpli-
fiée}
Uses
   crt,graph5tr {module dérivé de la bibliothèque
modulog intervenant pour les fonctions suivantes :
InitGraphique ; IsoFenetreMax(x1, x2, y1, y2);
Couleur(n) ; Rectangle(x1, x2, y1, y2); Segment(x1,
y1, x2, y2) et Deplace(x, y) dont les  fonctions
devraient se comprendre d'elles-mêmes};
Var
   x, y, z, xmin, ymin, ymax, t1, t2, d, h : REAL;
   i, n: BYTE;
Procedure Initialiser;
   Begin
      ClrScr;
      n := 1; {nombre de courbes à tracer}
      xmin := -5; ymin := -2; ymax := 4;
      d := 3; h := 3;
      Writeln('Intervalle d''étude [t1,t2] :');
      Write('t1= '); Read(t1); Write('t2= ') ;
```

```
Read(t2);
      InitGraphique ; IsoFenetreMax(xmin, -xmin,
ymin, ymax);
      Couleur(blanc);
   End;
Function xecran: REAL;
   Begin
      If y + d <> 0 Then xecran := d * x / (y + d)
   End;
Function yecran: REAL;
   Begin
     If y + d<>0 Then yecran:=(h * y + d * z)/(y+d)
   End;
Procedure PlacerRepere;
   Var
      t, p: INTEGER;
   Begin
      Rectangle(xmin, -xmin, ymin, ymax);
      Segment(xmin, h, -xmin, h);
      p := 5;{demi-largeur de la grille}
      x := p; z := 0;
      For t := 0 To p Do
         Begin
          y := t;
          Segment(-xecran, yecran, xecran,
                 yecran);{horizontal}
          Segment(-t, 0, 0, h);Segment(t, 0, 0, h);
         End;
   End;
Function xx (t: real; i: integer): real;
   Begin
     if i=1 then xx := 3*cos(t); {cas de l'hélice
                                  circulaire}
   End;

Function yy (t: real; i: integer): real;
   Begin
      If i = 1 Then yy := 3*t;
    End;
```

```
Function zz (t: real; i: integer): real;
   Begin
      If i = 1 Then zz := 3*sin(t);
    End;

Procedure Tracer (i: integer);
   Var
      t, yprecedent: REAL;
      j: INTEGER;
   Const
      pas =1000;
   Begin
      t := t1;
      x := xx(t, i); y := yy(t, i); z := zz(t, i);
      Deplace(xecran, yecran);
      For j := 1 To pas Do
        Begin
           t := t1 + j * (t2 - t1) / pas;
           x := xx(t, i); yprecedent := y; y :=
            yy(t, i); z := zz(t, i) ;
           if z>=0 then Couleur(rouge_clair) else
Couleur(cyan);
           If (y + d) * (yprecedent + d) > 0 Then
              Trace(xecran, yecran)
           Else
              Deplace(xecran, yecran);
         End;
      ReadLn ; ReadLn
   End;

Begin
   Initialiser;
   PlacerRepere;
   For i := 1 To n Do  Tracer(i)
End.
```