Ce texte a été adopté à l'unanimité par le Comité du 20 juin 1993

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Groupe de travail "APRES EVAPM"

Les activités géométriques nécessitent une alternance entre des moments d'investigation et des moments de réalisation, entre des moments d'analyse et d'autres de synthèse, étroitement liés dès lors que l'on se trouve dans un processus de production (reproduire et construire), comparable à celui de la technologie. (...)

Les activités géométriques dépassent l'acquisition de savoir-faire techniques et de compétence de tracé.

Compléments aux Programmes et Instructions
du 13 mai 1985 de l'Ecole Primaire.
Activités géométriques. (01/06/86).

Concernant les travaux géométriques en 6ème, les programmes précisent dans le bandeau : "*L'objectif fondamental en sixième est encore la description et le tracé de figures simples*" ; et pour chacune des trois années suivantes : "*La description et la représentation des objets géométriques usuels du plan et de l'espace ... demeurent des objectifs fondamentaux*". Faut-il voir dans le changement de formulation une évolution des exigences au niveau des apprentissages ? De quelle représentation s'agit-il ? Il ne faut pas perdre de vue, et il faudrait peut-être le préciser, que l'objectif fondamental est tout de même de développer, chez les élèves, les différentes formes de représentations des objets géométriques, représentations mentales et explicites (dessins, vocabulaire associé ...) qui facilitent l'appropriation des modèles géométriques.

On peut lire dans les Compléments aux Programmes et Instructions du 13 mai 1985 de l'Ecole Primaire (document daté du 01/06/86) qu'un élève doit apprendre à passer "*du monde des objets physiques à celui des objets géométriques*". S'il est nécessaire, au collège, de poursuivre cet objectif, il s'agira aussi de le prolonger en préparant les élèves à passer du monde des dessins à celui des modèles géométriques.

1) Vocabulaire géométrique et caractérisation des figures.

Dans de nombreuses situations, le langage mathématique utilise des mots du langage courant pour désigner des objets géométriques. Un exemple classique concerne les mots "base" et "hauteur". Il serait dangereux de "gommer" complètement le sens courant de tels mots ; il est au contraire indispensable, pour mieux en comprendre le sens mathématique, de considérer les raisons pour lesquelles ces mots ont été utilisés pour désigner ou caractériser des objets géométriques. Une telle démarche s'inscrit tout à fait dans le passage "du monde des objets physiques à celui des objets géométriques", et les commentaires des programmes devraient la préconiser.

Un autre point, à propos du vocabulaire, concerne les "abus de langage". Le langage en mathématiques n'est pas exempt d'ambiguïté, contrairement à ce que pensent beaucoup d'enseignants, y compris des enseignants de mathématiques. L'exemple le plus caractéristique dans ce domaine est le mot "angle" qui désigne tantôt une figure, tantôt une grandeur. Une pratique assez récente a montré combien les excès de rigueur dans le langage pouvaient rendre difficile la communication (le cosinus de l'écart angulaire...). Mais il faut que les élèves puissent prendre conscience de la polysémie des mots pour que celle-ci ne constitue pas un obstacle à l'acquisition des concepts. Aussi les commentaires des programmes devraient mettre l'accent sur ce problème pour que les enseignants y soient plus attentifs dans leurs pratiques.

A l'Ecole Primaire, les élèves ont appris à reconnaître et à nommer des figures géométriques ; mais, et c'est à notre sens tout à fait normal, ces noms sont des "identificateurs" visuels. Ainsi, pour la plupart des élèves arrivant au collège, un carré n'est pas un rectangle, un rectangle n'est pas un parallélogramme ; le vocabulaire est lié à la figure, à l'objet, et non pas à sa caractérisation.

Pour les mêmes raisons, les élèves ont du mal à se représenter les objets géométriques "élémentaires" (points, segments, droites, demi-droites, plans ...), à les considérer ou les reconnaître dans une figure complexe. Ainsi, en fin de sixième, *"quasiment tous les élèves complètent à peu près correctement"* une figure (EVAPM6/89 Q11-13) de telle sorte qu'elle admette une droite donnée comme axe de symétrie, et *"les deux tiers d'entre eux obtiennent même un résultat conforme à un calque des tolérances assez exigeant"* (Brochure EVAPM 6/89-5/90 page 34) ; alors que, s'il s'agit de l'image d'une droite par symétrie (EVAPM6/89 Q9-10), seulement 28 % réalisent un tracé conforme au calque des tolérances et 26 % seulement manifestent une bonne connaissance de la construction : **choix de deux points** sur la droite Δ, ces deux points étant souvent les "extrémités" du morceau de droite qui représente Δ (concept de droite).

Il faudrait insister pour que les activités proposées permettent aux élèves de progresser vers les modèles géométriques sans pour autant en exiger l'acquisition dès le collège.

2) Tracé, construction ; un problème de vocabulaire ?

Dans le paragraphe "Figures planes et aires planes" du programme de la classe de sixième, seuls les mots "tracé" ou "tracer" sont utilisés. En revanche, dans le paragraphe "Dans le plan, transformations de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite" , on ne rencontre que les termes "construction" et "construire", la seule exception étant le tracé du ou des axes de symétries de figures. Le "tracé" aurait-il un caractère "statique" et la "construction", un caractère "dynamique" ? Le "tracé" concernerait-il des objets géométriques "élémentaires" et la "construction", des objets géométriques "complexes" ? Le "tracé" reviendrait-il à considérer - et réaliser - des objets géométriques élémentaires <u>indépendants entre eux</u> (Menu "CREATION" dans le logiciel GEOMETRE), et la "construction", à considérer des objets géométriques <u>liés entre eux</u> par des propriétés (Menu "CONSTRUCTION" dans le logiciel GEOMETRE) ? Par exemple, *"**tracer** un cercle C ; **tracer** une droite (d) ; **construire** une perpendiculaire à la droite (d) qui soit tangente au cercle C"*. Mais alors quelle distinction fait-on dans les programmes entre *"**Tracer**, par un point donné, la perpendiculaire ou la parallèle à une droite donnée"* et *"**Construire**, par une méthode non imposée, sur papier blanc : la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle"* ? Dans les deux cas, les objets géométriques sont liés entre eux ! Il est fort probable que le fait d'utiliser indifféremment ces termes engendre des effets pervers dans l'enseignement de la géométrie au collège. Il serait donc souhaitable que les textes officiels clarifient leur usage, au moins en respectant une certaine cohérence dans le choix de l'un ou l'autre des termes.

3) Constructions géométriques et acquisition des concepts.

Toujours dans le chapitre "Activités géométriques" des Compléments aux Programmes et Instructions de l'Ecole Primaire, il est dit à propos de l'activité CONSTRUIRE : "*La construction est l'aboutissement d'un processus qui s'appuie sur la représentation et la description. Elle nécessite la mise en oeuvre des techniques de tracés associées à un vocabulaire fonctionnel. Pour les constructions dans l'espace, on pourra utiliser divers matériaux (pâte à modeler, carton, baguettes, fil de fer ...) ; (...) Notons que, si les matériaux utilisés sont très divers, ils ne sont pas interchangeables et ils ont leur spécificité dans la mesure où ils mettent en évidence certains aspects plutôt que d'autres : le papier ou le carton matérialisent les faces, leur nombre, la continuité ; le fil de fer met l'accent sur les arêtes et les sommets ; la pâte à modeler met en évidence le volume. La diversité des matériaux permet donc une bonne articulation entre la reproduction et la description, et peut aider à la représentation.*" Cet extrait met en évidence l'importance du matériel, chez les jeunes élèves, dans leur cheminement vers la connaissance. Le mot "construire" à l'école élémentaire a plutôt le sens de "représenter" au collège. Les activités préconisées ci-dessus devraient se poursuivre au collège, particulièrement en 6ème et 5ème, et il serait bon que les commentaires des programmes mettent l'accent, de la même manière que ceux de l'Ecole Primaire, sur l'importance des constructions et du choix des instruments dans l'acquisition des modèles géométriques. Ainsi, les instruments tels que la règle, l'équerre, le papier quadrillé ou le trace-parallèles seront privilégiés dans les constructions pour l'appropriation des concepts de parallélisme et d'orthogonalité ; l'utilisation du "compas-ficelle", du compas, de la bande de papier non graduée ou de la règle graduée pour un report de longueur met en jeu des concepts différents : la grandeur ou sa mesure. De même, pour la construction de la tangente, l'instrument utilisé (simple règle ou compas ou équerre) induit des points de vue différents sur les définitions possibles de la tangente à un cercle. Un commentaire de la brochure EVAPM 6/89-5/90 (page 28, 2ème §) fait remarquer à ce sujet : "*Nous avons déjà souligné que les élèves avaient du mal à travailler sur des grandeurs sans passer par leurs mesures ; c'était le cas lorsqu'il s'agissait de **comparer**, c'est aussi le cas lorsqu'il s'agit de **reproduire**. Il y a là un obstacle à la prise en compte du sens même des situations et il n'est pas impossible que cet obstacle ait, au* *moins partiellement, ses racines dans les pratiques d'enseignement. C'est du moins une hypothèse à laquelle nous pourrions réfléchir."*

A propos de la construction "sans méthode imposée" de la médiatrice et de la bissectrice, un commentaire de la brochure EVAPM6/89-5/90 (pages 26 et 27) précise: *"L'utilisation de l'équerre ou du rapporteur ne laissant pas de trace, nous avons convenu de coder 1 dès que la figure était conforme au calque. Les réussites enregistrées confondent de ce fait des comportements très différents. Il conviendrait de distinguer :*

- *l'utilisation du compas pour effectuer une* ***construction*** *au sens traditionnel,*
- *l'utilisation d'instruments du type équerre, rapporteur.(...)*
- *le* ***tracé*** *"au jugé". Ce dernier, lorsqu'il est correctement effectué, témoigne d'une bonne représentation mentale de la notion, ce qui n'est pas nécessairement le cas des élèves qui ont parfaitement assimilé une technique de construction."*

Il semble que la pratique du tracé "au jugé" ou "à main levée" ne soit pas assez répandue au collège. Le "dessin du géomètre" (construction précise) et le "dessin du mathématicien" (construction au jugé) ont des fonctions différentes. Bien qu'ils contribuent tous les deux, dans la phase d'apprentissage, à l'appropriation des modèles ou concepts géométriques, le premier peut développer le goût de la précision, du travail bien fait, aider à la conjecture, à la vérification d'un calcul de mesure ; le second est plutôt un objet de communication, une aide, un support à la démonstration ; il nécessite et donc développe une certaine dextérité manuelle. Il prépare les élèves à ne pas affirmer une propriété sur simple constat visuel ou par simple mesurage. Il est un élément déterminant dans le cheminement conceptuel des élèves : objets physiques, objets géométriques, modèles et concepts, vocabulaire associé.

On voit apparaître des logiciels de construction (exemple CABRI GEOMETRE) qui imposent aux élèves une perception rigoureuse et une caractérisation consciente (mais pas toujours formulée) des objets géométriques de base : segment, droite, cercle ... Mais leur utilisation suppose une volonté d'équipement dans les établissements, en matériels (Laboratoire de Mathématiques) et la formation correspondante des enseignants.

Notons enfin que la "technicité" ou l'économie de construction, qui peut être intéressant (cela est particulièrement flagrant pour la médiatrice d'un segment) n'est pas le but essentiel et ne doit pas masquer le concept lui-même. On rencontre bien des élèves jusqu'en 3ème ou ultérieurement qui savent *"tracer la médiatrice du segment [AB]"* mais ne savent pas *"tracer l'ensemble des points équidistants des points A et B"*.

4) Constructions et propriétés.

Nous avons vu précédemment l'importance des constructions et du choix des instruments dans l'appropriation de certains concepts géométriques ; mais il ne faudrait pas qu'une construction soit considérée comme un "truc", un algorithme "aveugle". Aussi est-il regrettable que les programmes n'insistent pas suffisamment sur le fait que toute construction est liée à une propriété et donc que le choix de la méthode de construction (et des instruments) est lié à la propriété considérée.

Par exemple, en ce qui concerne la médiatrice d'un segment, sa construction à la règle et au compas est liée à l'équidistance alors que sa construction à la règle graduée et à l'équerre est liée à l'orthogonalité et au milieu du segment.

La construction du parallélogramme à la règle et à l'équerre prend en compte le parallélisme des côtés opposés alors que sa construction à la règle et au compas prend en compte l'égalité des longueurs des côtés opposés, ou le fait que les diagonales se coupent en leur milieu.

On pourrait multiplier ainsi les exemples, et il est vrai que certaines constructions comme, par exemple, celle de la bissectrice à la règle et au compas sont en définitive de vrais problèmes pour des élèves de collège. Il faudrait donc que les programmes précisent quelles constructions (avec tout ce que ce mot comporte) doivent être maîtrisées à chaque niveau.

5) Construction et initiation à la démonstration.

Dans la brochure EVAPM6/89-5/90 (page 23), en conclusion de la partie "Connaissance du vocabulaire, des figures et des propriétés", on peut lire : *« En ce qui concerne la démonstration, rappelons que le programme de cinquième ne prévoit qu'une initiation à la "caractérisation" des figures et à "la mise en oeuvre de brèves séquences déductives mettant en jeu les outils mathématiques du programme". (...) il n'y a donc pas lieu de s'étonner, voire de s'inquiéter des difficultés observées chez les élèves, lorsqu'il s'agit d'expliquer ou d'argumenter. On peut penser en effet que les classes de Sixième et de Cinquième sont des classes où se mettent en place un certain nombre d'éléments et de relations qui s'épanouiront ultérieurement dans des situations de validation et de preuve (...)*

Par contre on pourrait rester attentif aux contradictions et ne pas laisser s'installer des habitudes de confusion entre perception et preuve, (...) entre mesure effectuée et mesure calculée, entre valeur exacte et valeur approchée, et bien sûr entre conjecture et fait avéré.»

Les difficultés d'expression et d'argumentation, normales pour des élèves de sixième et de cinquième, ne doivent pas pour autant être éludées ; les constructions mettent implicitement en œuvre des processus de déduction et toute tentative d'explication de la construction est, pour ces élèves, une excellente initiation à la démonstration. Dès la sixième on peut demander (sans pour autant exiger !) de justifier les constructions. Proposer des constructions avec des contraintes d'instruments (règle et compas) ou des contraintes de zone (sans sortir du cadre) peut constituer, suivant le niveau, un réel problème, un véritable défi. La résolution de tels problèmes, la justification, même maladroite, de telles constructions amène l'élève à faire la distinction entre perception et preuve, entre conjecture et fait avéré.

Un mot des transformations géométriques : elles sont nécessaires et sont appréciés des élèves comme activités de constructions. Les compétences exigibles à leur sujet (construire l'image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment...) donnent l'occasion de revenir sur les concepts de ces objets. Comme outils de démonstration, elles sont difficilement utilisables au collège, mais le travail cité précédemment facilite leur pratique au lycée.

6) Conclusion.

Il apparaît que les commentaires des programmes mettent trop l'accent, dans la colonne "compétences exigibles" sur la technicité des constructions et pas suffisamment sur la maîtrise des concepts. De plus, il ne faut pas perdre de vue que cette maîtrise des concepts passe par des activités mathématiques riches dans la classe.

Dès l'école élémentaire, il faudrait passer plus de temps à des activités permettant aux élèves de mieux appréhender les concepts. A l'arrivée en 6ème, mieux vaut un élève ayant une bonne pratique des instruments de tracé qu'un élève croyant que la géométrie se résume à l'utilisation de formules (périmètres, aires, volumes).

Il est regrettable (nous en avons eu encore l'exemple récemment) qu'il n'y ait aucune concertation entre la Direction des Ecoles et la Direction des Collèges pour l'écriture des programmes. Une définition claire des objectifs de l'enseignement de la géométrie à l'Ecole et au Collège, écrite conjointement par ces deux Directions, nous paraît nécessaire et amènerait peut-être à mieux cibler les compétences attendues des élèves à chaque niveau.