FIABILITÉ ET LOI BINOMIALE

Edith KOSMANEK
Université Paris I

Nous avons reçu de notre collègue Edith KOSMANEK le courrier suivant où elle propose un résultat quantitatif au problème de fiabilité comparée d'un avion «2m-réacteur» et d'un «(2m + 2)-réacteur».

On note $p \in]0,1[$ la probabilité de panne d'un réacteur quelconque au cours d'un vol donné ; les réacteurs sont indépendants et le $2m$-réacteur ne peut achever son vol que si m réacteurs, au moins, fonctionnent sans panne. Dans ces conditions, on démontre le résultat suivant :

Proposition :

Il existe une valeur $p^* = \dfrac{m}{2m+1}$ telle que :

- le $(2m + 2)$-réacteur soit le plus sûr pour $p < p^*$,
- le $(2m)$-réacteur soit le plus sûr pour $p > p^*$,
- les 2 réacteurs aient même fiabilité pour $p = p^*$.

Démonstration :

Soit P_{2m} la probabilité de vol réussi, pour un $2m$-réacteur et $\overline{P_{2m}} = 1 - P_{2m}$ la probabilité de crash. Le nombre de réacteurs sans panne, au cours d'un vol donné, suit une loi binomiale $B\ (2m, 1 - p)$. Il s'agit de résoudre l'équation

$f(p) = P_{2m+2} - P_{2m} = \overline{P_{2m}} - \overline{P_{2m+2}} = 0$.

Or, $P_{2m} = \sum_{k=m}^{k=2m} C_{2m}^{k} p^{2m-k}(1-p)^k$; d'où

$$f(p) = (1-p)^m \left[\sum_{k=m+1}^{2m+2} C_{2m+2}^{k} p^{2m+2-k}(1-p)^{k-m} - \sum_{k=m}^{2m} C_{2m}^{k} p^{2m-k}(1-p)^{k-m} \right]$$

On a aussi $\overline{P}_{2m} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k} p^{2m-k}(1-p)^k$; d'où

$$f(p) = p^{m+1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k} p^{m-1-k}(1-p)^k - \sum_{k=0}^{m} C_{2m+2}^{k} p^{m+1-k}(1-p)^k \right]$$

Comme $f(p)$ est un polynôme de degré $(2m+2)$, il peut s'écrire :

$$f(p) = p^{m+1}(1-p)^m(\alpha p + \beta) = p^{m+1} g(p).$$

Le polynôme $g(p)$, de degré $(m+1)$ peut s'écrire $g(p) = (-1)^m \alpha p^{m+1} + \ldots + \beta$.

La constante β provient du terme $\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k} p^{m-1-k}(1-p)$ pour $k = m-1$.

Soit $\beta = C_{2m}^{m-1}$: le coefficient de p^{m+1} provient du terme :

$-\sum_{k=0}^{m} C_{2m+2}^{k} p^{m+1-k}(1-p)^k$ soit $(-1)^m \alpha = -\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{2m+2}^{k}$; grâce au triangle de Pascal, il vient : $(-1)^m \alpha = (-1)^{m+1} C_{2m+1}^{m}$ donc $\alpha = -C_{2m+1}^{m}$.

D'où finalement, l'écriture du polynôme $f(p)$:

$$f(p) = p^{m+1}(1-p)^m \left(C_{2m}^{m-1} - C_{2m+1}^{m} p \right).$$

Pour $p \in \,]0,1[$, il existe donc une racine unique $p^* = \dfrac{m}{2m+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$ et le résultat annoncé est immédiat.

Pour $m = 1$ par exemple, cette proposition prouve ce résultat curieux : un quadriréacteur est moins sûr qu'un biréacteur pour $p \in \,]1/3,1[$.

Pour $m \to +\infty$, $p^* \to 1/2$, donc un biréacteur est plus sûr que tout $(2m)$-réacteur pour $p \in [1/2,1[$.

Merci à mon collègue de l'Université Paris I, Claude Bouzitat pour sa contribution.

Références :

[1] E.KOSMANEK *«Y a-t-il un probabiliste dans l'avion ?»*, Revue «Quadrature» n°4, page 12.

[2] J.MOREAU de SAINT MARTIN *«Y a-t-il un probabiliste dans l'avion ?»* -Réponse à l'article d'E.KOSMANEK. Revue «Quadrature» n°13, page 4.