Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire créatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes" … si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P.) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ENONCÉ N°219 (François LO JACOMO, Paris).

Trouver le plus possible de fonctions f, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (ou resp. de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$), vérifiant pour tout réel (resp. complexe) x et tout entier $n > 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right)$$

$f(x) = a(x - \frac{1}{2})$

$f(x) = 0$ convient

ÉNONCÉ N° 220 (M.ROUSSELET, Herblay)

Soit ABC un triangle quelconque. Déterminer le plus grand triangle équilatéral inscrit dans le triangle ABC.

ÉNONCÉ N° 221 (M.DELEHAM, Reims).

Soit p un entier ≥ 3 ; montrer que p est premier si et seulement si le nombre de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers ≥ 0 tels que $(p-1) = a(a+1) + b(b+1) + c(c+1) + d(d+1)$ est égal à $(p+1)$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°204 (Miguel AMENGUAL COVAS; Cala Fifueira, Majorque - Espagne).

On se donne dans $\mathbf{R}^3$ un paraboloïde elliptique. Trouver le lieu des centres des sphères qui coupent le paraboloïde selon deux cercles.

SOLUTION de René MANZONI (Le Havre).

Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, on donne le paraboloïde elliptique $\mathcal{E}$ admettant $f(x\ ,\ y\ ,\ z) = 0$ pour équation cartésienne, avec $f(x\ ,\ y\ ,\ z) = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} - 2z$ et $p \geq q > 0$.

1°) S'il existe une sphère $\mathcal{S}$ d'équation $g(x\ ,\ y\ ,\ z) = 0$, avec $g(x\ ,\ y\ ,\ z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2$ qui coupe $\mathcal{E}$ selon deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors, pour une valeur convenable du réel λ, on a l'identité $f(x\ ,\ y\ ,\ z) - \lambda g(x\ ,\ y\ ,\ z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)\ (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta')$. Cela signifie qu'il existe deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, d'équations respectives $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ et $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$, tels que

$$\mathcal{C} = \mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \mathcal{P} \cap \mathcal{E},\ \mathcal{C}' = \mathcal{P}' \cap \mathcal{S} = \mathcal{P}' \cap \mathcal{E},$$

et $$\mathcal{C} \cup \mathcal{C}' = \mathcal{S} \cap \mathcal{E} = (\mathcal{P} \cup \mathcal{P}') \cap \mathcal{S} = (\mathcal{P} \cup \mathcal{P}') \cap \mathcal{E}$$

En observant les termes du second degré, il apparaît que la forme quadratique $Q(x\ ,\ y\ ,\ z) = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$ doit être le produit $(\alpha x + \beta y + \gamma z)\ (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)$ de deux formes linéaires. Il faut donc que le discriminant de $Q(x\ ,\ y\ ,\ z)$ soit nul, d'où $\begin{vmatrix} \frac{1}{p} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$

La valeur $\lambda = 0$ ne convient pas, puisque $Q(x\ ,\ y\ ,\ z) = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}$ n'est pas le produit de deux formes linéaires (sur $\mathbf{R}$ bien entendu). Pour la même raison, la valeur $\lambda = \dfrac{1}{q}$ ne convient pas non plus dans le cas général où $p > q$.

car $Q(x, y, z) = -\frac{1}{q}\left(\frac{p-q}{p}x^2 + z^2\right)$.

La valeur $\lambda = \frac{1}{p}$ est la seule possible et donne :

$$Q(x, y, z) = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - \frac{1}{p}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{p}(ky - z)(ky + z)$$

avec $k = \sqrt{\frac{p-q}{q}}$.

Ainsi, pour que la sphère $\mathcal{S}$, telle que $\mathcal{S} \cap \mathcal{E} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$, existe, il est nécessaire que l'on ait l'identité

$$f(x, y, z) - \frac{1}{p}g(x, y, z) = \frac{1}{p}(ky - z + \delta)(ky + z - \delta')$$

donc

$$x^2 + \frac{p}{q}y^2 - 2pz - g(x, y, z) = k^2y^2 - z^2 + \delta(ky + z) - \delta'(ky - z) - \delta\delta',$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - k(\delta - \delta')y - (\delta + \delta' + 2p)z + \delta\delta'$$

d'où $a = 0$, $\quad b = \frac{k(\delta - \delta')}{2}$, $\quad c = \frac{\delta + \delta'}{2} + p$.

et $\quad r^2 = \frac{p(\delta - \delta')^2}{4q} + p(\delta + \delta') + p^2$.

En outre, les intersections considérées doivent être non vides. Dans le plan $x = 0$, il faut donc que la parabole $y^2 - 2qz = 0$ soit rencontrée réellement par la droite $ky - z + \delta = 0$ (resp. $ky + z - \delta' = 0$), d'où $y^2 - 2kqy - 2q\delta = 0$, $\Delta' = k^2q^2 + 2q\delta \geq 0$, $\delta \geq -\frac{p-q}{2}$ (resp. $\delta' \geq -\frac{p-q}{2}$).

Si $p = q$, on doit avoir $\delta \geq 0$, $\delta' \geq 0$, donc $b = 0$ et $c \geq p$, ce qui exprime l'appartenance du centre (a, b, c) de la sphère $\mathcal{S}$ à la demi-droite $\mathcal{L}$ constituée des points (x, y, z) tels que $x = 0$, $y = 0$, $z \geq p$.

Si $p > q$, on a $\delta = c - p + \frac{b}{k}$, $\delta' = c - p - \frac{b}{k}$, et il faut donc que $c + \frac{b}{k} \geq \frac{p+q}{2}$, $c - \frac{b}{k} \geq \frac{p+q}{2}$, ce qui exprime l'appartenance du centre (a, b, c) de la sphère $\mathcal{S}$ à l'ensemble $\mathcal{L}$ des points (x, y, z) tels que $x = 0$,

$z + \frac{y}{k} \geq \frac{p+q}{2}$, $z - \frac{y}{k} \geq \frac{p+q}{2}$ qui, dans le plan $x = 0$, est l'intersection de deux demi-plans.

2°) Réciproquement, à partir de n'importe quel point $(a\ ,\ b\ ,\ c)$ de $\mathcal{L}$, on sait retrouver δ et δ', ainsi que tous les objets ci-dessus :

Cas particulier de p = q, donc de k = 0 :

Le paraboloïde elliptique $\mathcal{E}$ est de révolution. Si l'on donne $a = 0$, $b = 0$ et $c \in [p\ ,\ +\infty[$, on peut choisir arbitrairement δ tel que $0 \leq \delta \leq 2(c-p)$, d'où $\delta' = 2(c-p) - \delta \geq 0$. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ définis par les équations respectives $z = \delta$ et $z = 2(c-p) - \delta$, coupent effectivement $\mathcal{E}$ selon les «parallèles» $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, qui sont inclus dans la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2cz+\delta[2(c-p)-\delta]=0$, de centre $(0\ ,\ 0\ ,c)$ et de rayon $r = \sqrt{(\delta - c)^2 + 2p\delta}$.

Cas général de p > q, donc de k > 0 :

Le paraboloïde elliptique $\mathcal{E}$, n'est pas de révolution. Si l'on donne $a = 0$, ainsi que les réels b et c vérifiant $c + \frac{b}{k} \geq \frac{p+q}{2}$ et $c - \frac{b}{k} \geq \frac{p+q}{2}$, on obtient $\delta = c - p + \frac{b}{k}$ et $\delta' = c - p - \frac{b}{k}$. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ définis par les équations respectives $ky - z + c - p + \frac{b}{k} = 0$ et $ky + z - c + p + \frac{b}{k} = 0$, coupent effectivement $\mathcal{E}$. La sphère $\mathcal{S}$, de centre $(0\ ,\ b\ ,\ c)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{p}{p-q} b^2 + 2pc - p^2}$ admet $g\ (x\ ,\ y\ ,\ z) = 0$ pour équation, avec

$$g\ (x\ ,y\ ,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2by - 2cz + (c-p)^2 - \frac{q}{p-q} b^2 .$$

On constate que

$$p.f(x\ ,y\ ,z) - g\ (x\ ,y\ ,z) = \left(ky - z + c - p + \frac{b}{k}\right)\left(ky + z - c + p + \frac{b}{k}\right).$$

Il en résulte que $\mathcal{P} \cap \mathcal{E} = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{P}' \cap \mathcal{E} = \mathcal{P}' \cap \mathcal{S}$, ce qui prouve que $\mathcal{S}$ coupe $\mathcal{E}$ selon deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de ces cercles sont appelés plans cycliques.

Finalement le lieu cherché est $\mathcal{L}$.

REMARQUE

Jacques DAUTREVAUX (Alpes Maritimes - Saint André) a sensiblement généralisé ce problème, écrivant entre autres : «j'ai rédigé une étude complète générale du même problème étendu aux quadriques générales, mais cela fait une cinquantaine de feuillets manuscrits».

Il serait difficile de rendre compte de cet important travail dans la présente rubrique, mais les lecteurs intéressés seront mis en contact, à leur demande, avec Jacques DAUTREVAUX.

Autres solutions :
Jacques DAUTREVAUX (Sant-André), R.RAYNAUD (Digne), L.G. VIDIANI (Dijon), et deux solutions fausses.

ÉNONCÉ N° 205
Déterminer les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout x et tout y réels : $f(\sqrt{x^2+xy+y^2}) = f(x).f(y)$.

SOLUTION de Maurice PERROT (Paris).
(Quelques quantificateurs ont été omis pour abréger).

Faisons $x = y = 0$. Il vient $f(0) = [f(0)]^2$ donc $f(0) \in \{0 , 1\}$.
1- Si $f(0) = 0$, faisons $x = 0$. Il vient $f(|y|) = 0$; f est donc nulle sur $\mathbf{R}_+$.

Faisons $x = y < 0$. Il vient $f(|y|\sqrt{3}) = [f(y)]^2$; or $|y|\sqrt{3} \in \mathbf{R}_+$ donc $\forall y < 0, f(y) = 0$.
f est donc l'application nulle, et la réciproque est évidente.
2- Si $f(0) = 1$, faisons $x = 0$. Il vient $f(|y|) = f(y)$: f est donc paire.
Faisons $x + y = 0$. Il vient $f(|x|) = f(x).f(y)$ d'où $f(x) = [f(x)]^2$ et $f(x) \in \{0 , 1\}$.
a) L'application constante $x \mapsto 1$ est visiblement solution.
b) S'il existe $x_1 \neq 0$ tel que $f(x_1) = 0$, on peut supposer $x_1 > 0$ (f étant paire).

$\forall y \in \mathbf{R}$, $f\left(\sqrt{x_1^2 + x_1 y + y^2}\right) = f(x_1)f(y) = 0$.

Comme $x_1^2 + x_1 y + y^2$ balaie $\left[\dfrac{3x_1^2}{4}, +\infty\right[$ quand y parcourt $\mathbf{R}$, f est nulle sur $\left[x_1\dfrac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$

En posant $x_{n+1} = x_n\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et en itérant, on voit que pour tout $n \geq 1$, f est nulle sur $\left[x_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n , +\infty \right[$. A la limite, f est nulle sur $\mathbf{R}_+ - \{0\}$; donc sur $\mathbf{R} - \{0\}$ (f étant paire).

Pour cette troisième application, ($f(x) = 0$, sauf $f(0) = 1$), voyons la réciproque :

- si $x = y = 0$ $f(\sqrt{x^2 + xy + y^2}) = f(0) = 1$ et $f(x)f(y) = 1$.

- si $x \neq 0$, $x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3x^2}{4} > 0$, $f(\sqrt{x^2 + xy + y^2}) = 0$

et $f(x)f(y) = 0 f(y) = 0$.

- si $y \neq 0$, même raisonnement en permutant x et y.

Le problème admet donc trois solutions :

f constante $= 0$
f constante $= 1$
$f(x) = 0$ sauf $f(0) = 1$.

REMARQUE:

L'énoncé initialement proposé par Roger CUCULIÈRE était : «Déterminer les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tout x et tout y réels, $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y)$», ce qui permettait de «croiser des fonctions exotiques», selon l'expression de Michel TANGUY.

Autres solutions :

Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles) ; Jean GOUNON (Paris) ; Marc LAVENIR (Saint Vallier) ; René MANZONI (Le Havre) ; Eric OSWALD (Bonneville) ; Bernard POIRIER (Hyères) ; Marguerite PONCHAUX (Lille) ; R. RAYNAUD (Digne) ; Geneviève SAMBARD (Saint Quentin) ; Pierre SAMUEL (Hossegor) ; Michel TANGUY (Quimper) ; Gheorghe Joan VELCIOV (Timis-Roumanie) ; L.G. VIDIANI (Dijon).

ÉNONCÉ N°206 (François LO JACOMO, Paris).

Soit a un entier > 0, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n > 0$, $u_{n+1} = au_n + u_{n-1}$. Montrer que, quel que soit n, si l'on appelle m la partie entière de $\frac{4}{3}(n + 2)$, le produit : $u_1.u_2 \ldots u_m$ est divisible par $n!$

DEMONSTRATION

En notant $[x]$ la partie entière de x, l'exposant d'un nombre premier p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers vaut précisément : $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] \ldots < \frac{n}{p-1}$ car l'intervalle $[1\ ,\ n]$ contient $\left[\frac{n}{p}\right]$ multiples de p, dont $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ multiples de p^2, dont ... $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ multiples de p^k ...

Le problème se ramène à prouver que, pour tout nombre premier p, cet exposant n'est pas supérieur à celui de p dans la décomposition en facteurs premiers de $u_1 u_2 \ldots u_m$ pour tout nombre premier p.

Commençons par quelques lemmes:

① $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $\left[\frac{[x]}{k}\right] = \left[\frac{x}{k}\right]$ car l'intervalle $\left]\frac{[x]}{k}\ ,\ \frac{x}{k}\right]$ ne contient pas d'entiers.

② $\forall\, n \geq 1$ et $\forall\, k \geq 1$

$u_{n+k-1} = u_n u_k + u_{n-1} u_{k-1}$ (1)

C'est évident pour $k = 1$ et $k = 2$, ce qui permet de le démontrer par récurrence sur k.

③ Si d divise n, u_d divise u_n, car, d'après la relation (1),

$u_{(k+1)d} = u_{kd} u_{d+1} + u_{kd-1} u_d$ et ce lemme 3 en résulte par récurrence sur k.

Dès lors, distinguons deux cas :

A) si p divise a, alors p divise $u_2 = a$, donc p divise u_{2k} pour tout $k \geq 1$; l'exposant de p dans $u_1 . u_2 \ldots u_m$ est donc $\geq \left[\frac{m}{2}\right] = \left[\frac{2}{3}(n+2)\right] > \frac{2}{3}n > \frac{n}{p-1}$ dès que $p \geq 3$. Or, pour $p = 2$, $u_4 = a(a^2 + 2)$ est divisible par 4 puisque a est pair, donc u_{4k} est divisible par 4 et l'exposant de p est donc $\geq \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] > \frac{3m}{4} - 2 = n$ d'où le résultat lorsque p divise a.

B) si p ne divise pas a, le plus petit entier q tel que p divise u_q est $\leq p + 1$.

Plusieurs démonstrations de ce résultat sont possibles, celle faisant appel au minimum de connaissances et de calculs semble être la suivante :

Considérons la suite des $u'_n = u_n$ modulo p, $u'_n \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et appelons q le plus petit entier ≥ 1, s'il existe, tel que p divise u_q, donc tel que $u'_q = 0$ (si tous les u'_n sont non nuls, on pose $q = +\infty$).

Pour tout $1 \leq k < q$, les $v_k = \dfrac{u'_{k+1}}{u'_k} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ existent tous et sont tous distincts, car si deux d'entre eux étaient égaux, $v_{k'} = v_k$ avec $k' < k$, la relation de récurrence définissant u_k, qui vaut également pour u'_k et entraîne donc $v_k = a + \dfrac{1}{v_{k-1}}$ (pour $k \geq 2$), impliquerait : $v_{k'-1} = v_{k-1}$, et donc, de proche en proche, $v_{k'-j} = v_{k-j}$ tant que $j < k'$, d'où $v_1 = a = v_n$, avec $n = k + 1 - k'$ $(2 \leq n < q)$. Comme $u'_{n+1} = au'_n + u'_{n-1}$, $v_n = \dfrac{u'_{n+1}}{u'_n} = a \Rightarrow u'_{n-1} = 0$, en contradiction avec la définition de q. Or, dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, les v_k ne peuvent pas prendre plus de p valeurs distinctes ; il en résulte que $q - 1 \leq p$.

Dès lors, l'exposant de p dans le produit $u_1.u_2....u_m$ est $\geq \left[\dfrac{m}{q}\right] \geq \left[\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{n+2}{p+1}\right)\right] \geq \left[\dfrac{n}{p-1}\right]$ dès que $p \geq 7$.

Pour $p = 5$: soit $a^2 \equiv 1$ (mod 5) auquel cas, u_5 est divisible par 5, soit $a^2 \equiv 4$ (mod. 5) auquel cas u_3 est divisible par 5 ; dans tous les cas, $q \leq 5$, donc l'exposant de p est $\geq \left[\dfrac{m}{5}\right] = \left[\dfrac{4}{15}(n+2)\right] \geq \left[\dfrac{n}{4}\right]$.

Pour $p = 3$, $a^2 \equiv 1$ (mod. 3) donc u_4 est multiple de 3, mais cela ne suffit pas ! Il nous faut refaire appel à la relation (1) du lemme ② pour écrire :

$$\begin{aligned}
u_{3n} &= u_n u_{2n+1} + u_{n-1} u_{2n} \\
&= u_n\left(u_n u_{n+2} + u_{n-1} u_{n+1}\right) + u_{n-1} u_n\left(2u_{n+1} - au_n\right) \\
&= 3u_n\left(u_{n+1} u_{n-1}\right) + u_n^2 u_n\left(u_{n+2} - au_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

prouvant ainsi que si u_n est multiple de 3, u_{3n} est multiple de $3u_n$. Donc, pour tout $n = 4k.3^\alpha$, u_n est multiple de $3^{\alpha+1}$ (par récurrence sur α), et donc l'exposant de 3 vaut au moins :

$\left[\dfrac{m}{4}\right] + \left[\dfrac{m}{12}\right] + ... + \left[\dfrac{m}{4.3^\alpha}\right] + ... = \left[\dfrac{n+2}{3}\right] + \left[\dfrac{n+2}{9}\right] + ... + \left[\dfrac{n+2}{3^{\alpha+1}}\right] + ..$ ce qui est précisément égal à l'exposant de 3 dans $(n-2)!$ et donc au moins égal à l'exposant de 3 dans $n!$.

Reste à étudier : $p = 2$. a étant impair, car non multiple de p, $a^2 + 1 = u_3 \equiv 2$ (mod.8), donc $u_4 \equiv 3a$ (mod.8), $u_5 \equiv 5$ (mod.8) et u_6 est divisible par 8. Qui plus est, $u_{12} = u_6(u_7 + u_5)$ est divisible par 16, car u_5 et u_7 sont tous deux impairs ($\equiv 5$ (mod.8)). Donc l'exposant de 2 vaut au moins $\left[\frac{m}{3}\right] + 2\left[\frac{m}{6}\right] + \left[\frac{m}{12}\right] > \left(\frac{m}{3} + \frac{m}{3} + \frac{m}{12}\right) - 4 = n - 2$. Comme il est strictement supérieur à $n - 2$ (donc au moins égal à $n - 1$), il est au moins égal à l'exposant de 2 dans $n!$, qui est strictement inférieur à n, donc au plus égal à $n - 1$. Ce qui achève la démonstration.

REMARQUES.

1- Notons que ce résultat ne peut pas être amélioré dans le cas général : le coefficient 4/3 est imposé du fait que c'est u_4 et non u_3 qui est divisible par 3. Par ailleurs, $u_1.u_2 \dots u_{23}$ n'est généralement pas divisible par 16! Toutefois, le résultat pourrait être amélioré dans des cas particuliers, par exemple si $a = 6$.

2- Les propriétés utilisées résultent de propriétés classiques et plus générales de ces suites de type Fibonacci, mais elles sont suffisantes pour notre problème, ce qui permet de se limiter à des démonstrations élémentaires. On aurait pu prouver, par exemple, que si PGCD$(n, m) = d$, PGCD$(u_n, u_m) = u_d$. Ou encore que si q est le plus petit indice tel que u_q soit divisible par p, pour tout $n = qkp^\alpha$, u_q est divisible par $p^{\alpha+1}$. En étudiant plus précisément la suite u_n et son équation caractéristique $r^2 - ar - 1 = 0$, on prouve que

- si $a^2 + 4 \equiv 0$ (mod.p), u_p est divisible par p,
- si $a^2 + 4$ est résidu quadratique, u_{p-1} est divisible par p,
- si $a^2 + 4$ n'est pas résidu quadratique, u_{p+1} est divisible par p, mais cela ne fournit pas le plus petit q tel que u_q soit divisible par p : cf. le cas $p = 5$, ou encore, dans le cas de la suite de Fibonacci, $u_{11} = 89$, donc, pour $p = 89$, $q = 11$, alors le résultat ci-dessus prouve seulement que q divise $p - 1 = 88$.

Autres solutions : Edgard DELPLANCHE, René.MANZONI.

Solution partielle :
Marguerite PONCHAUX.
et une solution fausse.

SOLUTION TARDIVE

Enoncé n°201 : Jacques AMON (Limoges).