Bulletin de l'APMEP n°390 - Sept/Oct 1993 - Fev/mars 1994

Motus !

Pascal DUPONT
Faculté des Sciences de Gembloux
UER de Mathématiques

Ossabandus, nequeis, nequer
potarium, quipsa milus.
MOLIERE,
Le médecin malgré lui, II, 4

Les mathématiques ne se réduisent pas au symbolisme, qui n'en est que la livrée ; elles ont leur beauté et leur difficulté propre ; cependant, celui-ci peut amplifier l'un comme l'autre. Le choix de la notation utilisée revêt donc une importance considérable : ici, la symétrie des caractères sera le reflet de celle du problème ; là, des signes mal choisis voileront l'harmonie des concepts ou ajouteront à l'âpreté intrinsèque.

L'un des écueils proprement syntaxiques que l'on rencontre tôt ou tard en étudiant des mathématiques est la notion de *variable muette*, ou de *variable liée*, comme disent les logiciens. Il n'est pas étonnant que nombre de nos élèves ne franchissent jamais cet obstacle. Mais la complication, réelle, du phénomène ne sera pas leur seule circonstance atténuante, ainsi que nous le montrerons plus loin. Et cependant, compliqué, le phénomène l'est ; ou plutôt, il est surprenant. Qu'un signe graphique, par la seule manière dont on le combine avec d'autres, perde toute signification, voilà une situation probablement unique parmi tous les langages écrits.

Des exemples

Dans le premiers des six assemblages ci-dessous, la variable i est muette ; dans chacun des cinq suivants, c'est la variable x ; ceci pour suivre l'usage plus courant dans ce genre de situation : nous le verrons plus loin, le nom de la variable muette est indifférent.

1. $\sum_{i=1}^{n} i^2$

2. $\int_a^b f(x)\,dx$;

3. $\min_{x \in [a;b]} f(x)$;

4. $\lim_{x \to a} f(x)$;

5. $\{x \in X \mid \Phi(x)\}$;

6. $(\forall x \in X)\Phi(x)$.

Les autres variables (dans le premier exemple, n ; dans les deux suivants, a, b et f ; dans le quatrième, a et f ; dans les deux derniers, X et les éventuelles variables de Φ autres que x), chaque fois, sont significatives, ou *libres*.

«Muette» : pourquoi ?

Quel critère nous permet d'affirmer que telle variable est muette ? Que l'assemblage en cause peut être remplacé par un autre, une de ses évaluations, dans lequel la variable muette n'apparaît pas. Ainsi,

1. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, si $F' = f$ sur $[a;b]$;

3. $\min_{x \in [a;b]} f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, par exemple, si f, continue, est décroissante sur la première moitié de l'intervalle $[a;b]$ et croissante sur la seconde ;

4. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, par exemple, si f est continue en a ;

5. $\{x \in X \mid \Phi(x)\} = \emptyset$, par exemple, si aucun élément de X ne satisfait la condition $\Phi(x)$;

6. $(\forall x \in X)\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(x_1) \wedge \Phi(x_2) \wedge \Phi(x_3)$, par exemple si $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.

De ce critère de mutisme, il ressort qu'une variable muette peut être remplacée par n'importe quelle autre, à l'exception notable toutefois de celles qui apparaissent déjà dans le même contexte. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\xi)d\xi = \dots$$

comme nous ne manquons pas de le faire remarquer à nos élèves, mais on ne peut écrire $\int_a^b f(b)db$, car la variable b, qui intervient trois fois, jouerait deux rôles différents. (En réalité, aucun principe ne s'y oppose. Les logiciens admettent qu'une même variable ait des occurences libres à côté d'occurences liées. Mais on peut toujours l'éviter, et cela vaut beaucoup mieux.)

Observons encore sur chacun de nos exemples, que la variable que l'assemblage mutificateur fait disparaître dans les limbes figure deux fois, comme si la seconde occurence venait annihiler la première. Ne disons-nous d'ailleurs pas (nous, mathématiciens ; bon nombre de "praticiens" présentent les choses différemment !) que, dans $\int_a^b f(x)dx$, le rôle du dx est de rappeler que x est la variable d'intégration [1].

Évidemment, les habitudes de notation pourraient être différentes, ne pas exiger cette duplication de la variable muette. L'expérience montre cependant que l'on perd alors en clarté ; un exemple sera donné plus loin.

Une analogie peut aider nos élèves à surmonter la difficulté : celle de la *boîte noire*. Pensons à un appareil électrique, un redresseur de courant alternatif, par exemple : c'est un boîtier, muni d'une prise d'entrée, à laquelle on fournit un courant alternatif, et d'une prise de sortie, qui débite en retour du courant continu. Entre les deux, cachés par l'enveloppe, se trouvent vraisemblablement d'autres connexions, des composants, comme par exemple des diodes, que sais-je ? Je ne puis que l'imaginer, et surtout, ce n'est pas mon problème, *c'est de la cuisine interne*. De la même manière, lorsque je travaille avec l'assemblage $\sum_{i=1}^{n} i^2$, il y a la prise d'entrée : la variable libre n, et la prise de sortie : la valeur de la somme ; lorsque je branche la prise d'entrée sur la valeur 3, j'obtiens à la sortie la valeur 14. Entre les deux ? Je n'en sais rien, et cela ne m'importe pas ; la variable i, *c'est de la cuisine interne*. Lorsque je regarde la boîte noire $\sum_{i=1}^{n} i^2$ sans la démonter, la variable muette

1- Une écriture tout aussi cohérente serait $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$.

i, je ne la vois pas, elle m'est cachée par l'assemblage.

Le parallèle est encore possible avec la programmation des ordinateurs. Si un programme a besoin de la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{n} i^2$, le programmeur en déléguera utilement le calcul à un sous-programme, qui recevra le paramètre n et fournira en retour la valeur de la somme. Entretemps, de manière interne, il aura utilisé i comme variable *locale* ; mais celle-ci ne sera jamais accessible au programme principal.

D'autres choix

Puisque les variables muettes n'ont pas de contenu sémantique et que, par là même, elles introduisent des difficultés, au moins pédagogiques, pourquoi les utiliser ? Ne peut-on remplacer les assemblages qui les contiennent par d'autres écritures d'où elles seraient absentes ? Dans bon nombre de cas, c'est possible ; certains assemblages mutifiicateurs ont des synonymes sans variables liées :

1. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2$:
2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$;
3. $\min_{x \in [a;b]} f(x) = \min_{[a;b]} f = \min f\ ([a\,;\,b])$
4. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_a f$.

Tout ceci appelle des commentaires.

Le synonyme proposé en 1 est en fait un retour en arrière : historiquement, le symbole de sommation a été introduit comme substitut compact à la somme de droite, qui n'est guère pratique : l'écriture est longue, les points de suspension donnent une impression de flou ; et parfois, les débutants se demandent si, dans cette écriture, il est licite de donner à n les valeurs 2 ou 1.

Dans la dernière des expressions sous 3, on prend le minimum d'un ensemble de réels, ce qui a bien un sens (mais peut ne pas exister, naturellement) ; par contre, il y a un abus d'écriture de peu de gravité, à désigner par la même lettre la fonction f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et la fonction f: $\mathcal{P}\mathbf{R} \to \mathcal{P}\mathbf{R}$ qui s'en déduit si l'on pose $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ pour tout ensemble X de nombres réels ; ceci est standard et ne risque pas d'entraîner de confusion. (En fait, cette seconde fonction est l'image de la première par le foncteur "parties" covariant et devrait être notée $\mathcal{P}f$.)

Les synonymes 2 [2], 3 et 4 ont un défaut commun : s'ils sont parfaits pour décrire la théorie, ils s'essoufflent dès qu'on passe à la pratique, car peu de fonctions ont un nom propre : seules quelques fonctions transcendantes bénéficient de ce privilège. Ainsi, il est possible d'écrire $\int_0^{\pi/2} \sin$ ou $\int_0^{\ln 2} \exp$, mais comment se débarrasser de la variable muette dans $\int_0^3 (x^2+2)dx$? La fonction polynomiale

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2 + 2$$

n'a pas le privilège de porter un nom. Une solution existe, mais elle est fort lourde : puisque la fonction $x \mapsto x$ est l'identité $I_{\mathbf{R}}$, notre amie ci-dessus est $(I_{\mathbf{R}})^2 + 2$, ou plus précisément $(I_{\mathbf{R}})^2 + k_2$, si l'on refuse de confondre un réel et une fonction constante. Bex et Breny vont assez loin dans ce sens, utilisant $\mathbf{1}^2 + 2.\mathbf{1}^0$ pour désigner notre fonction polynomiale (cf.[2], p.ex. p. 192). Une autre solution : utiliser les notation du λ-calcul ; pour les spécialistes de cette branche de la logique (aujourd'hui fort appréciée des informaticiens théoriciens, soit dit en passant), la fonction en question est désignée par $\lambda x.(x^2 + 2)$, qu'on comprendra comme "la fonction appliquant x sur $x^2 + 2$" ; on voit qu'en principe, cela revient à dire : la fonction $x \mapsto x^2 + 2$, et donc cela réintroduit, à un autre endroit, une variable muette. Dernière possibilité, laisser un blanc à la place de la variable : $\ ^2 + 2$; malheureusement, un tel blanc risque fort de passer inaperçu à la lecture, et il vaut mieux utiliser l'un ou l'autre stratagème pour marquer la "place" (la "mortaise" disent les anglophones) : $(\ )^2 + 2$, $(.)^2 + 2$, $(-)^2 + 2$, $\#^2 + 2$; la dernière notation, avec un dièze pour indiquer la place, est empruntée à certains langages de programmation ; elle a ceci d'attrayant qu'on peut l'utiliser, avec des dièzes indicés, pour représenter des fonctions de plusieurs variables. Félix et Lavendhomme ont récemment proposé une autre solution, assez élégante (cf.[3]) au lieu des dièzes (éventuellement indicés), ils utilisent des lettres soulignées d'un tilde ; ceci a l'avantage d'être plus parlant, puisqu'on se ménage la possibilité de "marquer la place" par un symbole qui rappelle la variable qu'on aurait utilisée à cet endroit. On pourra ainsi parler de la fonction $\underset{\sim}{x}^2 + 2$.

Quoi qu'il en soit, si je suis prêt, pour moi-même, à écrire

2- Mawhin utilise par exemple $\int_{\bullet}^{\cdot} f$; cf.[4] p.373

$$\int_0^3 (\#^2 + 2)$$

je ne me vois pas faire de même devant des élèves et je pense que les variables muettes ont encore de beaux jours devant elles, même si nous pouvons les faire reculer sur quelques fronts. Que ceci ne soit pas une excuse, cependant, pour absoudre la confusion entre une fonction et son image en un point, même si cela est aussi "générique que x est censé l'être (3).

Les notations utilisant des variables muettes constituent un phénomène intrinsèquement compliqué. Il n'est cependant possible de les éliminer toutes qu'au prix de lourdeurs pires. En tout état de cause, donc, nos élèves devront apprendre à les apprivoiser. Faisons-nous tout pour le leur faciliter ? A cette question, je réponds sans hésiter : non, pour la simple raison qu'un certain nombre d'entre nous n'y voient pas clair eux-mêmes.

---

(3) Cette confusion, malheureusement, est omniprésente. Ainsi, l'opérateur de dérivation, souvent noté par un accent, transforme une *fonction* en une autre. On devrait donc écrire $\sin' x$ et non $(\sin x)'$; mais comment corriger $(x^2 + 2)'$? Les puristes écriront $(t \mapsto t^2 + 2)'(x)$ ou $(\#^2 + 2)'(x)$; je ne jetterai pas la première pierre aux autres, s'ils sont conscients de l'abus qu'ils commettent.

A l'opposé, si l'on peut admettre $\dfrac{df(x)}{dx}$ comme synonyme de $f'(x)$ à condition de n'y voir aucun quotient, $\dfrac{df}{dx}$ n'a pas de sens ; de la même manière, les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pour les dérivées partielles d'une fonction de deux variables sont malencontreuses. Pour ma part, j'utilise, depuis peu, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ (mais $D_1 f$ et $D_2 f$ conviennent tout aussi bien ; f'_1 et f'_2 risquent d'entrer en conflit avec les dérivées des composantes d'une fonction vectorielle d'une variable réelle ; c'est pire encore avec f_1 et f_2, qu'on rencontre quelquefois, et dans lesquelles rien n'attire l'attention sur la dérivation ; $\partial_x f$, $\partial y f$ ou $D_x f$, $D_y f$ ne résolvent rien).

Pour être honnête, il faut cependant observer que les mathématiciens professionnels publiant dans des revues de qualité, s'autorisent des abus ; en voici deux exemples, recueillis en quelques minutes seulement :

- $\dot{x} = \dfrac{\partial}{\partial x} U(t,x)$ ([1], p.102)

- $a(x) = (a_1(x), \dots a_n(x)) \in C^2(R^n, R^n)$, ([5], p. 87)

Les notations utilisant des variables muettes constituent un phénomène intrinsèquement compliqué. Il n'est cependant possible de les éliminer toutes qu'au prix de lourdeurs pires. En tout étant de cause, donc, nos élèves devront apprendre à les apprivoiser. Faisons-nous tout pour le leur faciliter ? A cette question, je réponds sans hésiter : non, pour la simple raison qu'un certain nombre d'entre nous n'y voient pas clair eux-mêmes.

Des exemples à ne pas suivre :

Voici quelques "perles" rencontrées au hasard de lectures.

- $\lim_{l} f(x) = s$
- On utilise aussi l'expression "limite de la fonction f - ou de $f(x)$ - quand x tend vers a" et l'on note indifféremment $\lim_{a} f$, $\lim_{a} f(x)$, $\lim_{x \to a} f$.

  Le mauvais usage réside ici tant dans le langage que dans le symbolisme mathématique.
- $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(x)]_a^b$.

  Il s'agit d'un cas de mutificateur qui n'a pas été évoqué plus haut. Les manières cohérentes (vis-à-vis de la règle de duplication de la variable muette) de noter les choses ne seraient-elles pas : $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ ou $[F]_a^b$? et cependant, on ne les rencontre nulle part ! Elles seraient cependant bien utiles pour s'y retrouver lorsque, calculant une intégrale double au moyen de théorème de Fubini, on est amené à une expression de la forme

$$\int_a^b [f(x,y)]_{\varphi(x)}^{\Psi(x)} dx \ ;$$

  même si le contexte permet, en définitive, de trancher, n'est-il pas plus clair de noter

$$\int_a^b [f(x,y)]_{y=\varphi(x)}^{y=\Psi(x)} dx \ ?$$

- La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge ...
- REMARQUE : Lorsque l'ensemble parcouru par l'indice i est connu, on remplace souvent, pour simplifier les écritures $\sum_{i=1}^{p}$ par $\sum$.

Les séries posent un autre problème. On utilise souvent la même notation

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ pour désigner une série et sa somme ; la première étant définie comme la suite de ses sommes partielles, cette confusion revient exactement à amalgamer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et sa limite $\lim_{n \to +\infty} a_n$. Je proposerais, avec Mawhin (cf.[4], p.249) et d'autres, de noter $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ la série $\left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right)_{n \in}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme $\lim_{x \to +\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_p$.

Pour conclure

Nous, mathématiciens-enseignants, enseignants-mathématiciens, tenons beaucoup à ce que nos élèves raisonnent correctement et tout autant (au moins) à ce qu'ils rédigent correctement leur argumentation. (On pourrait paraphraser Boileau !) Combien de fois ne rageons-nous pas de voir sur une copie une multitude de "$\Rightarrow$" ou de "donc" qui sont autant de non-sens, sinon de contre sens. (Combien de fois, aussi, ne passons-nous pas tout simplement l'éponge sur ces problèmes, malheureusement !) Dans le même esprit, devons-nous, je pense, insister pour que les jeunes que nous voulons former fassent bon usage des variables que nous leur confions. Et pour cela, commençons par leur montrer le bon exemple.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Nicolas Rouche pour avoir bien voulu lire une version préliminaire de ce texte, qui a pu bénéficier de plusieurs remarques constructives.

Bibliographie

[1] Maria Letizia BERTOTTI, *Forced Oscillations of singular Dynamical Systems with an Application to the Restricted Three Body Problem*, J. Differential Equations **93** (1991), 102-141

[2] Roger BEX, H.BRENY, *Leçons de mathématique V, Fascicule 3 : Analyse*, Duculot, Gembloux, 1974

[3] Yves FÉLIX, René LAVENDHOMME, *On De Rham's Theorem in Synthetic Differential Geometry*, J.Pure and Applied Algebra **69** (1990), 21-31

[4] Jean MAWHIN, *Analyse- Fondements, techniques . Evolution*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1992

[5] A.MOHAMED, J.NOURRIGAT, *Encadrement du N(λ) pour un opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique et un potentiel électrique*, J.Math.Pures et Appliquées **70** (1991), 87-99