

## Etudes

# Présentation des courbes de Bézier

Y. HAUBRY  
L.E.G.T. Troyes

Vers 1962, Pierre Bézier, ingénieur chez Renault, mit au point une méthode pour obtenir des courbes planes ou dans l'espace, ainsi que des surfaces. La présentation donnée dans cet article est basée sur le calcul barycentrique. Elle peut donc être utilisée dans les classes du second cycle de Lycée en travaux pratiques ou dirigés, comme application du barycentre.

L'idée directrice est de tracer une courbe en déplaçant le barycentre d'un certain nombre de points, appelés points de contrôle et affectés de coefficients dépendant d'une variable. En modifiant ensuite la position des points de contrôle, on déforme progressivement la courbe jusqu'à l'obtention du profil recherché.

Seul l'aspect "courbe plane" sera traité ici.

Dans toute cette présentation, le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormal et  $t$  est un temps réel variant de 0 à 1.

### 1°) Exemple introductif avec trois points de contrôle.

Fixons trois points  $M_0, M_1, M_2$  non alignés.

$A_1$  est le barycentre de  $M_0(1-t)$  et  $M_1(t)$ ;

$A_2$  est le barycentre de  $M_1(1-t)$  et  $M_2(t)$ ;

$M$  est le barycentre de  $A_1(1-t)$  et  $A_2(t)$ .

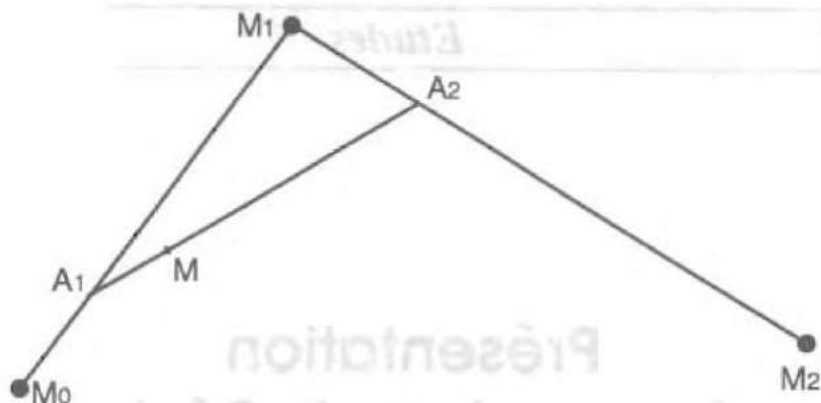


figure 1 ( $t = 1/4$ )

a) Détermination vectorielle ou calcul barycentrique.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \vec{OA}_1 = (1-t)\vec{OM}_0 + t\vec{OM}_1 \\ \vec{OA}_2 = (1-t)\vec{OM}_1 + t\vec{OM}_2 \\ \vec{OM} = (1-t)\vec{OA}_1 + t\vec{OA}_2 \end{cases} \quad (1)$$

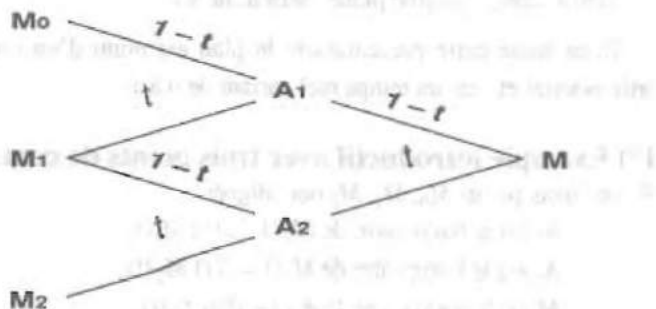
et

En remplaçant  $\vec{OA}_1$  et  $\vec{OA}_2$ , il vient :

$$\boxed{\vec{OM}(t) = (1-t)^2\vec{OM}_0 + 2t(1-t)\vec{OM}_1 + t^2\vec{OM}_2} \quad (2)$$

Le point  $M$  est le barycentre du système

$(M_0(1-t)^2; M_1 2t(1-t); M_2 t^2)$  ce qu'on aurait symbolisé par l'arbre :



où l'on retrouve que  $M$  est barycentre de

$$((M_0, (1-t)^2); (M_1, 2t(1-t)); (M_2, t^2))$$

On remarque que les coefficients des points  $M_i$  sont de la forme :

$$C_2^i (1-t)^{2-i} t^i \text{ pour } i \in \{0, 1, 2\}$$

où  $C_2^i = \frac{2!}{i!(2-i)!}$  coefficient binomial.

On pose  $B_2^i(t) = C_2^i (1-t)^{2-i} t^i$  ; ces termes, on le verra, joueront un rôle particulier par la suite.

### b) Détermination paramétrique.

Les points  $M_0, M_1$  et  $M_2$  sont définis dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  par leurs coordonnées :

$$M_0(x_0, y_0); M_1(x_1, y_1); M_2(x_2, y_2).$$

Le point  $M$  a pour coordonnées  $(x, y)$ .

La relation (2) nous donne alors :

$$\begin{cases} x = (1-t)^2 x_0 + 2t(1-t)x_1 + t^2 x_2 \\ y = (1-t)^2 y_0 + 2t(1-t)y_1 + t^2 y_2 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une définition paramétrique de la courbe décrite par  $M$  lorsque  $t$  varie de 0 à 1.

Cette courbe est dite *courbe de Bézier de degré 2*.

### c) Propriétés de la courbe.

Pour  $t = 0$ , la relation (2) donne  $\vec{OM}(0) = \vec{OM}_0$ . Le point  $M$  est en  $M_0$ .

Pour  $t = 1$ , nous obtenons  $\vec{OM}(1) = \vec{OM}_2$ . Le point  $M$  est en  $M_2$ .

*Tangente à la courbe.*

Calculons la dérivée du vecteur  $\vec{OM}(t)$  :

$$V(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = -2(1-t)\vec{OM}_0 + 2(1-2t)\vec{OM}_1 + 2t\vec{OM}_2$$

$$\text{Pour } t = 0 \quad \vec{V}(0) = -2\vec{OM}_0 + 2\vec{OM}_1 = 2\vec{M_0M_1}$$

$$\text{Pour } t = 1 \quad \vec{V}(1) = -2\vec{OM}_1 + 2\vec{OM}_2 = 2\vec{M_1M_2}$$

Lorsque  $t$  varie de 0 à 1, la courbe part du point  $M_0$ , avec  $\overrightarrow{M_0M_1}$  pour vecteur tangent et aboutit en  $M_2$ , avec  $\overrightarrow{M_1M_2}$  pour vecteur tangent.

Pour obtenir la tangente en un point courant de la courbe, dérivons la relation :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_2}.$$

Il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + (1-t)\frac{d\overrightarrow{OA_1}}{dt} + t\frac{d\overrightarrow{OA_2}}{dt}$$

et, en dérivant les égalités (1) :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{OA_1}}{dt} = -\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{OM_1} \\ \frac{d\overrightarrow{OA_2}}{dt} = -\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} \end{cases}$$

(Les vecteurs  $\overrightarrow{OM_0}$ ,  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$  étant fixes, leurs dérivées sont nulles).

En reportant dans  $\overrightarrow{V}$ , il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{A_1A_2} + (1-t)(-\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{OM_1}) + t(-\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2})$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{A_1A_2} - [(1-t)\overrightarrow{OM_0} + t\overrightarrow{OM_1}] + [(1-t)\overrightarrow{OM_1} + t\overrightarrow{OM_2}]$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$$

En M, la courbe admet donc  $\overrightarrow{A_1A_2}$  pour vecteur tangent.

La courbe se construit point par point : pour chaque valeur de  $t$ , on partage  $[M_0M_1]$  et  $[M_1M_2]$  dans les rapports  $t$ ,  $1-t$ , puis le segment  $[A_1A_2]$  dans les mêmes rapports. La courbe s'obtient comme une enveloppe de droites. (figure 2, page suivante).

#### d) Nature de la courbe.

On démontre que la courbe obtenue est un *arc de parabole*.

Plaçons l'origine du repère en  $M_0$  :

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM}(t) = 2t(1-t)\overrightarrow{OM_1} + t^2\overrightarrow{OM_2}$$

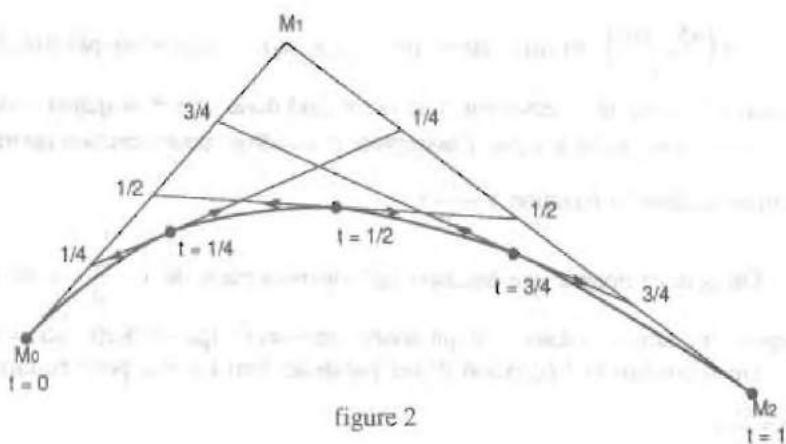


figure 2

et sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t(1-t)x_1 + t^2x_2 \\ y = 2t(1-t)y_1 + t^2y_2 \end{cases}$$

Ces équations sont de la forme :

$$\begin{cases} x = at^2 + bt \\ y = \alpha t^2 + \beta t \end{cases}$$

avec  $a = x_2 - 2x_1$  ;  $b = 2x_1$  ;  $\alpha = y_2 - 2y_1$  et  $\beta = 2y_1$ .

$a$  et  $\alpha$  ne peuvent pas être nuls simultanément (on aurait  $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$  et les points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  seraient alors alignés).

\* Si  $a = 0$  ou  $\alpha = 0$ , on obtient alors :  $y = \frac{\alpha}{b^2} x^2 + \frac{\beta}{b} x$  ou  $x = \frac{a}{\beta^2} y^2 + \frac{b}{\beta} y$ .

La courbe est alors une parabole, d'axe  $Oy$  ou d'axe  $Ox$ .

\* Si  $a$  et  $\alpha$  ne sont pas nuls :

le rapport  $\frac{y}{x} = \frac{\alpha t + \beta}{at + b}$  a pour limite  $\frac{\alpha}{a}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ , ce qui donne la direction asymptotique de la courbe.

Calculons  $p = y - \frac{\alpha}{a}x$  :

$p = \left(\frac{a\beta - \alpha b}{a}\right)t$  et  $a\beta - \alpha b = x_2y_1 - x_1y_2 \cdot x_2y_1 - x_1y_2$  n'est pas nul, les points  $O, M_1$  et  $M_2$  n'étant pas alignés;  $p$  tend donc vers  $\pm \infty$  quand  $t$  tend vers  $\pm \infty$ . La courbe n'a pas d'asymptote mais admet pour direction asymptotique la droite d'équation  $y = \frac{\alpha}{a}x$ .

On peut en obtenir une équation cartésienne à partir de  $y - \frac{\alpha}{a}x = mt$  en reportant  $t$  dans  $x$  ou dans  $y$ , ce qui donne:  $(\alpha x - ay)^2 - (\beta x - by)(a\beta - b\alpha) = 0$ .

On reconnaît là l'équation d'une parabole dont l'axe a pour équation  $y = \frac{\alpha}{a}x$ .

## 2- Généralisation à un nombre quelconque de points.

Soient  $n + 1$  points de contrôle, non tous alignés:  $M_0^0, M_1^0, M_2^0, \dots, M_i^0, \dots, M_n^0$ .

### a) Construction de la courbe.

Chaque couple de points  $(M_{i-1}^0, M_i^0)$  donne le barycentre  $M_i^1$  tel que  $\overrightarrow{OM_i^1} = (1-t)\overrightarrow{OM_{i-1}^0} + t\overrightarrow{OM_i^0}$ , puis le procédé est itéré:  $\overrightarrow{OM_i^k} = (1-t)\overrightarrow{OM_{i-1}^{k-1}} + t\overrightarrow{OM_n^{n-1}}$  jusqu'à l'obtention du point terminal  $M_n^n$  défini par:  $\overrightarrow{OM_n^n} = (1-t)\overrightarrow{OM_{n-1}^{n-1}} + t\overrightarrow{OM_n^{n-1}}$ . Cette construction se présente sous la forme de l'arbre dessiné page suivante.

*Ndlr* (due à Paul-Louis HENNEQUIN).

Les courbes de Bézier généralisent les polynômes de BERNSTEIN.

On rappelle pour mémoire que le polynôme de Bernstein associé à une fonction  $f$  continue sur  $[0,1]$  est défini par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ainsi, la courbe représentative de  $P_n$  est la courbe de Bézier associée aux points de

coordonnées  $\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right) 0 \leq k \leq n$ .

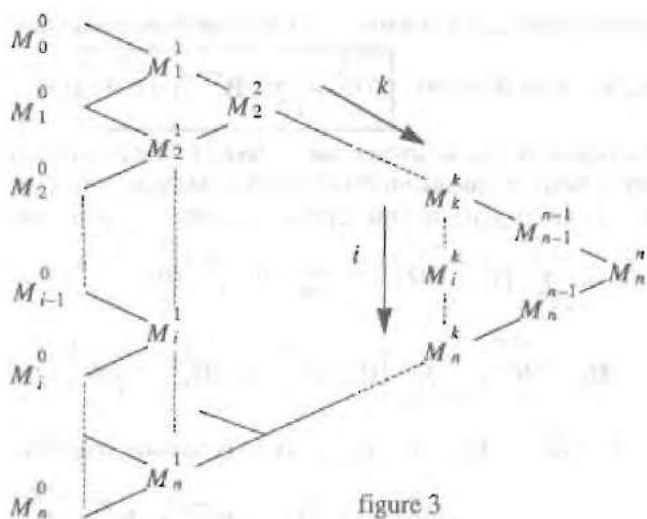


figure 3

Suite de la note de Paul-Louis HENNEQUIN

C'est d'ailleurs pour cette raison que Bernstein a introduit ces polynômes : il voulait donner une démonstration probabiliste constructive du théorème de WEIERSTRASS: «Si  $x$  est la probabilité de succès dans un schéma de BERNOULLI à  $n$  coups,

$P_n(x) = E \left\{ f \left( \frac{S_n}{n} \right) \right\}$  où  $S_n$  est le nombre de succès». En effet,

$$E \left\{ f \left( \frac{S_n}{n} \right) \right\} = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) f \left( \frac{k}{n} \right) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f \left( \frac{k}{n} \right) = P_n(x).$$

On déduit ensuite facilement de la loi forte des grands nombres et du théorème de HEINE-BOREL que  $f$  est limite uniforme sur  $[0,1]$  des  $P_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , ce qu'on aurait pu faire de manière plus élémentaire et plus directe par l'inégalité de Cebicev.

Les polynômes de Bernstein sont en général - et je l'ai par exemple vu récemment à l'oral de l'agrégation marocaine - connus des candidats, mais pas l'idée qui les a introduits.

En posant :  $B_i^k(t) = C_n^k (1-t)^{i-k} t^k$ , on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM}_i^p = \sum_{k=i-p+q}^i B_{p-q}^{k-i+p-q}(t) \overrightarrow{OM}_k^q \quad (6) \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont des entiers fixés, } q < p.$$

Cette formule permet de calculer le vecteur de rang  $i$  dans la colonne  $p$  à

partir des vecteurs de la colonne  $q$ . Et en remontant jusqu'aux points de

contrôle,  $M_i^0$ , nous obtenons : 
$$\overrightarrow{OM_i^p} = \sum_{k=i-p}^i B_p^{k-i+p}(t) \overrightarrow{OM_k^0} \quad (3).$$

(3) se démontre par récurrence sur  $p$ . Tout en laissant au lecteur le soin de mener à bien les calculs en détail, voici l'idée qui permet de passer du rang  $(p - 1)$  au rang  $p$  : si l'on suppose (3) vraie jusqu'au rang  $(p - 1)$ ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_i^p} &= (1-t) \sum_{k=i-p}^{i-1} B_{p-1}^{k-i+p} \overrightarrow{OM_k^0} + t \sum_{k=i-p+1}^i B_{p-1}^{k-i+p-1} \overrightarrow{OM_k^0} \\ &= (1-t) B_{p-1}^0 \overrightarrow{OM_{i-p}^0} + \sum_{k=i-p+1}^{i-1} \left[ (1-t) B_{p-1}^{k-i+p} + t B_{p-1}^{k-i+p-1} \right] \overrightarrow{OM_k^0} + t B_{p-1}^0 \overrightarrow{OM_i^0}. \end{aligned}$$

Or,  $(1-t)B_{p-1}^0 = B_p^0$ , et  $tB_{p-1}^0 = B_p^p$ , la somme intermédiaire étant composée de termes de la forme :  $\vec{u} = \left[ (1-t)B_q^{m+1} + tB_q^m \right] \overrightarrow{OM_k^0}$

$$\alpha$$

et  $\alpha = (C_q^m + C_q^{m+1})(1-t)^{q-m} t^{m+1}$

$$= C_{q+1}^{m+1} (1-t)^{q-m} t^{m+1} \quad \text{d'où} \quad \alpha = B_{q+1}^{m+1}.$$

Ainsi,  $\vec{u} = B_p^{k-i+p} \overrightarrow{OM_k^0}$ , et donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_i^p} &= B_p^0 \overrightarrow{OM_{i-p}^0} + \sum_{k=i-p+1}^{i-1} B_p^{k-i+p} \overrightarrow{OM_k^0} + B_p^p \overrightarrow{OM_i^0} \\ &= \sum_{k=i-p}^i B_p^{k-i+p} \overrightarrow{OM_k^0}. \end{aligned} \quad (3) \text{ est donc vraie au rang } p.$$

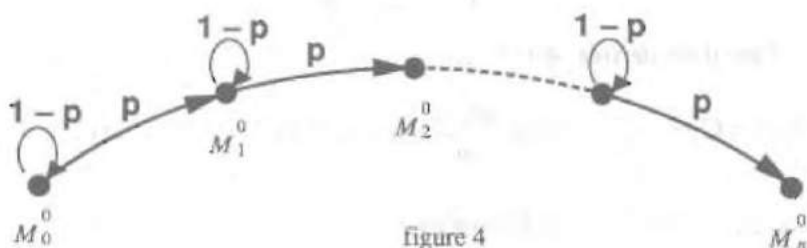
La formule (3) montre que chaque barycentre, à partir du rang 2, décrit une courbe de Bézier de degré 2, puis 3, ... puis  $n$  en prenant les points de contrôle 3 par 3, puis 4 par 4, etc.

*Une précision apportée par Paul-Louis HENNEQUIN :*

● Il est possible de donner une *définition probabiliste* très simple de la courbe de Bézier de points de contrôle  $M_0^0, M_1^0, \dots, M_n^0$ .



Considérons la marche au hasard suivante :



- On part de  $M_0^0$
- On passe de  $M_i^0$  à  $M_{i+1}^0$  avec la probabilité  $p$
- On reste en  $M_i^0$  avec la probabilité  $(1-p)$ .
- On effectue ainsi  $n$  pas.

Soit  $A$  le point (aléatoire) où la marche s'arrête,  $E_p(A)$  son espérance mathématique ou point moyen.  $E_p(A)$  dépend de  $p$ , et quand  $p$  varie de 0 à 1, il décrit la courbe de Bézier de points de base  $M_0^0, M_1^0, \dots, M_n^0$ .

La construction précédemment décrite s'obtient alors en conditionnant par le premier point. ●

La formule (3) se projette sur les axes du repère et donne la *définition paramétrique* de la courbe :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) x_i \\ y = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) y_i \end{cases} \quad \text{où } M_i^0(x_i, y_i) \text{ et } M_n^n(x, y)$$

Pour  $t = 0$ ,  $\overrightarrow{OM_1(0)} = \overrightarrow{OM_0^0}$  et pour  $t = 1$   $\overrightarrow{OM_1(1)} = \overrightarrow{OM_n^n}$ .

La courbe part du point  $M_0^0$  et se termine en  $M_n^n$ , quand  $t$  varie de 0 à 1.

#### b) Propriétés de tangence.

En dérivant (3), nous obtenons :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}_n}{dt} = \sum_{i=0}^n \frac{dB_n^i(t)}{dt} \overrightarrow{OM}_i^0$$

1- Calcul des dérivées des  $B_n^i$ .

$$B_n^i(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i \text{ d'où } \frac{dB_n^i(t)}{dt} = (i-nt) C_n^i (1-t)^{n-i-1} t^{i-1} \quad (4),$$

$$\text{soit encore : } \frac{dB_n^i(t)}{dt} = \frac{(i-nt)}{t(1-t)} B_n^i(t).$$

Remarque :

Les  $B_n^i$  sont donc des solutions de l'équation différentielle :

$$y' = \frac{(i-nt)}{t(1-t)} y \text{ équation à variables séparables.}$$

2- Tangentes à la courbe aux extrémités.

Pour  $t = 0$ ,  $\frac{dB_n^0(0)}{dt} = -n$  et  $\frac{dB_n^1(0)}{dt} = n$ . Les autres dérivées ayant  $t, t^2, \dots, t^{n-1}$  en facteur sont toutes nulles. Le vecteur tangent est alors :

$$\vec{V} = -n\overrightarrow{OM}_0 + n\overrightarrow{OM}_1 = n\overrightarrow{OM}_1.$$

Pour  $t = 1$ , seules les deux dernières dérivées ne contiennent pas le facteur  $(1-t)$ , d'où  $\frac{dB_n^{n-1}(1)}{dt} = -n$  et  $\frac{dB_n^n(1)}{dt} = n$ .

Le vecteur dérivé est alors :  $\vec{V} = -n\overrightarrow{OM}_{n-1} + n\overrightarrow{OM}_n = n\overrightarrow{M}_{n-1}M_n$ .

La courbe est tangente au premier et dernier segments du contour polygonal des points de contrôle.

3- Tangente au point courant.

Les résultats obtenus pour trois et quatre points permettent de conjecturer

$$\text{que } \frac{d\overrightarrow{OM}_n}{dt} = n\overrightarrow{M}_{n-1}M_n.$$

La courbe serait donc tangente au dernier segment formé par les avant-derniers barycentres.

*Démonstration :*

$$\overrightarrow{OM}_n = (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-1} + t\overrightarrow{OM}_n$$

$$\text{Dérivons : } \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}_n}{dt} = -\overrightarrow{OM}_{n-1} + \overrightarrow{OM}_n + (1-t)\frac{d\overrightarrow{OM}_{n-1}}{dt} + t\frac{d\overrightarrow{OM}_n}{dt}$$

$$\vec{V} = \overrightarrow{M_{n-1}M_n} + (1-t)\frac{d\overrightarrow{OM}_{n-1}}{dt} + t\frac{d\overrightarrow{OM}_n}{dt}$$

Or, la construction barycentrique nous donne :

$$\overrightarrow{OM}_{n-1} = (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-2} + t\overrightarrow{OM}_{n-1} \text{ et } \overrightarrow{OM}_n = (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-1} + t\overrightarrow{OM}_n.$$

En dérivant ces vecteurs et en reportant dans  $\vec{V}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \overrightarrow{M_{n-1}M_n} - \left[ (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-2} + t\overrightarrow{OM}_{n-1} \right] \\ &\quad + (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-1} + t\overrightarrow{OM}_n \\ &\quad + (1-t)^2\frac{d\overrightarrow{OM}_{n-2}}{dt} + 2t(1-t)\frac{d\overrightarrow{OM}_{n-1}}{dt} + t^2\frac{d\overrightarrow{OM}_n}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-2} + t\overrightarrow{OM}_{n-1} = \overrightarrow{OM}_{n-1} \text{ et } (1-t)\overrightarrow{OM}_{n-1} + t\overrightarrow{OM}_n = \overrightarrow{OM}_n.$$

$$\text{D'où } \vec{V} = 2\overrightarrow{M_{n-1}M_n} + \sum_{i=n-2}^n B_2^{-n+2+i}(t)\frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt}$$

En exprimant le vecteur  $\overrightarrow{OM}_i$  à l'aide du vecteur  $\overrightarrow{OM}_{i-1}$  et en dérivant, nous obtenons :

$$\vec{V} = 3\overrightarrow{M_{n-1}M_n} + \sum_{i=n-3}^n B_3^{-n+3+i}(t)\frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt}$$

L'idée est de poursuivre ce procédé jusqu'aux vecteurs  $\overrightarrow{OM}_i$  dont les déri-

vées sont nulles. A chaque étape du calcul, un nouveau vecteur  $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$  vient s'ajouter.

Finalement :

$$\vec{V} = n \cdot \overrightarrow{M_{n-1}M_n}$$

Toutes ces précisions vont bien sûr apporter une aide précieuse à la construction de la courbe. Celle-ci ne nécessite pas d'autres connaissances que de savoir diviser un segment dans un rapport  $t$  (ou  $1-t$ ).

- La courbe est soumise à l'influence de *tous* les points de contrôle, et la modification de la position d'un seul point entraîne une déformation de toute la courbe. On a vu comment on peut mesurer l'influence respective de chaque point.

- Si l'on veut renforcer l'influence d'un point particulier, on peut prendre plusieurs points de contrôle confondus, les coefficients  $B_n^i$  correspondants s'ajoutant alors (voir les figures 5 et 6).

- Un autre avantage des courbes de Bézier est que leur programmation est relativement facile, du fait des propriétés récursives des polynômes de Bernstein.

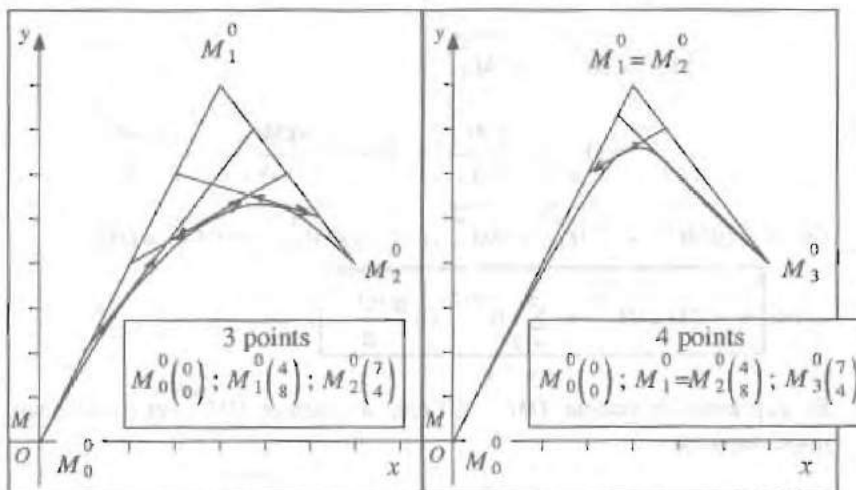


fig.5

fig.6

Dans la figure 6, deux points de contrôle sont confondus : la courbe se rapproche davantage du point  $M_1^0 = M_2^0$ .

#### 4°-Algorithme de construction d'une courbe de Bézier.

##### a) Relation entre les $B_n^i$ .

Considérons, pour  $n$  fixé,  $B_n^i(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i$

et  $B_n^{i-1}(t) = C_n^{i-1} (1-t)^{n-i+1} t^{i-1}$

or:  $C_n^i = \left( \frac{n-i+1}{i} \right) C_n^{i-1}$  (a)

et  $(1-t)^{n-i} t^i = \left( \frac{t}{1-t} \right) (1-t)^{n-i+1} t^{i-1}$  (b)

(a) et (b) donnent alors:  $B_n^i(t) = \left( \frac{t}{1-t} \right) \left( \frac{n-i+1}{i} \right) B_n^{i-1}(t)$  (8)

La relation (4) permet d'obtenir les  $B_n^i$  successifs, à partir de  $B_n^0$  pour chaque valeur de  $t$ :

$$B_n^1(t) = \left( \frac{t}{1-t} \right) \left( \frac{n-1+1}{1} \right) B_n^0(t) = \boxed{nt(1-t)^{n-1}}$$

$$B_n^2(t) = \left( \frac{t}{1-t} \right) \left( \frac{n-2+1}{2} \right) B_n^1(t) = \boxed{\frac{n(n-1)}{2} t^2 (1-t)^{n-2}}$$

etc....

##### b) Algorithme de calcul d'un $B_n^i$ .

De la relation (8), nous tirons l'algorithme:

```

Fonction B(n, i : entier ; t : réel) ;
Début
    Si i = 0 Alors B ← (1 - t)n
    Sinon B ← (t / (1 - t)) * ((n - i + 1) / i) * B(n, i - 1, t)
FIN
  
```

*Remarque :* certains langages de programmation, comme PASCAL, ne possèdent pas d'opérateur «puissance».  $(1-t)^n$  peut alors être calculé par  $\exp(n * \ln(1-t))$ . Les fonctions  $\exp$  et  $\ln$  étant disponibles ( $t \neq 1$ ).

Il est aussi possible de créer une fonction puissance:

```

Fonction PUISSANCE (n : entier , x : réel) ;
Début
  Si n = 0 Alors PUISSANCE ← 1
  Sinon PUISSANCE ← x * PUISSANCE (n - 1, x)
Fin.

```

**c) Algorithme de calcul d'un point de la courbe.**

PX et PY sont des tableaux contenant les coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  des points de contrôle.

X, Y sont les coordonnées d'un point de la courbe

BZ est une variable destinée au stockage temporaire des valeurs  $B_n^i$ .

**Calcul 1**

```

Début
  X ← 0 ; Y ← 0
  Pour i de 0 à n faire
    début
      BZ ← B(n, i, t)
      X ← X + BZ * PX(i) ;
      Y ← Y + BZ * PY(i) ;
    fin.

```

**d) Autre algorithme de calcul.**

Cet algorithme est construit sur la méthode de construction barycentrique :

$$\overrightarrow{OM_{i+1}^p} = (1-t)\overrightarrow{OM_i^{p-1}} + t\overrightarrow{OM_{i+1}^{p-1}}$$

- PX et PY sont les tableaux de coordonnées des points  $M_i^0$ , initialisés auparavant par entrée au clavier par exemple.

-  $t$  est le paramètre que l'on fera varier pas à pas selon le nombre de points désiré pour tracer la courbe.

-  $n$  est le degré de la courbe.

**Calcul 2:**

```

Début
  j ← 0 ;
  Pour i de j à n - 1 faire
    Début
      PX(i + 1) ← (1 - t) * PX(i) + t * PX(i + 1) ;
      PY(i + 1) ← (1 - t) * PY(i) + t * PY(i + 1) ;
      j ← j + i
    fin.

```

Les coordonnées du point à afficher sont alors dans  $PX(n)$  et  $PY(n)$ .

Cet algorithme modifie les  $PX(i)$  et  $PY(i)$ . Il faut donc les sauvegarder au préalable et pour chaque valeur de  $t$  réinitialiser les tableaux de coordonnées.

Le tracé de la courbe peut se faire point par point ou alors par petits segments joignant deux points consécutifs obtenus pour des valeurs de  $t$  voisines.

On peut prévoir également la possibilité de modifier un ou plusieurs points de contrôle afin d'ajuster la courbe au profil recherché.

#### e) Algorithme de tracé point par point.

Tracé BZPT ;

$PX, PY$  : tableaux de coordonnées des  $M_i^0$   
 $i, n, nb$  : variables type entier ;  
 $t, pas$  : variables type réel ;  $X, Y$  : réels  
 coord. du point courant.

Début

Entrer le degré  $n$  ;

Initialiser  $PX$ , et  $PY$  ;

Entrer le nombre de points désiré pour le tracé :  $nb$  ;

$pas \leftarrow 1/nb$  ;

$t \leftarrow pas$  ;

Afficher le point  $PX(0), PY(0)$  ;

Répéter

Calcul 1 ;

Afficher le point  $X, Y$  ;

$t \leftarrow t + pas$

jusqu'à  $t > 1$ .

fin.

#### Remarque :

On peut également faire apparaître le contour polygonal des points de contrôle, les langages graphiques possédant des procédures d'affichage de segments (draw ou line ...).

#### f) Algorithme de tracé par segments.

Les variables utilisées sont les suivantes :

$PX, PY$  tableaux des coordonnées des  $M_i^0$  ;

$i, n, nb$  variables de type entier ;

$X, Y, X_1, Y_1, t, pas$  : variables type réel ;

```

Tracé BZSEG ;
Début
  Entrer le degré n ;
  Entrer les PX(i) et PY(i) ;
  Entrer le nombre de points nb ;
  Pas ← 1/nb ;
  t ← pas ;
  Xi ← PX(0) ; Yi ← PY(0) ;
Répéter
  Calcul l ;
  Afficher le segment (Xi, Yi) - (X, Y) ;
  Xi ← X ; Yi ← Y ;
  t ← t + pas ;
jusqu'à t > 1
fin.
    
```

*Remarque :*

Pour la programmation en PASCAL, on peut utiliser les types suivants :

```

POINT = record
  X, Y : real
end ;
POLYGONE = array[0..50] of POINT ;
    
```

Si PL est une variable de type POLYGONE, les coordonnées du point  $M_i^0$  sont alors PL[i].X et PL[i].Y. Ceci évite la manipulation de deux tableaux PX et PY.

*Attention :* Le temps de calcul augmente avec le degré de la courbe : le calcul de  $B(n, i, t)$  nécessite  $n$  appels consécutifs de la procédure, et pour chaque valeur de  $t$ ,  $2(n + 1)$  multiplications et additions sont nécessaires pour calculer les coordonnées d'un point.

### Conclusion

J'ai essayé de présenter le modèle de Bézier sous le point de vue barycentrique. Il est évident que la généralisation à un nombre quelconque de points ne peut, faire l'objet d'une application au niveau première ou terminale, quoiqu'elle figure au programme des BTS Informatique Industrielle.

D'autres aspects ont été volontairement négligés :

- point de vue probabiliste (voir note),
- point de vue matriciel,
- point de vue suites numériques,



- point de vue nombres complexes.

Le modèle de Bézier est un modèle global : tous les points de contrôle ont une influence sur toute la courbe. Il n'en est pas de même dans d'autres modèles, les B-splines par exemple, où les points de contrôle n'ont qu'une influence locale. Ce pourrait être l'objet d'un autre exposé.

Je n'ai pas voulu développer l'obtention de surfaces en trois dimensions par un maillage de points de contrôle, pour limiter la longueur de cet article : le passage du plan à l'espace peut se concevoir en imaginant un plan, contenant les points de contrôle se déplaçant dans une direction orthogonale, le polygone se modifiant à chaque étape : les courbes de Bézier obtenues dans chaque plan engendrent alors une surface.

**\* Deux questions**

(qui nous viennent elles aussi de Paul-Louis HENNEQUIN) :

Etant donnée une courbe définie paramétriquement dans le plan par :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ et } \varphi, \psi \in C^\infty,$$

on peut lui associer la courbe de Bézier

$$\begin{cases} X = P_n(t) \\ Y = Q_n(t) \end{cases}$$

où  $P_n$  et  $Q_n$  sont les polynômes de meilleure approximation (pour une norme à préciser de  $X$  et  $Y$ ).

1°/ Comment construire pratiquement les points qui déterminent  $(P_n, Q_n)$  ?  
 2°/ Que se passe-t-il si l'on change le paramétrage ? ( $t = t(\Delta)$  où  $t$  est  $C^\infty$  et croissante telle que  $t(0) = 0$  et  $t(1) = 1$ ).

**BIBLIOGRAPHIE**

Pierre BEZIER, *Mathématiques et CAO : (volume 4). Courbes et surfaces* ; Ed.Hermès, 1988, 233 p.

F.LEGROS, C.PANNIER, J.-P.POUGET, *Courbes de Bézier et B-Splines*, Brochure n°47, groupe Inter-IREM Lycées techniques, Ed.IREM Paris Nord, 1990, 123 p.

J.MARION, *Introduction à quelques méthodes mathématiques de modélisation des courbes et surfaces*, Ed.IREM Aix-Marseille, 1987, 91 p.