Journées nationales - Strasbourg 1992

Les géométries non-euclidiennes
200 ans après la naissance de Lobatchevski

Jean Pierre Bourguignon
Centre de Mathématiques
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Ecole polytechnique
91128 PALAISEAU Cedex

La naissance et le développement des géométries non-euclidiennes est un exemple remarquable d'une aventure mathématique européenne. Ce sujet est donc bien adapté au thème des journées 1992 de l'A.P.M.E.P.*. Il l'est d'autant plus que nous fêtons cette année les 200 ans de la naissance de Nikolaï Lobatchevski, un des créateurs de ces géométries.

Plan de l'exposé

- *L'axiome des parallèles en géométrie euclidienne*
- *La découverte des nouvelles géométries*
- *Quelques modèles de la géométrie hyperbolique*
- *Développements et controverses autour des nouvelles géométries*
- *Rôle actuel de ces géométries*
- *Un aperçu sur deux résultats récents en géométrie hyperbolique*

Quelques thèmes récurrents

Un des objectifs poursuivis dans cet exposé est d'appeler l'attention sur un certain nombre de thèmes récurrents dans notre histoire :

- *l'influence d'autres sciences sur les mathématiques* (des questions issues de mesures physiques ou astronomiques ont joué un rôle important) ;
- *le rôle des idées mathématiques en philosophie*, avec son contrepoint *l'idée des philosophes sur les mathématiques* (un thème moins à la mode) ;
- *l'imprévisibilité des découvertes*, notamment les plus remarquables** ;
- *souvent, en mathématiques, la norme n'est pas la bonne façon de fonctionner* ; pour avancer, il se révèle quelquefois décisif de *disposer de plusieurs points de vue* ;
- *les mathématiques sont une aventure humaine* ; on y rencontre donc des aventuriers, qui se perdent quelquefois dans les méandres de leurs idées, et on constate qu'un certain nombre de pistes poursuivies avec énergie quelque temps se révèlent être des culs-de-sac (mais pour combien de temps ?).

---

* Je la remercie pour son invitation à présenter une conférence dans ce cadre. Je remercie aussi Catherine François et Jean-Luc Bellon pour l'aide apportée dans la saisie de ce texte.

** J'espère que les quelques représentants du monde politique présents lors de l'exposé oral ont pu entrevoir pourquoi les chercheurs vont répétant avec tant de conviction qu'exiger qu'ils disent à l'avance ce qu'ils vont trouver est bien souvent la meilleure façon de les stériliser.

L'axiome des parallèles en géométrie euclidienne

Avant Euclide

Comme vous le savez, la naissance de la géométrie est historiquement liée à des préoccupations *pratiques* ; comme l'étymologie l'indique, les connaissances géométriques ont été essentiellement induites par des problèmes posés par la mesure de terrains (notamment pour la détermination des impôts!) et des considérations sur les astres (cf. [15]). Un savoir s'est ainsi accumulé au fur et à mesure des années, et beaucoup de civilisations différentes ont participé à la constitution de ce savoir géométrique : les Babyloniens, les Egyptiens, les Chinois, ... Les Occidentaux que nous sommes avons tendance, parmi les apports anciens, à privilégier celle des Grecs. Leur démarche visant à *faire de la géométrie une science déductive* était exemplaire et originale ; elle a joué un rôle jusqu'à nos jours dans le modèle de développement des mathématiques dites "pures".

Le premier géomètre dont le nom a traversé les siècles est *Thalès de Milet*. Pour *Pythagore*, autre figure illustre de la géométrie, les mathématiques sont intégrées de façon étroite à sa philosophie : il ne sépare pas les mathématiques de l'astronomie ou de la musique par exemple. Citons enfin *Platon* à qui on devrait la devise de son école qui a été florissante : *"nul n'entre ici s'il n'est géomètre"*.

Tout ceci atteste que les mathématiques, et la géométrie en particulier, ont occupé une place importante dans la pensée des Grecs.

Euclide et ses "Eléments"

Le nom d'un mathématicien est depuis cette époque associé de façon presque inséparable à celui de géométrie : il s'agit d'*Euclide*, dont les dates de naissance et de mort ne sont pas vraiment connues. Il aurait vécu à peu près trois cent ans avant notre ère. Son œuvre s'appelle *"les Eléments"*. On dit souvent que ce document, qui est une somme des connaissances mathématiques de son temps, est le livre de l'histoire de l'Humanité le plus lu, à part les livres religieux. Il est divisé en treize livres. Nous allons nous concentrer sur ceux qui parlent de géométrie, et spécialement le livre 1. Dans ce document est exposée une méthode originale, un peu l'aboutissement de la réflexion des Grecs à propos des mathématiques, la *méthode axiomatique*. Le développement est très systématique avec l'introduction d'un certain nombre de postulats. Dans ce livre, adoptant un point de vue qu'on appellerait aujourd'hui *synthétique*, Euclide prend la peine de définir ce que sont les points, les droites, ce que veut dire l'incidence d'un point à une droite, l'incidence de deux droites, etc...

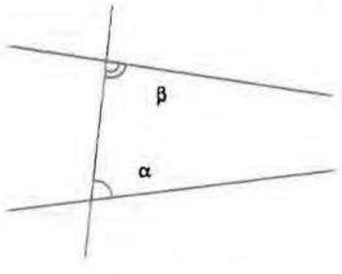
Examinons un peu les premiers postulats des Eléments d'Euclide. Des quatre premiers, citons seulement le premier :

"par deux points distincts passe une et une seule droite".

Les suivants (les postulats deux, trois et quatre) parlent aussi de propriétés fondamentales : le caractère archimédien de la droite, d'autres propriétés élémentaires des cercles ou des angles droits.

Evidemment, pour notre propos, le postulat central est le postulat numéro cinq, souvent appelé *le postulat d'Euclide*, car il joue un rôle particulier. Il est ainsi formulé dans les Eléments :

"si deux droites sont coupées par une troisième en formant des angles internes du même côté, dont la somme est inférieure à un angle plat, alors elles se coupent du côté de ces angles, si elles sont prolongées suffisamment loin".



$\alpha + \beta < 2$ droits

Figure 1. Des droites non parallèles selon Euclide.

Il diffère des autres parce qu'il fait intervenir l'infini : en effet il y est affirmé que quelque chose doit se passer en prolongeant les droites suffisamment loin. La définition suivante est souvent substituée à celle d'Euclide : *"par tout point extérieur à une droite passe une seule droite parallèle à la droite qui est donnée"* (rappelons que des droites sont dites *parallèles* si elles ne se coupent pas, même si on les prolonge indéfiniment). Il semble qu'Euclide soit conscient du fait que ce postulat n'est pas comme les autres puisqu'il ne le fait apparaître dans la liste des postulats que beaucoup plus tard. Avant de l'énoncer, il prend la peine de dériver vingt neuf propositions et théorèmes, déduits donc seulement des axiomes de 1 à 4.

Plusieurs des conséquences de ce postulat sont tout à fait importantes : il se révèle par exemple nécessaire pour établir que *"deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles"*, ou encore que *"la somme des angles d'un triangle est égal à un angle plat"*, propriété qui nous occupera beaucoup dans la suite. Voilà donc la situation telle qu'Euclide la laisse.

Les continuateurs d'Euclide

Ce postulat pose très vite un certain nombre de questions aux mathématiciens postérieurs à Euclide ; en effet beaucoup s'inquiètent du fait qu'il serait peut-être possible de le déduire des précédents. On trouve trace de nombreuses tentatives pour *prouver* le postulat numéro cinq. Il n'est donc pas question de les énumérer toutes ; les seules retenues correspondent à des reformulations du problème posé par le postulat d'Euclide, qui se sont révélées ultérieurement intéressantes.

Proclus, qui vit au Vème siècle, essaie de travailler avec une autre définition des parallèles ; pour lui des parallèles *"sont des droites qui restent à une distance constante"*. Il croit avoir démontré le postulat d'Euclide mais sa démonstration est erronée. L'Histoire est ainsi remplie de preuves erronées du postulat d'Euclide. Dans la démonstration de Proclus est caché le fait non évident suivant (il est même équivalent au postulat d'Euclide) : *"les points à distance constante d'une droite forment une droite"*.

On peut mentionner des contributions très importantes d'un certain nombre de mathématiciens arabes, et de beaucoup de mathématiciens italiens pendant la Renaissance.

Le mathématicien anglais *John Wallis* (1661-1703), plus connu pour un certain nombre de formules intéressantes en Analyse, *prouve* l'axiome des parallèles en supposant qu'il existe dans le plan des triangles ayant des côtés arbitrairement grands semblables à un triangle donné. Il obtient donc une démonstration rigoureuse du postulat d'Euclide avec une hypothèse supplémentaire. Il faut pour cela de nouveau côtoyer l'infini dans la mesure où il s'avère nécessaire de considérer des triangles dont les longueurs des côtés sont arbitrairement grandes tout en gardant les angles constants.

Saccheri

Parmi les travaux qui ont suivi, relevons ceux du mathématicien italien *Saccheri* (1667-1733). Il étudie beaucoup une figure particulière, ce qui vaut à cette situation d'être quelquefois appelée *le quadrilatère de Saccheri*.

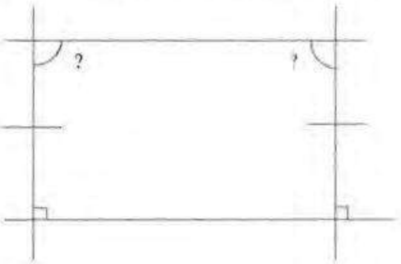


Figure 2. Le quadrilatère de Saccheri

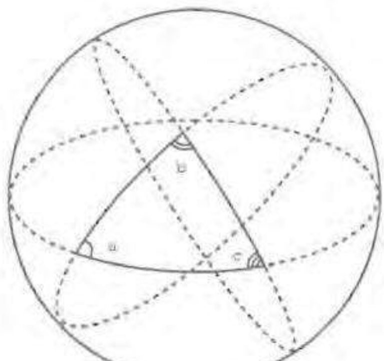
Toute l'étude vise à montrer que les deux angles dont la mesure n'est pas connue a priori sont *droits*. Saccheri n'y arrive pas tout à fait ; par contre il parvient à démontrer une propriété qui frappera par sa force, à savoir : *"si la somme des angles d'un triangle du plan est égale, supérieure ou inférieure à un angle plat, cette propriété est vraie pour tous les triangles du plan"*. Autrement dit, Saccheri fait apparaître une ligne de démarcation entre trois types de géométrie, un fait important comme nous allons le voir par la suite. Mais son travail a une autre conséquence : devant l'énergie qu'il consacre à la démonstration du postulat d'Euclide et la résistance de ce problème, l'idée qu'il pourrait exister d'autres géométries que la géométrie d'Euclide progresse. Pour d'Alembert, cette incertitude est *"le scandale de la géométrie"*.

Lambert et la géométrie sphérique

On doit à *Lambert* (1728-1777), mathématicien suisse né à Mulhouse, la réfutation de l'hypothèse de l'angle obtus pour un espace infini. Dans un livre intitulé la

"*Théorie des droites parallèles*" (1766), il est le premier à introduire pour un polygone à n côtés son *défaut angulaire* (à savoir la quantité $(n-2)$ fois un angle plat moins la somme des angles intérieurs au polygone) qui mesure la déviation à ce que l'espace soit euclidien.

Lambert est aussi le premier à faire une construction intéressante impliquant la *géométrie sphérique*. Cette géométrie, importante pour l'astronomie et la navigation, était déjà développée en ce temps à côté de la géométrie euclidienne mais, pour des raisons difficiles à comprendre, elle n'était pas pensée comme une géométrie concurrente de celle-ci. Qu'est-ce que la géométrie sphérique ? Il s'agit tout simplement de la géométrie des figures tracées sur la sphère avec pour côtés des portions de grands cercles et pour mesures des angles leur mesure habituelle. On se persuade vite que, dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle sphérique présente un défaut qui est directement relié à l'aire du triangle sphérique (cf. Figure 3). Cette géométrie sphérique est évidemment nécessaire lorsqu'on veut repérer des objets dans la voûte céleste, mais aussi sur la Terre dès qu'on a compris qu'elle est ronde et non plate.



2 droits - (a + b + c) $= \frac{\text{aire}}{r^2}$

Figure 3. Le défaut angulaire en géométrie sphérique.

Une des raisons qui fait de la géométrie sphérique une géométrie à part est sa *finitude*. Rappelons que dans notre histoire de parallèles une grande importance est attachée à l'idée de pouvoir s'éloigner à l'infini. Chez Lambert apparait, pour la première fois, l'idée d'une piste pour construire une géométrie non-euclidienne, puisque dans la géométrie sphérique l'hypothèse de l'angle obtus est vérifiée. Lambert le fait remarquer et dit qu'après tout, si, au lieu de prendre une sphère de rayon r, on pouvait prendre une sphère de rayon imaginaire pur ir, alors le défaut détecté dans la formule de la somme des angles d'un triangle sphérique prendrait le signe opposé. On se retrouverait du coup dans une géométrie où l'hypothèse de l'angle aigu serait satisfaite.

D'autres mathématiciens de cette époque méritent d'être mentionnés pour leur contribution à notre problème.

Adrien Marie Le Gendre (1752-1833) fait en quelque sorte la somme des connaisssances de son temps. Il écrit notamment un livre réédité de nombreuses fois, les *"Eléments de géométrie"* (l'allusion à Euclide est claire). Cet ouvrage servira de base à l'enseignement de la géométrie pendant à peu près un siècle (un exemple exceptionnel de longévité scolaire).

Wolfgang Bolyai (1775-1856), un condisciple de Carl Friedrich Gauß, fait aussi des tentatives intéressantes pour définir une nouvelle géométrie. Comme il pense avoir prouvé l'impossibilité d'avoir une géométrie non-euclidienne, il publie un livre à ce sujet, et écrit à Gauß pour lui présenter son travail. Gauß lui montre en quel endroit précis son raisonnement n'est pas correct.

Ceci termine la période, disons pré-révolutionnaire, de remise en cause de la géométrie euclidienne sans qu'aucune percée décisive vers la découverte des nouvelles géométries ne soit faite.

La découverte des géométries non-euclidiennes

Fixer des termes précis à la période de cette découverte est largement arbitraire, mais on peut retenir la période de 1792 à 1837. Qui furent donc les découvreurs ?

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Commençons par *Carl Friedrich Gauß*. Il n'a que 15 ans lorsqu'en 1792, pour la première fois, il s'essaie à la géométrie non-euclidienne. Dans une lettre écrite en 1799 à Wolfgang Bolyai, dont nous avons déjà parlé, il dit *"j'ai déjà fait quelques progrès dans mon travail ; si on pouvait prouver qu'il existe un triangle dont l'aire est plus grande que tout nombre donné à l'avance, alors je pourrais établir la géométrie* (sous-entendu euclidienne) *rigoureusement"*. Nous voyons donc apparaître une nouvelle piste, à savoir que, dans une géométrie non-euclidienne, les triangles les plus grands possibles, même ceux dont les longueurs des côtés tendent vers l'infini vont avoir une aire finie. Nous retrouvons en cela une idée déjà évoquée précédemment. Gauß continue de travailler là-dessus ; en fait on peut probablement dater de 1813 la naissance de ce qu'il a appellé à ce moment *l'anti-géométrie*. Fidèle à sa devise *"Pauca sed matura"*, il ne publie cependant rien.

Dans une lettre à Taurinus, un mathématicien dont nous allons mentionner l'apport propre bientôt, il écrit qu'il a la crainte de diffuser cette découverte, car, dit-il, *"je suis effrayé de la clameur des Béotiens"*, et il demande très explicitement à Taurinus de garder le silence sur les points évoqués dans sa lettre. C'est une époque où Emmanuel Kant (1724-1804) règne sur la philosophie : sa *"Critique de la raison pure"* parait en 1791 et établit comme un dogme absolu la distinction entre les raisonnements synthétiques et les jugements a priori, l'espace euclidien était un des fondements de la raison pure. Dans ce contexte, remettre en cause la géométrie euclidienne est une attaque majeure contre la philosophie dominante, et il semble que Gauß n'ose pas, à ce moment-là, écrire une chose pareille. Il renchérit encore dans une lettre à Burkhardt, écrite en 1817, dans laquelle il dit *"je suis de plus en plus convaincu que la nécessité de notre géométrie euclidienne ne peut être prouvée en tout cas pas par une pensée humaine et pour une raison humaine. Peut-être, dans une autre vie, il nous sera possible d'avoir une indication sur la nature de l'espace* *qui nous est pour le moment inaccessible".* Il ne fait donc guère de doute que les intuitions de Gauß commencent à se préciser sans être tout à fait mûres.

En 1824, dans une autre lettre à Taurinus (qui vient de lui envoyer, cf. infra, un nouveau projet de démonstration de l'axiome d'Euclide), Gauß écrit : *"l'hypothèse que la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180 degrés conduit à une géométrie curieuse, assez différente de la nôtre, mais cohérente que j'ai développée à mon entière satisfaction et dans laquelle je peux résoudre tout problème à l'exception de la détermination d'une constante qui ne peut être définie a priori. Plus cette constante est grande, plus on est proche de la géométrie euclidienne et les deux coïncident si elle est prise infinie".*

Et Gauß de continuer : *"Les théorèmes de cette géométrie apparaissent paradoxaux, et aux non-initiés absurdes, mais une réflexion calme et soutenue révèle qu'ils ne contiennent rien d'impossible ; par exemple les angles d'un triangle peuvent devenir aussi petits que l'on veut si les longueurs des côtés sont prises assez grandes. L'aire d'un triangle ne peut excéder une certaine limite indépendamment de la taille des côtés, limite qui n'est d'ailleurs jamais atteinte. Tous mes efforts pour découvrir une contradiction, une incohérence dans cette géométrie non-euclidienne ont échoué, et la chose par laquelle elle est opposée à mes conceptions, si elle était vraie, est de nécessiter l'existence dans l'espace d'une longueur déterminée par elle-même mais inconnue de nous. Mais il ne semble que nous ne connaissons, en dépit de la sagesse verbale qui en dit rien des métaphysiciens, que si peu, pour ne pas dire rien du tout, de la vraie nature de l'espace qu'il n'est pas possible de qualifier d'impossibile ce qui nous apparaît comme non naturel".*

Il fait ensuite des allusions à Kant, point déjà évoqué auparavant. Dans l'esprit du thème récurrent sur les relations des mathématiques avec les autres sciences, il est à noter que Gauß avait parmi ses métiers celui de faire de la géodésie de terrain, en mesurant des distances entre montagnes afin de mieux connaître la Terre. Cela a été sans doute pour lui une incitation forte pour étendre la géométrie différentielle comme nous l'expliquons un peu plus tard. Cela lui a donné l'idée d'une *géométrie généralisée*, dont la géométrie sphérique est une simplification et dont la proximité à celle-ci est mesurée par les écarts constatés avec les mesures de longueur de la géométrie sphérique. Il peut ainsi prédire de façon assez précise l'applatissement de la Terre aux pôles.

Quelques autres précurseurs

Julius Schweikart (1780-1859) participe à la découverte des géométries non euclidiennes en publiant en 1818 une *géométrie astrale*. Dans ce livre apparaît en effet une quantité importante en géométrie non-euclidienne, à savoir une certaine constante liée à la hauteur d'un triangle rectangle isocèle qu'on étend jusqu'à l'infini : on part d'un triangle rectangle isocèle, et on fait fuir vers l'infini les cotés de l'angle qui seraient à 45 degrés dans une géométrie euclidienne. Gauß montre comment il peut relier les considérations que Schweikart développe dans son livre avec le calcul de l'aire d'un triangle infini (qui est la limite supérieure possible des aires d'un triangle dont la longueur des cotés tend vers l'infini).

C'est *Taurinus* (1794-1874) qui introduit en 1826 ce que l'on peut appeler la *trigonométrie hyperbolique*. Il est bien connu que la trigonométrie plane (ou *résolution des triangles du plan*) a été développée pour des raisons appliquées. Pour des besoins liés à l'astronomie, on a ensuite introduit une *trigonométrie sphérique*. L'originalité principale de cette autre trigonométrie (par rapport à la trigonométrie ordinaire) est le fait que les longueurs des côtés des triangles sont elles-mêmes affublées de fonctions sinus et cosinus. Les formules sont donc un peu plus compliquées puisque les longueurs, comme les angles, sont des arguments de fonctions sinus et cosinus. La remarque de Taurinus est alors la suivante : si, dans ces formules, au lieu de prendre des sinus et des cosinus des longueurs, on prend des longueurs imaginaires, alors, rejoignant l'idée de Lambert, on passe aux fonctions sinus et cosinus hyperboliques (i.e. respectivement les parties impaire et paire de la fonction exponentielle). Taurinus montre que le calcul trigonométrique continue à se développer de façon cohérente. Il écrit à Gauß pour dire son étonnement devant le fait qu'aucune contradiction n'apparaisse. Il va même plus loin : il calcule l'aire maximum d'un triangle d'après cette *géométrie par les formules* et trouve que cette aire vaut π. Il calcule aussi la circonférence d'un cercle dans cette géométrie hypothétique qui, rappelons-le, n'est pas du tout définie d'une façon habituelle puisque, chez Taurinus, elle se limite à un ensemble de calculs auxquels on ne sait pas (encore !) donner de contenu visuel.

Nikolaï Lobatchevski (1792-1856)

Venons-en maintenant à Nikolaï Lobatchevski, que vous devez attendre, au moins puisque son nom figure dans le titre de la conférence. Il est indiscutablement un des créateurs, avec Gauß, de la géométrie non-euclidienne. Il a passé toute sa vie à Kazan, et c'est pourquoi c'est l'Université de Kazan qui organise la célébration du bicentenaire de sa naissance. Il a étudié là-bas, y a été professeur, puis recteur ; il y a deployé une activité considérable.

L'annonce de la découverte d'une géométrie nouvelle a été faite lors d'une conférence prononcée par Lobachevski à Kazan en 1827, conférence dont les notes n'ont apparemment pas été conservées. Dans cette nouvelle géométrie, l'axiome des parallèles est violé : *"étant donnés une droite de cette géométrie et un point extérieur à cette droite, il existe en effet une infinité de droites passant par ce point et parallèles à cette droite"*. Il expose sa théorie dans un texte intitulé *"Sur les principes de la géométrie"* dont on a aujourd'hui seulement une traduction anglaise, *"The principles of geometry"*. La publication complète a lieu en 1837 en français dans le journal de Crelle (aujourd'hui le "Journal für die reine und angewandte Mathematik"). Lobachevski donne à sa géométrie le nom de *Géométrie imaginaire*. En 1840, il publie en allemand un traité beaucoup plus systématique qui s'appelle *"Die Theorie der Parallelinien"* (cf. [11] pour une traduction en français). Ce livre contient aussi un certain nombre de discussions sur les problèmes d'astronomie liés à sa géométrie. Il se demande en effet si l'espace dans lequel nous vivons est vraiment euclidien ou s'il n'est pas plutôt un espace de la nouvelle sorte, et ceci en tenant compte des incertitudes sur les mesures. Il se demande aussi quels sont les éléments qui permettraient de décider ce point. Peu avant sa mort, il publie, sous le titre *"Pangéométrie"*, un livre assez complexe où se mêlent des considérations géométriques et générales. Lobatchevski a donc indiscutablement la vision claire et précise d'une géométrie cohérente dont il peut donner les axiomes, tout en se posant vraiment la question *"cette géométrie peut-elle servir de modèle à l'espace qui nous environne ?"*.

On trouve une allusion au premier texte de Lobatchevski, diffusé en 1930, dans une lettre de Gauß à Schumacher du 12 juillet 1931, dans laquelle il dit : *"Au sujet des parallèles, je vous aurais déjà communiqué mon grand plaisir, et mon opinion en réponse à votre première lettre si je n'avais supposé que, sans les développements suffisants, elle ne pouvait vous être d'une grande utilité... mais vous auriez pu appliquer le même raisonnement en réduisant d'abord la question au cas le plus simple et en énonçant ainsi le théorème :* "dans tout triangle dont un côté est fini, le second côté et par suite aussi le troisième étant infinis, la somme des deux angles adjacents au côté fini est égal à un angle plat". *Pour ce qui est de votre démonstration du théorème, je commencerais par protester contre l'usage que vous faites d'une grandeur infinie en la traitant comme une quantité déterminée ce qui n'est jamais permis en mathématiques. L'infini n'est qu'une façon de parler parce qu'il s'agit en réalité de limites dont certains rapports peuvent approcher autant que l'on voudra tandis que d'autres sont susceptibles de croître indéfiniment. Dans ce sens la géométrie non-euclidienne ne renferme en elle rien de contradictoire quoique, à première vue, beaucoup de ses résultats aient l'air de paradoxes. Ces contradictions apparentes doivent être regardées comme l'effet d'une illusion due à l'habitude que nous avons prise de bonne heure de considérer la géométrie euclidienne comme rigoureuse. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatchevski aucun fait nouveau pour moi mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique"*.

János Bolyai (1802-1860)

Le deuxième "créateur" de la géométrie non-euclidienne est János Bolyai, le fils de Wolfgang Bolyai. Son père l'introduit très jeune à la problématique de la géométrie non-euclidienne. En fait, à la fois il l'attire vers ce problème, et aussi le mets en garde sur le fait que ce problème peut le perdre. Officier de l'armée autrichienne, János Bolyai semble avoir quelques loisirs, notamment pendant sa période de formation à l'école militaire. Il passe énormément de temps à réfléchir sur l'axiome d'Euclide. Pour attester de cela, on dispose des traces écrites de nombreux échanges à ce propos avec un certain nombre de jeunes condisciples. János Bolyai introduit un langage à résonance philosophique. Il ne cherche rien moins qu'une *théorie absolue de l'espace* : dans une lettre à son père datant de 1823, il écrit : *"je suis décidé à publier mon travail sur la théorie des parallèles dès que j'aurai mis le matériel en ordre et les circonstances s'y prêtent. Je n'ai pas terminé mon travail mais le chemin que j'ai suivi me donne presque l'assurance que le but sera atteint si c'est possible. Le but n'est pas encore atteint mais j'ai fait des découvertes merveilleuses qui m'ont subjuguées, et ce serait une cause de regret éternel si elles étaient perdues. Quand vous les verrez, vous le reconnaîtrez aussi. Entretemps, la seule chose que je puisse dire, c'est que j'ai créé un nouvel univers à partir de rien. Tout ce que je vous ai envoyé jusque là est un château de cartes à côté de la tour. Je suis aussi convaincu que cela va m'honorer autant que si j'en avais déjà fait la découverte."*

Le travail de János Bolyai est rendu public sous la forme d'un appendice à un livre de son père intitulé le *"Tentamen"* (cf. [2]). Il y expose une géométrie non-euclidienne, en fait identique à celle de Lobatchevski, mais sans savoir qu'il en est ainsi. Ce texte est envoyé par son père à Gauß en juin 1831, mais il n'arrive qu'en janvier 1832.

Dans sa lettre de réponse à l'envoi de Wolfgang Bolyai, Gauß lui dit : *"Si je commençais en disant que je ne peux louer le travail de János, vous seriez sûrement surpris pour un moment mais je ne peux faire autrement car le louer serait me louer moi-même. En effet, le contenu lui-même du travail, le chemin suivi par votre fils et les résultats auxquels il est conduit, coïncident presque entièrement avec les méditations qui ont occupé mon esprit en partie pour les 30 à 35 dernières années. C'est pourquoi je suis resté assez stupéfait en ce qui concerne mon propre travail dont je n'ai jusqu'à présent presque rien mis sur le papier. Mon intention n'était de ne rien en publier de mon vivant. En effet les gens n'ont en général pas les idées claires sur les questions dont nous parlons, et j'ai trouvé très peu de gens qui ont montré un intérêt dans ce sujet quand je leur en ai parlé. Mon idée était d'écrire cela plus tard afin que cela ne périsse pas avec moi. C'est donc une surprise agréable de me voir ce souci épargné, et je suis très heureux que ce soit le fils d'un vieil ami qui me précède d'une manière si remarquable."*

A la réception de cette lettre, Wolfgang Bolyai est absolument enchanté de la réaction approbative de Gauß au travail de son fils. Par contre János, lui, est absolument furieux car il soupçonne son père d'avoir informé Gauß avant l'envoi fatidique de 1831, et de ne pas l'en avoir averti. Cela ne semble pourtant pas être le cas, comme en atteste une autre lettre de Gauß dans laquelle il parle du traité de Bolyai en disant que c'est un traité où *"sont présentées toutes mes idées et résultats avec grande élégance. Je considère ce jeune géomètre de Bolyai comme un génie de première grandeur"*.

János Bolyai continue de faire une étude très approfondie de la *géométrie neutre*, c'est-à-dire toute la géométrie qui dépend des seuls quatre premiers axiomes d'Euclide, et qui demeure donc valable aussi bien dans les géométries non euclidiennes que dans la géométrie euclidienne. János Bolyai a une conception très claire de l'existence de trois géométries : la géométrie euclidienne, la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, dont on peut dire qu'elle est l'œuvre de Lobatchevski, Bolyai et Gauß. On peut noter, pour la petite histoire, que János Bolyai ne semble apprendre l'existence du travail de Lobatchevski qu'en 1848 en remarquant cependant qu'il n'a jamais vraiment appartenu au monde académique.

Des modèles de la géométrie hyperbolique

A partir de maintenant, pour nous, "la" géométrie non euclidienne est celle dont nous venons d'évoquer la découverte ; c'est une géométrie dans laquelle la somme des angles est inférieure à un angle plat, et dans laquelle on sait, à cause de la remarque de Lambert, que deux triangles semblables sont en fait égaux. A partir de maintenant, nous l'appellerons *géométrie hyperbolique* pour de nombreuses raisons, en particulier le fait que dans, les formules de la trigonométrie de cette géométrie, des fonctions hyperboliques jouent le rôle des fonctions trigonométriques classiques (comme pressenti par Taurinus). Il est temps cependant d'en donner des modèles rigoureux.

Le disque de Poincaré

Nous présentons d'abord le *modèle du disque de Poincaré* (qui est introduit un peu plus tard). Il se décrit ainsi : l'espace est formé des *points intérieurs au disque-unité* du plan ; les droites de cette géométrie sont les *cercles orthogonaux au cercle-unité* (bord du disque qui doit être vu comme l'ensemble des points à l'infini) auxquels il faut ajouter les *diamètres* ; l'incidence est l'incidence habituelle, i.e. un point est sur une droite s'il est sur le cercle correspondant et deux droites seront dites *parallèles* si elles n'ont pas de point en commun.

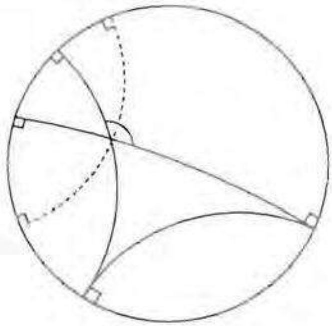


Figure 4. Droites parallèles à une droite donnée dans le modèle du disque de Poincaré.

Il est immédiat de voir qu'il y a une infinité de parallèles à une droite donnée parce que tout cercle orthogonal au cercle-unité dont les points d'intersection avec ce cercle (ses points à l'infini donc) sont compris entre les deux points à l'infini du cercle de départ lui est parallèle. Un point et une droite étant donnés, il y a en fait une formule qui relie l'*angle de parallélisme*, i.e. l'angle que font au point les droites qui passent respectivement par les deux points à l'infini de la droite donnée, et la distance du point à la droite. Dans cet angle sont contenues toutes les droites parallèles à la droite donnée qui passe par le point. La mesure des angles dans ce modèle est la mesure euclidienne ordinaire des angles (on dit qu'il est *conforme* à cause de cela). Par contre la mesure des longueurs n'est pas du tout la mesure ordinaire. Il faut en effet que les longueurs tendent vers l'infini quand on se rapproche du cercle-unité qui est à l'infini. La distance s'obtient en intégrant une formule infinitésimale qui contient des expressions qui tendent explicitement vers l'infini lorsque la distance au bord tend vers zéro.

Une chose importante, pressentie avec le travail de Lambert, est l'existence d'un triangle d'aire finie dont les sommets sont à l'infini. En effet, par la formule du défaut angulaire, l'aire de ce triangle dégénéré vaut π, puisque ses angles sont de mesure nulle.

Le demi-plan de Poincaré

Un autre modèle possible, en fait équivalent au précédent par une inversion, est celui dit du *demi-plan de Poincaré*. Dans le plan complexe, on s'intéresse maintenant au demi-plan formé des nombres complexes dont la partie imaginaire est positive. Les points de cette géométrie sont les *points du demi-plan* ; les droites sont des *cercles dont un diamètre est porté par l'axe réel*, auxquels il faut ajouter des cercles dégénérés dont le centre est à l'infini sur l'axe réel, et qui sont donc des *parallèles à l'axe imaginaire*.

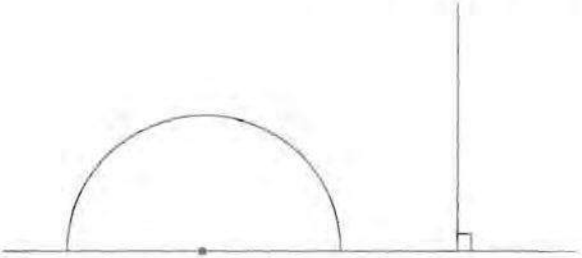


Figure 5. Deux droites dans le modèle du demi-plan de Poincaré.

Comme dans le modèle du disque de Poincaré, la mesure des angles est la mesure euclidienne ordinaire (il est donc conforme). Celle des longueurs s'obtient comme dans le cas précédent en intégrant un élément de longueur infinitésimal tendant vers l'infini lorsqu'on s'éloigne à l'infini ou qu'on se rapproche de l'axe réel (qui est lui aussi à l'infini).

Le modèle de la pseudo-sphère

Donnons un autre modèle qui a a priori l'avantage d'être plus concret puisqu'il réalise la géométrie hyperbolique sur une surface de l'espace euclidien à 3 dimensions : c'est le modèle de la *pseudo-sphère*. Qu'est-ce que la pseudo-sphère ? C'est la surface de révolution obtenue à partir d'une *tractrice*, i.e. la courbe que décrit un chien lorsque son maître se déplace en ligne droite le long de l'axe et le tire derrière lui avec une laisse de longueur constante.

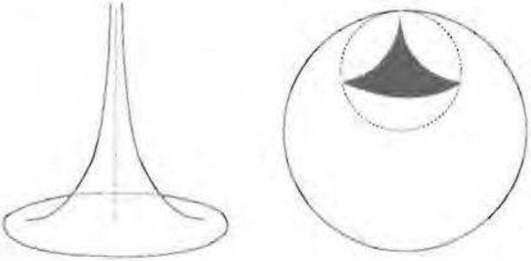


Figure 6. La pseudo-sphère et le domaine du disque qu'elle représente.

Lorsqu'on mesure des longueurs *sur* cette surface, on vérifie la géométrie hyperbolique à une différence globale près : la zone de l'espace que recouvre la pseudo-sphère, dans le modèle de Poincaré du disque par exemple, n'est pas l'espace entier mais seulement une portion dont on a recousu les deux bords pour obtenir cette forme de trompette. Dans la Figure 6, ce domaine est porté à côté du dessin de la pseudo-sphère. En fait il suit d'un théorème profond de Hilbert qu'*il est impossible de réaliser isométriquement l'espace hyperbolique tout entier comme surface dans l'espace euclidien à trois dimensions*.

Le modèle de Klein-Beltrami

Il y a beaucoup d'autres modèles. Un, très important du point de vue géométrique, s'appelle le *modèle de Klein-Beltrami*. Il a l'avantage de lier la géométrie hyperbolique et la géométrie projective. Il donne aussi une raison supplémentaire d'appeler cette géométrie *hyperbolique*.

Il peut se décrire ainsi : dans l'espace ordinaire à trois dimensions de coordonnées x, y et z, on considère l'*hyperboloïde à deux nappes* d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ dont on ne prend que la nappe supérieure (celle dont les points ont une altitude z positive). C'est en quelque sorte une sphère de rayon imaginaire pour une métrique généralisée (du type de celle utilisée en Relativité restreinte), d'où une jonction possible avec l'idée émise par Lambert. Les points de l'espace sont *les points de cette nappe*, les droites seront les *intersections de cette nappe avec des plans passant par l'origine* (ce sont en fait des *hyperboles* de l'espace euclidien ordinaire), et l'incidence reste l'incidence ordinaire. Par contre, dans ce modèle, les angles mesurés au point d'intersection de deux droites doivent l'être par une formule partant de leur cosinus utilisant le produit scalaire non euclidien qui a servi à définir la surface. Il n'est donc pas conforme. Là encore, pour ce modèle il faut recourir à l'intégration le long des côtés d'un triangle pour déterminer leur longueur. Les "droites" étant déterminées par intersection de l'espace avec des plans, cela donne une analogie avec la géométrie projective où les *"droites"* sont aussi obtenues comme intersection de sous-espaces linéaires dans l'espace.

Les groupes d'isométries des géométries fondamentales

Décrivons rapidement ce que sont les groupes d'isométries des trois géométries.

Pour la géométrie euclidienne plane, le groupe d'invariance est le *groupe des déplacements plans* qui, en termes un peu savants, n'est rien d'autre que le produit semi-direct du groupe des rotations planes par le groupe des translations. Il contient donc trois paramètres : un paramètre angulaire pour fixer la rotation et deux paramètres réels pour fixer la translation.

Le *groupe d'invariance de la géométrie sphérique* n'est rien d'autre que le *groupe des isométries de l'espace euclidien à trois dimensions*. Ce n'est pas surprenant puisque ces isométries préservent la sphère, mais il faut un théorème pour affirmer qu'il n'y a pas d'autres transformations de la sphère qui préservent les longueurs. Ce groupe dépend aussi de trois paramètres : les angles d'Euler pour une rotation par exemple, les composantes du vecteur-unité sur la sphère normal au plan de symétrie et l'angle de rotation pour une isométrie renversant l'orientation. Ce groupe est généralement *noté* O_3.

Pour la géométrie hyperbolique, la description concrète de son groupe d'invariance nécessite que l'on précise le modèle que l'on utilise. Bien entendu cela n'affecte pas sa structure en tant que groupe. Nous prenons le modèle du demi-plan de Poincaré car c'est pour lui que le groupe d'invariance a la description la plus commode. Ce groupe est formé des transformations *homographiques* : par une telle transformation, le nombre complexe z (ayant par hypothèse une partie imaginaire positive) est envoyé sur le nombre complexe $a\,z + b/c\,z + d$, où a, b, c et d sont des nombres réels. On vérifie que ce groupe dépend encore de trois paramètres car la forme fractionnaire de la transformation fait que les 4 paramètres précédemment introduits ne sont définis qu'à un facteur près. Il est traditionnel (et efficace) de représenter une telle transformation sous la forme d'une matrice 2×2, d'éléments a, b, c et d, normalisés par la condition $a\,d - b\,c = 1$.Comme la composition des transformations homographiques correspond au produit des matrices, le *groupe d'invariance de la géométrie hyperbolique* s'identifie donc au *groupe des matrices* 2×2 *à coefficients réels de déterminant* 1, appelé traditionnellement $Sl_2(\mathbb{R})$.

Développements et controverses autour des géométries non-euclidiennes

Une réaction à cette découverte

"Nul n'est prophète en son pays". Ce proverbe s'applique à merveille à Lobatchevski, au moins si l'on en croit le jugement porté sur lui (cf. [9]) par un inspecteur des études de l'Université de Kazan dans un rapport sur son livre daté de 1835 : *"Il est des gens qui, après avoir lu un livre, disent : il est trop simple, trop ordinaire, il ne fait pas travailler mon esprit. Je leur conseille de lire la géométrie du sieur Lobatchevski ; il y a vraiment là matière à réflexion. Quantité de nos excellents mathématiciens l'ont lu et refléchi mais n'y ont rien compris. Est-il besoin d'ajouter que j'ai eu beau moi-même méditer sur ce livre et que je n'ai pas saisi une seule pensée ou peu s'en faut. On se demanderait en vain comment le sieur Lobatchevski a pu faire de la science mathématique la plus facile et la plus claire qu'est la géométrie, une théorie aussi lourde, ténébreuse et inabordable, s'il ne nous avait lui-même partiellement éclairé à ce sujet en disant que sa géométrie n'est pas la géométrie usuelle, que nous avons tous apprise et que nous ne pouvons probablement plus oublier, et que c'est une géométrie imaginaire*. Maintenant on comprend tout. Que ne peut représenter l'imagination, surtout si elle est vive et en même temps maladive. Pourquoi ne pas imaginer par exemple que le noir et blanc, qu'un cercle est un quadrilatère, que la somme de tous les angles d'un triangle rectiligne est inférieure à deux droits... On le peut, on le peut fort bien, encore que cela soit incompréhensible à la raison. Mais pourquoi écrire et de plus publier des fantaisies aussi absurdes, demandera-t-on ? Il est difficile, je le reconnais, de répondre à cette question. L'auteur ne fait nulle part au but qu'il visait en publiant cette œuvre. Aussi en sommes-nous réduits à des conjectures. Il est vrai*

* Il est intéressant de noter comment le mot *"imaginaire"*, qui, chez Lobatchevski, suggère l'idée de prendre des nombres complexes, est tournée ici en dérision.

qu'à un endroit il déclare nettement que ce serait les lacunes remarquées par lui dans la géométrie en usage qui l'aurait obligé à imaginer et à faire connaître au public cette géométrie nouvelle. L'auteur n'est sans doute pas sincère. S'il le prétend, c'est sans doute pour dissimuler le véritable but de cette œuvre. Pour commencer, cela est contraire à ce que l'auteur a dit lui-même de sa géométrie, à savoir qu'elle n'existe pas dans la nature mais seulement dans son imagination, et qu'elle reste en fait absolument inapplicable aux mesures. Deuxièmement, cela est effectivement contraire à son contenu et on serait plutôt enclin à penser que la géométrie nouvelle a été inventée pour démentir l'ancienne plutôt que pour la compléter. Qu'il nous soit permis par ailleurs de faire des personnalités. Comment peut-on croire que Monsieur Lobatchevski, professeur titulaire de mathématiques, ait pu écrire à une fin tant soit peu sérieuse un livre qui n'aurait apporté que bien peu de gloire au plus humble instituteur de village ? Tout enseignant doit avoir, sinon du savoir, du moins du bon sens. Or il n'est pas rare que, dans la géométrie nouvelle, cette dernière qualité fasse également défaut. Eu égard à tout cela j'en conclus que le plus probable est que le but réel visé par Monsieur Lobatchevski, en écrivant et en faisant publier sa géométrie, est tout simplement qu'il voulait plaisanter, au mieux on peut dire, contre les théoriciens des mathématiques ou peut-être contre les savants auteurs de notre temps en général. Ensuite j'estime qu'il est non seulement probable mais même absolument certain que la passion insensée d'écrire d'une manière étrange et inintelligible très marquée depuis quelque temps chez beaucoup de nos écrivains et le désir fou de découvrir des choses nouvelles alors que l'on est à peine assez doué pour comprendre convenablement les vieilles sont les deux défauts que l'auteur avait l'intention d'exposer dans son œuvre, ce qu'il a fait on ne peut mieux". Ce texte est signé S.S., mais l'on ne sait toujours pas de façon certaine qui se cache derrière ces initiales.

D'autres développements de la géométrie

Motivé par ses travaux de géodésie, Gauß pressent des géométries beaucoup plus générales que la géométrie hyperbolique, la géométrie sphérique ou la géométrie plane. En effet, pour avoir un bon modèle de surface de la Terre, il développe une géométrie différentielle qui permet d'étudier des surfaces générales à courbure variable. Il montre que, pour ces géométries généralisées, les défauts angulaires des triangles sont directement reliés à la courbure contenue à l'intérieur du triangle. Dans ses *"Disquisitiones circa superficies curvas"* parues en 1827, Gauß laisse clairement entrevoir qu'il existe un dictionnaire dans lequel *"courbure positive constante"* est synonyme de *"géométrie sphérique"*, *"courbure nulle"* de *"géométrie euclidienne"* et *"courbure négative constante"* de *"géométrie hyperbolique"*.

Dans la période 1867-1869, le *"Giornale di Matematica"*, publié en Italie sous la responsabilité de Beltrami (1835-1899), donne une grande place aux articles sur les nouvelles géométries avec des contributions importantes de Beltrami lui-même. Une autre direction dans laquelle la géométrie connait au même moment des développements importants est la *géométrie projective* avec les travaux de Poncelet et de quelques autres. Il s'agit de s'affranchir des problèmes particuliers posés par les points à l'infini qui introduisent des cas particuliers dans les discussions géométriques. De plus, dans le cadre de la géométrie projective, grâce à l'utilisation de la *dualité* entre droites et plans, intersections de deux plans et plan engendré par deux droites, beaucoup de problèmes peuvent trouver une solution élégante.

Riemann (1826-1866) et *l'avènement de la géométrie riemannienne*

C'est dans la partie de l'habilitation de Bernhard Riemann proposée par la Faculté et soutenue en 1854 en présence de Gauß que celui-ci jette les fondements d'une géométrie nouvelle, appelée depuis *géométrie riemannienne*. Son mémoire *"Sur les hypothèses sur lesquelles est fondée la géométrie"* n'est publié que 13 ans plus tard, après sa mort. Il y définit la généralisation à n dimensions des surfaces à 2 dimensions de l'espace ambiant ordinaire à 3 dimensions et un élément de longueur général ds^2 dont les coefficients g_{ij} par rapport aux éléments différentiels fondamentaux dx^i sont variables (on a donc $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$). Il y introduit la *courbure* comme mesure de la déviation d'une telle géométrie à être une géométrie plate, donc euclidienne. La platitude se produit bien sûr si les coefficients g_{ij} sont constants dans un bon choix de coordonnées.

Dans ce cadre, les trois géométries modèles évoquées auparavant se représentent ainsi : la géométrie plane en coordonnées cartésiennes (x, y) s'écrit $dx^2 + dy^2$ (expression qui en coordonnées polaires (r, θ) devient $dr^2 + r^2 d\theta^2$), la géométrie sphérique s'écrit $dr^2 + \sin^2 r\, \theta^2$ et la géométrie hyperbolique $dr^2 + \sinh^2 r\, d\theta^2$ (le qualificatif *hyperbolique* est encore une fois justifié par la présence de fonctions hyperboliques).

Helmholtz, Klein, Poincaré et les autres

Parmi les continuateurs tout-à-fait importants de cette œuvre, il faut citer *Helmoltz* (1821-1894). Probablement le dernier savant universaliste, il fut d'abord médecin (on lui doit toujours une partie de l'instrumentation en ophtalmologie), puis, s'intéressant aussi bien à la météorologie qu'au fonctionnement de l'oreille, il arrive à des conclusions proches de celles de Riemann, par une démarche indépendante. Il publie en 1869 un article dont le titre *"Sur les faits qui servent de fondements à la géométrie"* peut s'interpréter comme un contrepoint à celui de Riemann. Dans ce texte, on trouve exposée pour la première fois une idée profonde qui s'est révélée d'une très grande fécondité : *s'intéresser au groupe d'invariance d'une géométrie pour la fonder.*

Cette idée a été systématisée par Félix Klein (1849-1925) qui publie en 1872 le *"programme d'Erlangen"* (cf. [10]), une mise en forme de son exposé de prise de fonction à l'Université. Il y place l'étude de la géométrie sous le signe de la théorie des groupes : pour lui, *"les propriétés géométriques sont caractérisées par leur invariance relativement au transformation du groupe principal"*. On arrive là à une étape décisive dans l'évolution de la notion de géométrie.

Henri Poincaré a joué un grand rôle dans la diffusion de ces nouvelles idées sur la géométrie, y compris dans un public plus large que celui des mathématiciens à cause de l'impact qu'ont eu plusieurs de ses livres de vulgarisation (cf. [12], [13], [14]). Reprenant le point de vue de Klein, il écrit notamment *"Nous sommes en mesure non pas de construire la géométrie d'Euclide mais de limiter notre choix à un choix entre la géométrie d'Euclide et celle de Lobatchevski... Pour aller plus loin nous avons besoin d'une nouvelle proposition qui prenne la place du postulatum des parallèles,* *la proposition qui en tiendra lieu sera l'affirmation de l'existence d'un sous-groupe invariant dont tous les déplacements sont échangeables et qui est formé de toutes les translations. C'est la clé qui détermine notre choix en faveur de la géométrie d'Euclide parce que le groupe qui correspond à la géométrie de Lobatchevski ne contient pas un tel sous-groupe invariant."* Dans ce texte, on voit clairement que la détermination du groupe d'invariance d'une géométrie n'est pas un exercice d'école mais un élément déterminant dans le choix de la géométrie à laquelle on va s'intéresser.

Parmi les apports importants, on ne peut complètement passer sous silence ceux de Sophus Lie (1842-1899) qui développe considérablement la théorie des groupes continus, et donc étend la géométrie dans la ligne tracée par le programme d'Erlangen.

Quelques voix discordantes avant la rupture épistémologique

Il ne faudrait pas tirer hâtivement argument de cette longue liste de progrès vers une meilleure compréhension des faits fondamentaux de la géométrie pour croire que tous les mathématiciens étaient à l'unisson.

En 1869, la controverse n'est pas encore complètement achevée puisqu'on trouve dans une note aux Compte-Rendus de l'Académie des Sciences, sous la plume de son Secrétaire perpétuel, *Joseph Bertrand*, des affirmations tout à fait étonnantes : *"aucun géomètre depuis Euclide n'a conçu de doute sérieux sur la valeur de la somme des angles d'un triangle. Un postulatum est nécessaire pour prouver qu'elle est égale à deux angles droits, mais l'évidence de ce postulatum permet aux esprits de bonne foi de l'accepter comme un axiome, et les dialecticiens curieux de disputer non de s'instruire peuvent seuls en contester l'évidence. Jamais, nous devons l'avouer, nous apparut bien nécessaire de les réduire au silence. La géométrie en effet conserverait même après succès des difficultés bien autrement insolubles".* Son texte, qui accompagne une nouvelle démonstration de l'axiome d'Euclide (en 1869 !), doit être contesté puisqu'une année plus tard il publie une nouvelle note, dans laquelle on peut lire : *"Celui qui prétend démontrer le postulatum d'Euclide s'adresse naturellement aux esprits assez difficiles pour ne pas en admettre l'évidence et cherche à leur montrer, dans le cas où ils refuseraient de l'accepter, des conséquences tellement absurdes qu'il ne soit impossible à personne de s'y arrêter. Cette manière d'envisager la question est formellement contestée par plusieurs géomètres forts distingués qui m'on fait l'honneur de m'écrire à ce sujet".* La réfutation qui suit cette introduction de la Note est un peu pitoyable.

Le changement de point de vue qui est l'objet du différend tient au rôle des axiomes de la géométrie. Pour le point de vue moderne (défendu par Poincaré par exemple), ils ne sont que *"des définitions déguisées"* et *"une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode".* Il s'agit là d'une véritable rupture épistémologique. Les mathématiques ne sont pas là seulement comme modèles suggérés par l'espace environnant mais doivent se développer pour elles-mêmes.

Ce point de vue sera systématisé par Georg Cantor (1845-1918) et David Hilbert (1862-1943) dans leurs travaux sur les fondements de la géométrie publiés au tournant du siècle.

Controverses en philosophie et dans les arts autour des nouvelles géométries

Une des dimensions de la controverse autour des nouvelles géométries qui mérite un moment d'attention concerne la littérature et la philosophie. Dès 1860, de nombreux efforts sont faits pour vulgariser ces géométries. Cela correspond en philosophie à une période de contestation de l'a priori kantien et à l'avènement d'un positiviste extrêmement étroit. On trouve des traces de ce débat en France dans *La Revue philosophique* et *La revue de métaphysique et de morale*. Nous avons déjà mentionné la place prise par Poincaré dans ces efforts de vulgarisation. Mais on trouve aussi dans *"Les frères Karamazov"* de Dostoïevski (1821-1881) une discussion assez enflammée sur la géométrie non-euclidienne. Dans les traités de pataphysique de Jarry, on trouve aussi un certain nombre de développements directement liés à l'évolution des géométries non-euclidiennes.

Dans l'art de la fin du XIXème siècle et du début du XXème siècle, on trouve aussi trace d'une certaine influence de cette problématique. En fait aborder cette nouvelle géométrie dans l'art apparaît alors comme une occasion de manifester un rejet de la tradition ; cela semble souvent la motivation principale. Il y a aussi une autre piste : beaucoup d'artistes ont leur imagination stimulée par l'apparition de la théorie de la relativité, à cause de la modification de la conception de l'espace et du temps qu'elle implique et de la nécessité qu'il y a de penser dans un espace à quatre dimensions. *Albert Einstein* (1879-1955), lui-meme, participe à cet effort de vulgarisation mais il n'est pas le seul puisque Poincaré par exemple consacre à ce problème plusieurs chapitres dans ses livres. Chez les scientifiques, on peut aussi noter le rôle joué par le livre *"Espace, temps, matière"* d'*Hermann Weyl* (1885-1955).

Les efforts pour se représenter la quatrième dimension ont eu des retombées picturales importantes. Puisqu'il faut modifier la géométrie, pourquoi ne pas la prendre non-euclidienne? Ainsi dans *"Le manifeste du cubisme"* de *Gleizes* trouve-t-on un certain nombre de pages où il est explicitement question de géométrie non-euclidienne.

Dans l'œuvre de *Raoul Dufy* on trouve aussi un certain nombre de tableaux de la Tour Eiffel qui se veulent non-euclidiens. L'artiste qui a développé ce point de vue de la façon la plus systématique est *Marcel Duchamp* (1887-1968) qui, à la fois dans des textes théoriques et dans certaines de ses peintures (en particulier *"Les joueurs d'échecs"*) adopte un point de vue non-euclidien. Dans un texte accompagnant ses peintures sur les *Montres molles*, *Salvador Dali* (1904-1989) donne comme soubassement théorique à sa tentative la nécessaire modification de la conception de l'espace-temps et la liberté offerte par les nouvelles géométries.

Certaines peintures de *Vasarelli* engendrent aussi des impressions hyperboliques, et bien entendu *Escher* apporte sa contribution de visionnaire mathématique en étendant aux *pavages hyperboliques* le champ habituel des variations sur le thème des pavages.

Rôle actuel de ces nouvelles géométries

Le rôle des géométries non-euclidiennes ne se limite pas aux aspects géométriques des mathématiques, mais s'étend à la théorie des nombres et à l'analyse. Elles servent aussi de réservoirs de modèles en physique.

Le théorème d'uniformisation des surfaces

L'idée de base de ce théorème est assez simple. Son expression mathématique précise dit que *"sur toute surface fermée, il est possible de définir une des trois géométries fondamentales"*. Le type de géométrie à considérer dépend seulement de son nombre de trous.

Ainsi, si la surface n'a pas de trou, c'est la sphère, et nous savons qu'existe sur elle la géométrie sphérique. La seule façon de fabriquer une nouvelle surface à partir de la sphère consiste à identifier les points antipodaux : on obtient ainsi le *plan projectif réel* (bien que non orientable, cet objet est d'un intérêt fondamental puisqu'il s'identifie à l'espace des directions dans l'espace à trois dimensions).

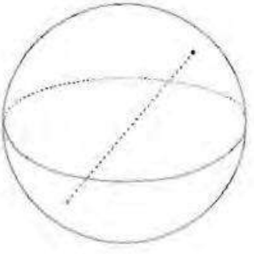


Figure 7. Le plan projectif réel comme quotient de la sphère.

Cette façon de construire une nouvelle surface en identifiant des points est un procédé général : nous allons l'interpréter comme la construction du quotient d'une surface par un sous-groupe de son groupe des isométries. Pour que la surface obtenue par ces identifications n'ait pas de points singuliers, il est indispensable que ce sous-groupe opère discrètement et sans point fixe. Dans le cas du passage de la sphère à l'espace projectif réel, le sous-groupe de O_3 en question a deux éléments : la transformation identique et la multiplication par -1. Il vérifie donc ces deux propriétés.

Dans le cas du plan euclidien, il y a beaucoup plus de sous-groupes discrets du groupe des isométries ce qui donne plus de possibilités pour en fabriquer des quotients. Il y a en effet les *réseaux*, i.e. les sous-groupes du groupe des translations du plan isomorphes à $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. La surface obtenue ainsi est un *tore*. Cela nous amène naturellement à élargir aux parallélogrammes la représentation du tore comme rectangle dont les côtés opposés ont été identifiés (la première identification des côtés donne un cylindre, puis, lors de la deuxième, les cercles formant les deux extrémités du cylindre sont recollés). Là encore, c'est la possibilité de déformer les sous-groupes discrets du groupe des déplacements euclidiens qui offre la possibilité de créer plusieurs métriques localement euclidiennes sur le tore et pourtant non isométriques.

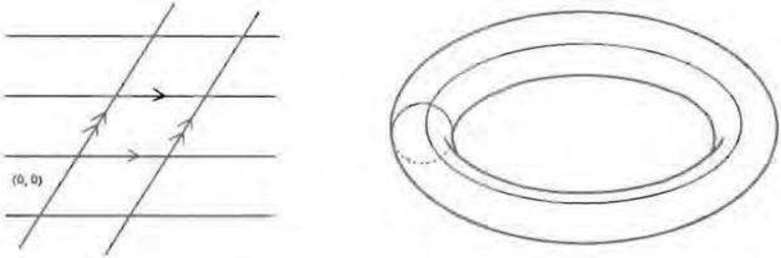


Figure 8. Un réseau dans le plan et le tore en résultant.

Le cas le plus intéressant est celui de l'espace hyperbolique* car on dispose dans ce cas de nombreux exemples de surfaces obtenues comme quotients.

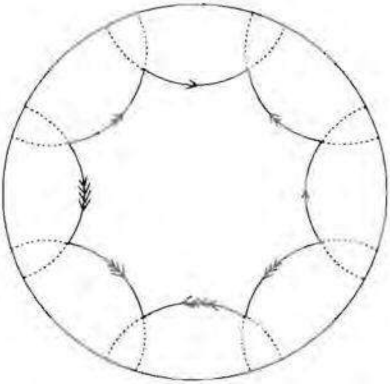


Figure 9. Le domaine fondamental d'un tore à deux trous dans le modèle du disque.

On obtient ainsi des sous-groupes du groupe des isométries qui sont discrets et les quotients sont tous des tores à 2 trous ou plus. Ils se construisent encore en recollant les côtés du *domaine fondamental* (i.e. le plus grand domaine dans lequel le sous-groupe n'a jamais deux points d'une même orbite). Dans le cas présenté dans la Figure 9, le sous-groupe par lequel il faut diviser l'espace hyperbolique est engendré par les symétries (de la géométrie hyperbolique) autour des cercles qui bordent le domaine fondamental.

L'autre point important pour cette discussion est déjà vu par Poincaré : c'est la possibilité d'*un lien avec la théorie des nombres*. En effet la description donnée tout à

* Malgré le choix que nous avons fait pour décrire son groupe des isométries, nous prendrons comme modèle le disque de Poincaré.

l'heure du groupe des isométries comme espace de matrices nous invite à considérer le cas particulier des matrices qui ont des coefficients entiers ou vérifiant des propriétés de congruences arithmétiques. Les sufaces obtenues en formant ces quotients ne sont pas nécessairement fermées.

Le point de vue dynamique en géométrie

Un point de vue est pour le moment absent de l'image que nous avons donnée de la géométrie : c'est l'aspect *dynamique*, qui est un des tournants des mathématiques du XXème siècle, pressenti par Poincaré et Hadamard.

Le point de départ est le suivant : dans l'espace euclidien, il est possible de définir les droites comme les plus courts chemins entre deux quelconques de leurs points. Il est donc naturel de s'intéresser dans des géométries plus générales, où la notion de longueur est bien définie (comme la géométrie riemannienne par exemple), aux plus courts chemins, encore appelés *géodésiques*. L'équation qui permet de définir localement les géodésiques est une *équation différentielle du second ordre*. Ce principe général étend bien ce que nous savons dans le plan euclidien puisque les géodésiques y sont des droites, donc des courbes d'accélération nulle.

Le point un peu subtil est que, pour faire apparaître une dynamique, il ne faut pas penser en termes de mouvements de points, mais en termes de variation de la vitesse. C'est en effet au niveau des vecteurs-vitesse des courbes que se situe la dynamique, puisqu'à ce niveau nous pouvons réduire l'équation différentielle des géodésiques au premier ordre. Cette idée fondamentale a été introduite par Poincaré, et reprise par Hadamard de façon plus systématique. Le flot que définit cette équation différentielle, appelé le *flot géodésique*, consiste donc, à partir d'une position initiale à l'instant zéro qui est un vecteur tangent en un certain point, à associer à l'instant t le vecteur-vitesse de la géodésique déterminée par le vecteur-vitesse initial. L'espace dans lequel vit ce flot est l'espace des vecteurs tangents à la surface. Il est cependant possible de normaliser les courbes pour qu'elles soient parcourues à vitesse constante, ce qui signifie que leurs vecteurs-vitesse sont de longueur constante. L'espace dans lequel il faut donc travailler est finalement un espace à 3 dimensions, deux dimensions pour repérer le point où est attaché le vecteur et une dimension qui donne l'orientation du vecteur unitaire dans le plan tangent.

Ainsi, pour le *plan euclidien*, l'espace à considérer est le *produit du plan par le cercle*. En *géométrie hyperbolique*, c'est le *demi-plan* dont on doit prendre le *produit par le cercle* encore une fois. Quant à la *géométrie sphérique*, on trouve pour ce cas que l'espace adapté est formé par le *groupe des rotations de l'espace euclidien à trois dimensions*.

Pour penser les choses dynamiquement, il nous a fallu passer de 2 à 3 dimensions. Il y a une difficulté supplémentaire si l'on veut se représenter ce qu'est l'espace des vecteurs tangents de longueur 1 à une surface plus compliquée comme un tore à plusieurs trous. Il faut en effet une opération plus complexe que seulement prendre le produit par le cercle : pour rappeler le fait que l'opération consiste bien à prendre un produit localement (mais pas globalement comme nous avons déjà pu le constater dans le cas de la sphère), on lui donne aujourd'hui le nom d'*espace fibré unitaire*.

La dynamique que définit le flot géodésique dans le fibré unitaire d'un tore ayant au moins deux trous est très compliquée. Elle vérifie une propriété importante, dite *d'Anosov*, que l'on peut décrire ainsi : l'espace qui a 3 dimensions se décompose en 3 directions, la première étant celle du mouvement ; le long de la seconde, transverse au mouvement, les longueurs se contractent et le long de la troisième, encore transverse au mouvement, les longueurs se dilatent.

En géométrie hyperbolique, cette propriété se voit très bien : elle est illustrée par la notion d'horocycle. Il est plus commode de la discuter dans le modèle du disque de Poincaré. Plaçons-nous en un point d'une géodésique que nous supposons parcourue dans un sens bien déterminé (rappelons que dans ce modèle de l'espace hyperbolique, il s'agit d'un cercle orthogonal au cercle à l'infini). Il y a alors, en plus de la géodésique elle-même, deux cercles du plan qui sont distingués et appelés les *horocycles* : ce sont les cercles passant par le point où nous sommes et tangents au cercle à l'infini aux deux points où la géodésique atteint l'infini. Du point de vue dynamique, il faut décrire les horocycles dans le fibré unitaire, ce qui peut se faire ainsi : le point où nous sommes est le vecteur-vitesse de la géodésique parcourue à vitesse-unité dans le sens croissant, et les courbes obtenues en prenant les vecteurs unitaires normaux aux horocycles qui passent par le vecteur-vitesse de la géodésique. Les deux directions que nous venons de distinguer dans le fibré unitaire sont celles qui sont contractantes (pour l'horocycle associé au point à l'infini positif sur la géodésique) et dilatantes (pour l'autre horocycle). Du point de vue dynamique, ces directions sont appelées les variétés *stables* et *instables*.

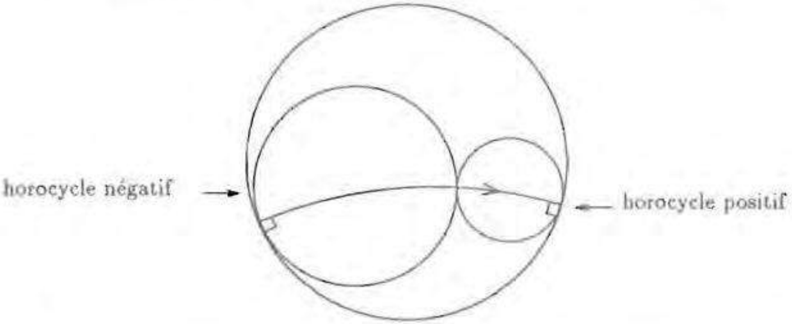


Figure 10. Une géodésique hyperbolique et les horocycles qui lui sont attachés.

Ce système dynamique a des propriétés extraordinaire d'*ergodicité* (cf. [1]), ce qui signifie qu'il est extraordinairement mélangeant et extrêmement chaotique. La définition mathématique rigoureuse s'énonce ainsi : *toute variable définie dans cet espace a une moyenne temporelle* (obtenue en prenant la moyenne des valeurs de la fonction le long de l'orbite de la dynamique) *égale à sa moyenne spatiale.* Une formulation parlante possible est de dire qu'il y a perte complète de mémoire de l'histoire le long de la trajectoire puisque le fait de suivre la trajectoire revient à moyenner dans tout l'espace.

Cette notion d'ergodicité se rencontre en *mécanique statistique* pour les systèmes ayant un grand nombre de particules, en dynamique des gaz par exemple. En effet dans un gaz en équilibre les trajectoires des molécules du gaz sont tellement chaotiques que celles-ci "voient" une moyenne spatiale de ce qui se passe dans le gaz. Les physiciens ont considéré longtemps que ces propriététes d'ergodicité étaient attachées aux modèles à un très grand nombre de degrés de liberté. Ces systèmes sont très instables, donc presqu'imprévisibles, et des approches probabilistes sont a priori nécessaires pour en étudier le comportement. La surprise est de retrouver ces propriétés dans des systèmes ayant un petit nombre de degrés de liberté. Le modèle que les physiciens privilégie, à la suite des travaux de *Kolmogorov* et *Sinai*, est celui des *billards concaves* : on part d'un billard dans lequel on applique les lois habituelles de la réflexion, et, si le bord est concave, des trajectoires proches avant réflexion peuvent s'écarter ensuite beaucoup. Les surfaces fermées à courbure négative montrent une sensibilité analogue aux conditions initiales, et sont devenues de ce fait le prototype des études des physiciens intéressés par la mécanique statistique. Comme cette propriété est directement liée à leur caractère hyyperbolique, nous voyons donc *cette géométrie a priori introduite comme un défi à la Nature servir de modèle pour des systèmes physiques.*

Les mathématiciens ne se sont pas arrêtés à la dimension 2 et ont aussi considéré des géométries hyperboliques en dimension 3 et plus. On y rencontre des phénomènes intéressants dont certains sont des extensions de ce qu'on constate sur les surfaces, mais d'autres sont nouveaux. Ainsi, il y a encore unicité de la géodésique joignant deux points quelconques, comme *Elie Cartan* l'a montré, les propriétés dynamiques comme l'ergodicité persistent aussi. Par contre, dès la dimension 3, il y a un phénomène radicalement nouveau : *le comportement à l'infini capture toute la géométrie* ce qui est faux en dimension 2. Il est devenu traditionnel d'appeler cette propriété la *rigidité*. Son étude est encore un sujet très actif d'étude.

Un aperçu sur deux résultats récents en géométrie hyperbolique

Terminons par une évocation rapide de deux résultats très récents sur des questions liées à la géométrie hyperbolique.

Différentiabilité et algébricité des feuilletages d'Anosov

Une jonction assez extraordinaire de la géométrie hyperbolique avec l'analyse, connue depuis Poincaré, a reçu récemment une illustration spectaculaire. Nous avons déjà parlé des variétés stables et instables qui existent dans les systèmes dynamiques d'Anosov. En géométrie hyperbolique, ils s'identifient aux horocycles qui donnent lieu dans le fibré unitaire à des courbes lisses qui s'empilent les une sur les autres de façon lisse aussi. Lorsqu'on considère des métriques à courbure variable, ces variétés stables et instables continuent à être lisses mais leur empilement devient a priori très erratique.

Un très beau résultat à ce sujet vient d'être obtenu en 1991 en dimension plus grande que 2 par *Benoit*, *Foulon* et *Labourie* : "*si l'empilement des variétés stables et instables est régulier, alors la géométrie de l'espace est hyperbolique ou une généralisation algébrique de la géométrie hyperbolique*" (introduite par Elie Cartan et appelée géométrie des espaces *symétriques*). La preuve (difficile !) est un mélange exemplaire de géométrie différentielle, d'analyse et de théorie des systèmes dynamiques.

Géométrie hyperbolique et théorie des nœuds

Pour terminer, il est intéressant de donner une application de la géométrie hyperbolique à la théorie des nœuds. Pour un mathématicien, un nœud est une application du cercle dans l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$, et les topologues ont appris depuis longtemps que déterminer si deux nœuds sont les mêmes à déformation près (i.e. sans couper le nœud) est un problème difficile. Une bonne façon pour l'aborder est d'*étudier le complémentaire du nœud dans* $\mathbb{R}^3$, bien que cette approche paraisse à première vue paradoxale.

Si le nœud est assez compliqué, un théorème extraordinaire, démontré par *William Thurston* il y a moins d'une dizaine d'années, dit que *"le complémentaire d'un tel nœud possède une géométrie hyperbolique"* (à trois dimensions bien sûr). Alors, grâce aux théorèmes de rigidité que nous avons évoqués au paragraphe précédent, on prouve que le nœud est caractérisé par le groupe fondamental de ce complémentaire, qui est un groupe discret, sous-groupe du groupe des isométries de l'espace hyperbolique de dimension trois qui s'identifie, lui, au groupe $Sl_2(\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients *complexes* et de déterminant 1.

On peut faire opérer ce groupe discret sur l'espace à l'infini de l'espace hyperbolique de dimension 3. Celui-ci s'identifie au bord de la boule de dimension 3 (l'analogue du modèle du disque de Poincaré dans cette dimension), qui est donc une sphère de dimension 2. Dans cet itinéraire, nous nous rapprochons de plus en plus d'un des domaines créés par Poincaré, à savoir l'étude de certains sous-groupes discrets de $Sl_2(\mathbb{C})$, les groupes *fuchsiens*, domaine d'une grande complexité, dans la compréhension duquel des progrès substantiels ont été faits récemment, essentiellement par des méthodes géométriques.

Bibliographie

Les références [3], [4], [5], [7] *sont générales, et peuvent être utilisées pour une étude un peu plus approfondie du sujet de cette conférence. Elles sont malheureusement toutes en anglais.*

[1] ARNOLD V.I., AVEZ A., *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Benjamin, New York, 1968.

[2] BOLYA F.W., *Tentamen juventutem studiosam in elementera Mathaseos... introducendi*, avec un appendice de János Bolya : *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibensi a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei a priori haud unquam decidenda independentem : adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*, (1831).

[3] *János Bolya Appendix. The theory of spaces*, Akad. Kiadó, Budapest, 1987.

[4] BONOLA R., *Non Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1955.

[5] COXETER H.S.M., *Non Euclidean Geometry*, Toronto, 1957.

[6] GAUSS, C.F., RIEMANN, B., MINKOWSKI, H., *Gaussche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt*, Teubner Arkiv zur Mathematik, Band 1, Leipzig, 1984.

[7] GREENBERG M. J., *Euclidean and non Euclidean geometries : development and history*, Freeman and Co, San Francisco, 1974.

[8] HENDERSON L.D., *The fourth dimension and non Euclidean geometry in modern arts*, Princeton University Press, Princeton, 1981.

[9] KAGAN V., *Lobachevski*, Mir, 1955.

[10] KLEIN F., *Le programme d'Erlangen*, Collection "Discours de la Méthode", Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[11] LOBACHEVSKI N., *La théorie des parallèles*, Coubron éd., Monom, Paris, 1980.

[12] POINCARÉ H., *La valeur de la science*, Bibliothèque de Philosophie scientifique, Flammarion, Paris, 1909.

[13] POINCARÉ H., *La science et l'hypothèse*, Bibliothèque de Philosophie scientifique, Flammarion, Paris, 1909.

[14] POINCARÉ H., *Des fondements de la géométrie*, Bibliothèque de synthèse scientifique, Chiron, Paris (1922) .

[15] SERRES M., *Les Origines de la Géométrie*, Flammarion, Paris, 1993.

NICOLAS LOBATCHEVSKY.