LA PENSÉE MATHÉMATIQUE DANS L'HISTOIRE ET DANS LA CLASSE

Evelyne BARBIN
IUFM de Créteil
IREM Paris-Nord

«J'inclinerais à dire : les mathématiques sont une *mixture BIGARREE* de techniques de démonstrations.- Et c'est là-dessus que repose leur applicabilité multiple et leur importance».

Ludwig WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, p.161.

Cette analyse a pour objet "la pensée mathématique", et non pas "les mathématiques". Pourquoi ? A quoi je m'intéresse ? Je voudrais tout de suite préciser mon propos. Je m'intéresse à la "pensée mathématique" en tant que *processus*, c'est-à-dire que je me demande comment nous formons les concepts, comment nous les transformons dans un processus de connaissance, alors que "les mathématiques" renvoient à un *produit* fini où les concepts sont immuables, figés. Je me demande comment nous comprenons, c'est-à-dire que je me place sur le terrain de la signification de concepts "en devenir".

Autrement dit, "les mathématiques" renvoient souvent aux idées de vérité, d'immuabilité des concepts et d'universalité. Alors qu'en m'intéressant à "la pensée mathématique", je voudrais mettre en rapport ces idées avec celles de sens, de changement de concepts et de diversité.

sens	—	vérité
changement des concepts	—	immuabilité des concepts
diversité	—	universalité

L'année dernière notre Congrès de l'APMEP avait pour thème "Mathématiques sans frontières" et Gilbert Arsac nous parlait de l'universalité des mathématiques. Cette année les choses changent. Notre Congrès a pour thème "Mathématiques européennes" et je parlerai de la diversité des savoirs mathématiques.

Les questions que nous aborderons ici concernent la géométrie : nous nous intéresserons d'abord à la formation et au sens des objets géométriques, puis ensuite au sens de la démonstration géométrique. Pour traiter ces questions épistémologiques, je me reporterai à l'histoire des mathématiques et à la classe de mathématiques.

La formation des objets géométriques

Le premier exemple que je prendrai est historique. Nous savons que les Ioniens, au VI$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C., savaient mesurer la distance d'un bateau en mer. Nous nous trouvons dans la situation d'une distance inaccessible : il est impossible de reporter sur l'eau un bâton qui servirait d'unité de mesure.

Un problème de distance inaccessible

Comment les Ioniens ont-ils pu procéder ? En montant au haut d'une tour en bord de mer, il est possible à l'aide d'un quadrant d'opérer une visée. Un quadrant est constitué d'un quart de cercle et d'une partie flexible permettant d'effectuer une visée en direction du bateau. Ensuite, on peut se retourner vers la terre ferme et pointer, avec la même visée, un endroit dont on pourra déterminer la distance à la tour (fig.1).

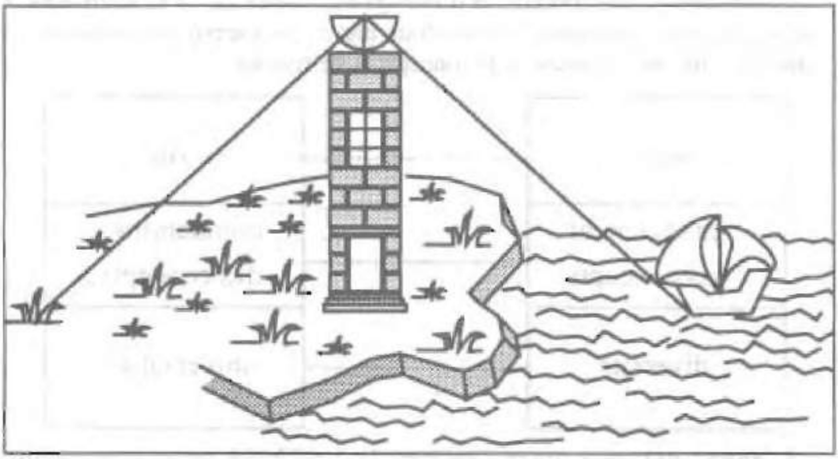


fig.1

Ainsi, nous juxtaposons à la situation problématique du départ une figure géométrique (fig.2).

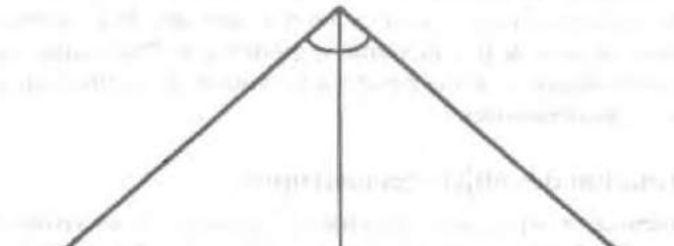


fig.2

Le rôle de cette figure est de schématiser cette situation : les segments représentent des rayons visuels -sans épaisseur- et les angles correspondent à des visées. Lorsque nous concluons que l'égalité des visées entraîne l'égalité des distances, nous raisonnons sur cette figure et nous énonçons une proposition concernant la configuration "angle dans un triangle". Ainsi, nous procédons d'une pensée géométrique qui structure le réel et qui nous donne prise sur lui. Nous avons, à la fois, construction d'objets géométriques, construction d'une réalité et genèse d'un raisonnement. Concepts géométriques et raisonnement prennent sens dans une même situation.

Le second exemple que je prendrai est le théorème de Thalès. J'étais en septembre dernier dans la classe de troisième d'un collègue parisien qui travaille à l'INRP, Claude Martin. Je précise que je n'ai pas participé à la conception de cette séquence d'enseignement, pour laquelle j'étais uniquement observatrice[1]. Le collègue a proposé aux élèves le problème de la hauteur de la pyramide, il leur a demandé : « Thalès a mesuré la hauteur de la pyramide en s'aidant de l'ombre de la pyramide et de sa propre ombre : comment a-t-il fait ?» Il s'agit encore ici d'un problème de distance inaccessible.

Aussitôt un élève a répondu : «si, par exemple, l'ombre de la pyramide est double de celle de Thalès, alors la hauteur de la pyramide est double de la taille de Thalès». L'idée de proportionnalité est là, elle est exprimée aussitôt par certains élèves et expliquée correctement avec les données numériques proposées par le professeur. Mais le professeur leur demande alors de schématiser la situation en représentant les différentes longueurs qui interviennent dans la solution. C'est ici que les choses deviennent intéressantes.

La géométrisation comme schématisation

Dans un groupe d'élèves, une fille a commencé à faire ce dessin :

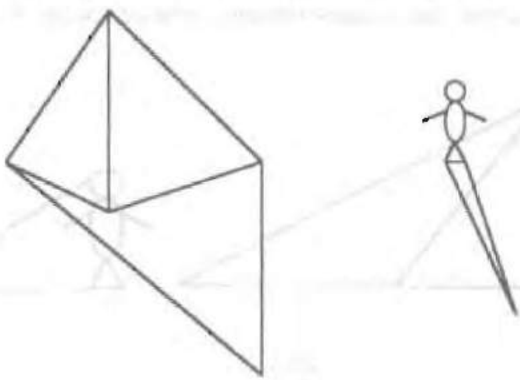


fig.3

Puis elle était bloquée. Elle a alors demandé à un camarade : "Comment est l'ombre ? Face à toi ou inclinée ?" qui lui a répondu : «Peu importe, si c'est le soir ou le matin». La question qui se posait alors dans

1-pour la préparation d'une séance de l'Université d'automne sur la formation des formateurs en mathématiques de Plestin les Grèves (octobre 1992).

toute la classe était : «Comment schématiser ?. Le professeur a bien indiqué qu'il ne fallait pas faire une œuvre d'art, mais ce qu'il demandait était bien plus étrange : il fallait aplatir la situation. Je vous demande d'imaginer cette situation : les pyramides et tout leur volume, le soleil et l'ombre sur le sable. Vous pouvez ainsi apprécier le saut qui conduit de cette image au schéma dessiné au bout d'un certain temps par une élève au tableau :

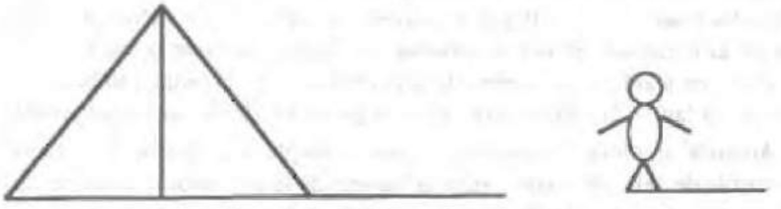


fig.4

Voilà bien un schéma, mais les rayons du soleil ne sont pas dessinés. Le professeur demande à l'élève de les représenter. Celle-ci dessine un soleil et des rayons, mais ils ne sont pas parallèles. Le professeur doit rappeler que les rayons du soleil sont parallèles, et il demande à une autre élève de rectifier le schéma et de dessiner des parallèles. Cette dernière s'exécute en dessinant un autre soleil. Le professeur doit alors préciser que les droites sont parallèles au même moment, pour que la classe obtienne enfin ce schéma (fig.5) :

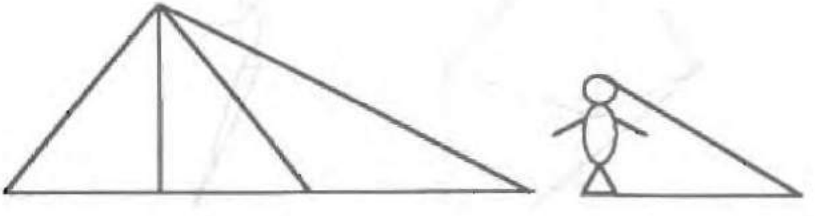
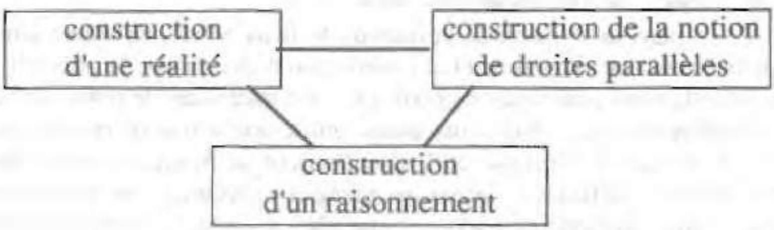


fig.5

Le schéma comme modèle explicatif et structuration du réel

Arrêtons-nous ici pour nous demander : quel est le rôle de ce schéma géométrique ? On peut dire qu'il a un rôle d'explication. En effet, les élèves ont eu d'emblée l'idée d'une proportionnalité, mais le schéma permet d'expliquer cette proportionnalité. Pour cela, il faut en même temps : la construction d'une notion, la notion de droites parallèles, et la construction d'un raisonnement qui relie parallélisme et égalité des rapports. La notion de droites parallèles ne pré-existe pas à la réalité, elle structure la réalité pour nous permettre de résoudre un problème, celui d'une distance inaccessible, et d'expliquer une solution. Il y a donc concomitance entre :



Le schéma est une empreinte[2] qui permet de construire une réalité. Cette conception des rapports entre géométrie et réalité s'oppose à la fois à une conception réaliste et idéaliste des mathématiques :

Selon la conception *réaliste*, nous *découvrons* les objets, les objets géométriques préexistent dans le réel.

Selon la conception *idéaliste*, nous *inventons* les objets géométriques, les objets s'appliquent au réel.

Selon une troisième conception, que je qualifierai de *constructiviste*, nous *construisons* les objets géométriques, les objets structurent le réel.

D'après cette dernière conception, la réalité n'est pas un donné : elle est aussi construction humaine. Nous construisons une réalité en structurant le réel, c'est-à-dire en retenant et en reliant entre eux un certain nombre d'éléments du réel. Cette structuration du réel répond à certains choix qu'opère le mathématicien face à un problème et aux contraintes qu'impose le réel[3].

Le schéma constitue un modèle explicatif, à condition de bien opérer la

2- GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*.

3- Alain BOYER compare le mathématicien, face à la réalité, à un alipiniste face à une paroi : l'alpiniste peut emprunter un nombre indéfini de voies pour arriver au sommet, mais il doit cependant tenir compte des accidents et appuis qu'offre la paroi.

concordance schématique entre les objets géométriques et les objets représentés : l'ombre de la pyramide, l'ombre de Thalès, Thalès et la hauteur de la pyramide. C'est ce qu'a demandé ensuite le professeur. Ici une nouvelle difficulté s'est présentée : pour mesurer la hauteur de la pyramide, il faut encore supposer que la pyramide et Thalès sont représentés par des segments.

Nous pouvons dire, avec Gonseth, que les objets géométriques sont, dans un premier temps des "notions schématiques" et "idéales" de la réalité, qui permettent de rendre compte d'une situation problématique. Gonseth écrit : "les notions géométriques sont des images idéales appuyées sur le réel objectif, des représentations schématiques dont le sens n'est intelligible qu'en tenant compte de la réalité qu'elles visent"[4].

Il y a dans la situation de la hauteur de la pyramide, en même temps, construction d'un raisonnement et construction d'une notion : le parallélisme explique la conservation des rapports. Or, il est intéressant de remarquer que les mathématiciens chinois n'ont jamais utilisé une notion de droites parallèles, ni énoncé de théorème de Thalès. Pourtant, ils maniaient parfaitement les triangles semblables. Pour eux, les triangles semblables sont des triangles pour lesquels un rapport numérique entre côtés se conserve. Comment expliquer cette conservation ?

La démonstration comme explication

Dans le problème XV du livre 9 du *Jiuzhang suanshu*, il est demandé de déterminer la longueur d'un carré inscrit dans un triangle rectangle. Le commentateur Liu Hui, vers 270 avant J.-C., explique la formule qui donne la solution de deux façons : d'une part, à l'aide de la similitude des triangles, d'autre part par découpage et collage de la figure.

Le triangle est décomposé en trois figures colorées en trois couleurs : les lettres V, J, R représentent ici les couleurs vert, jaune et rouge utilisées par Liu-Hui[5] (fig.6). Notons a et b les longueurs des côtés du triangle, et c la longueur du côté du carré inscrit. L'aire du rectangle composé de deux fois le triangle est égale à ab, mais en empilant ses composants, le rectangle se recompose en un rectangle d'aire $c\ (a+b)$. Nous obtenons ainsi le résultat :

$$c = \frac{a\,b}{a+b} \ .$$

4- GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, p.87.

5- MARTZLOFF, Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises, in Commission inter-IREM Epistémologie, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, p.151

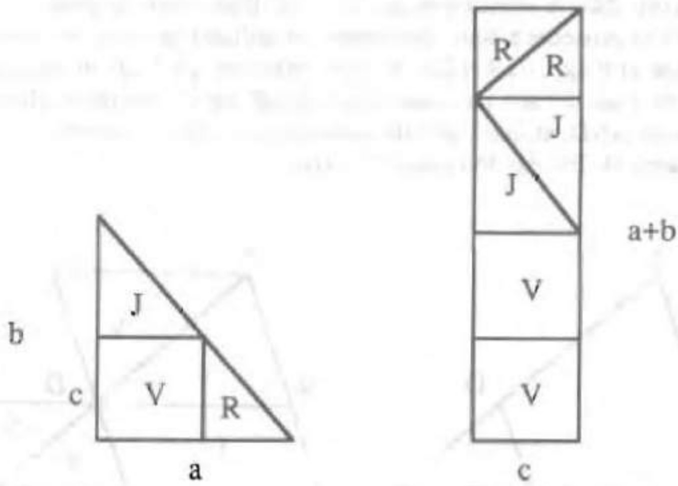


fig.6

Quels outils géométriques sont nécessaires pour obtenir une démonstration qui n'utilise pas la technique "découpage et collage", c'est-à-dire une démonstration de type euclidien ? Nous pouvons, par exemple, compléter le triangle ABC en menant du point A la parallèle à (BC) et du point C la parallèle à (AB), et en prolongeant (DE) et (EF) (fig.7). La démonstration nécessite alors les théorèmes d'égalité des angles déduits de l'axiome des parallèles d'Euclide, et le premier cas d'égalité des triangles. Je dirais que la technique "découpage et collage" est une technique de démonstration qui permet de se passer, d'une certaine façon, de la théorie euclidienne des parallèles.

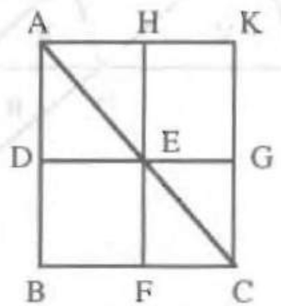


fig.7

Peut-on obtenir une démonstration par découpage et collage de l'égalité des rapports dans la situation du théorème de Thalès dans le triangle (fig.8)? Nous allons procéder à deux découpages en utilisant aussi les trois couleurs vert, jaune et rouge (fig.9 et fig.10). Nous obtenons que l'aire du quadrilatère NDEB est égale à l'aire du quadrilatère ADME par découpage et glissement du triangle AND, et que l'aire du quadrilatère DTEC est égale à l'aire du quadrilatère DCES par découpage et collage.

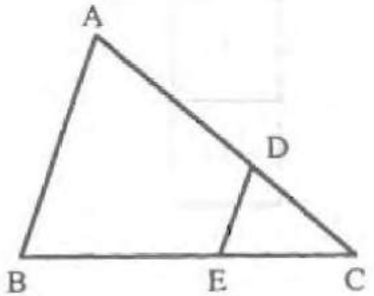


fig.8

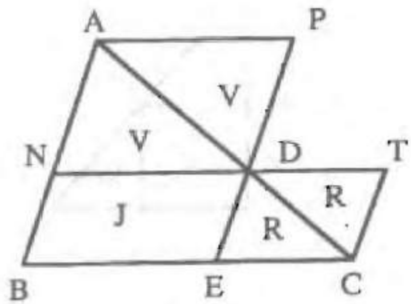


fig.9

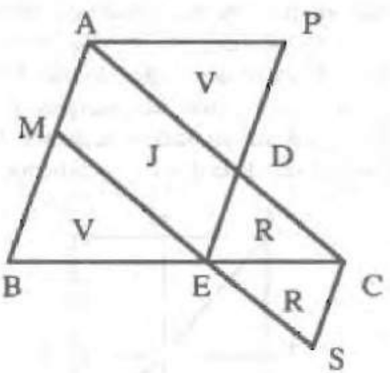


fig.10

Pour obtenir les aires des quadrilatères NDBE et DTEC, nous pouvons encore procéder à un découpage qui utilise les couleurs bleue, marron et orange (fig.11). Nous avons que l'aire NDBE est égale à l'aire du rectangle HKBE et que l'aire DTEC est égale à l'aire du rectangle KLEC.

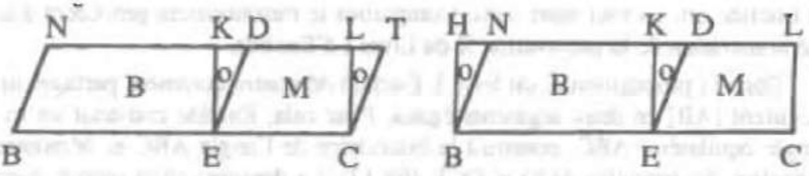


fig.11

Pour continuer, nous devons dire que le rapport des aires des rectangles HKBE et KLEC est égal au rapport des côtés BE et EC, car alors :

$$\frac{\text{aire } NDEB}{\text{aire } DTEC} = \frac{BE}{EC}.$$

De même, nous obtiendrions que :

$$\frac{\text{aire } ADME}{\text{aire } DCES} = \frac{AD}{DC}, \text{ et ainsi } \frac{BE}{EC} = \frac{AD}{DC}.$$

La démonstration du théorème de Thalès donnée par Euclide[6] utilise également les égalités d'aires, mais elle ne procède pas par découpage, glissement et collage. Elle nécessite la théorie des parallèles et les cas d'égalité des triangles. Pour obtenir que le rapport des aires de deux parallélogrammes de même hauteur est égal au rapport de leurs bases, point obligé du raisonnement, Euclide utilise la théorie des grandeurs d'Eudoxe qui est développée au Livre V des *Eléments* [7].

La signification de la démonstration d'Euclide a un tout autre sens que la précédente. Nous allons aborder la question de la signification euclidienne de la démonstration et celle de la transformation du sens des objets géométriques à propos d'une démonstration plus élémentaire que celle du théorème de Thalès.

Le sens de la démonstration géométrique

Revenons au problème de la distance d'un bateau en mer. Lorsque nous disons que l'égalité des visées entraîne l'égalité des distances, nous faisons un raisonnement déductif qui indique un lien causal ou phénoménal[8]. Ce raisonnement a une valeur explicative. Les démonstrations des *Eléments*

6 - Proposition 2 du Livre VI des *Eléments*.

7 - Sur la démonstration euclidienne du théorème de Thalès, on peut se reporter à BKOUCHE, *Autour du théorème de Thalès*, à paraître.

8 - en reprenant l'expression de GONSETH, in *Les mathématiques et la réalité*.

d'Euclide ont un tout autre sens. Comparons le raisonnement précédent à la démonstration de la proposition X du Livre I d'Euclide.

Dans la proposition X du livre I, Euclide démontre comment partager un segment [AB] en deux segments égaux. Pour cela, Euclide construit un triangle équilatéral ABC, construit la bissectrice de l'angle ABC et démontre l'égalité des triangles ACD et DCB (fig.12). La démonstration repose donc sur trois arguments qui s'appuient eux-mêmes sur des propositions démontrées précédemment, respectivement les propositions I, IX et IV du Livre I. Quel est le sens de cette démonstration ? Il s'agit pour Euclide, non pas d'*expliquer* pourquoi D est le milieu de [AB], mais de *montrer l'existence indubitable* de ce milieu.

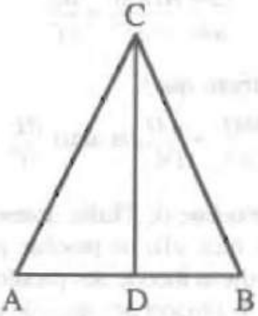


fig.12

La démonstration comme critère d'existence et de vérité

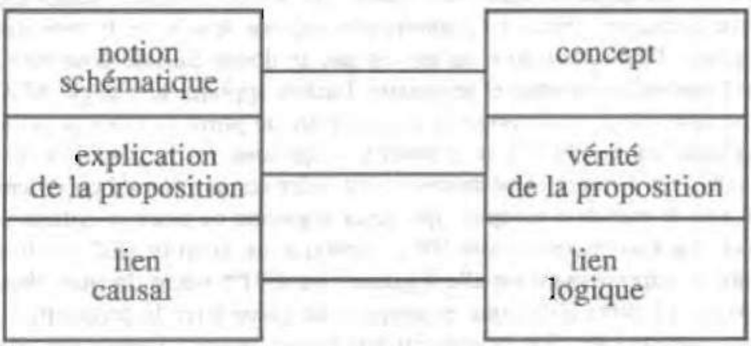
Pourquoi vouloir démontrer l'existence du milieu d'un segment ? Quel est le sens de cette exigence ? Affirmer que l'on peut toujours diviser un segment en deux permet à Euclide de concevoir le segment géométrique comme un continu toujours divisible. La conception d'Euclide du segment comme un continu toujours divisible n'est pas partagée à l'époque : les atomistes la rejettent. Cela explique sans doute les attaques de Zénon d'Elée contre la proposition I du Livre I, que mentionne Proclus dans ses commentaires du Livre I des *Eléments* d'Euclide[9].

Euclide a besoin de montrer que le milieu d'un segment existe, qu'il est vrai que l'on peut toujours partager un segment en deux. La démonstration doit être un critère de vérité. L'explication en terme de lien causal ou phénoménal est insuffisante, seule la démonstration en tant que lien logique peut donner un caractère nécessaire à la proposition : les choses sont ainsi, et en

9 - PROCLUS, *les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*, p.190

plus elles ne peuvent être autrement. C'est seulement en comprenant le sens de la démonstration d'Euclide, comme moyen de prouver une existence indubitable et nécessaire, et de distinguer le vrai du faux, que nous pouvons comprendre le sens de la méthode déductive. Gonseth écrit : "Ce qui la distingue [la méthode déductive] et ce qui en fait en même temps l'incomparable mérite, c'est l'effort d'abstraction qui la met ensuite en mesure de n'envisager les objets de la pensée que sous l'angle simplificateur de l'existence, et les pensées elles-mêmes sous l'angle schématique du vrai et du faux"[10].

Dans la démonstration de la proposition X du Livre I des *Eléments* d'Euclide le segment géométrique a une nouvelle signification. Nous pouvons exprimer ce changement de statut des objets géométriques dans la démonstration euclidienne, en disant que nous passons d'une notion de droite, qui prend sens dans une situation de schématisation, à un concept de droite, qui prend sens dans un édifice logique.



Mais le concept de droite chez Euclide reste un objet schématique, en ce sens qu'Euclide s'appuie parfois sur l'évidence topologique d'une figure pour raisonner. Il en est plus de même dans la géométrie axiomatique d'Hilbert[11].

Comment prouver la vérité d'une proposition? La vérité d'une proposition sera consentie par un interlocuteur à condition qu'il accepte les mêmes règles de démonstration que vous. Avant d'être une légitimation de connaissances, la démonstration est une légitimation de procédures[12]. Elle indique d'abord ce que nous estimons devoir conduire à une vérité. Autrement dit,

10- GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, p.339

11 - HILBERT, *Les fondements de la géométrie*

BOUVERESSE, *Le pays des possibles*, Introduction pour fournir une démonstration, il importe d'abord de savoir quels sont les moyens que nous nous donnons comme légitimes pour dire que nous avons démontré. Wittgenstein écrit : "Toute preuve montre non seulement la vérité de la proposition prouvée, mais encore le fait qu'elle se laisse prouver *de cette façon*"[13].

La démonstration comme choix de procédures

La question "Comment démontrez-vous telle proposition ?" n'a pas de sens si vous ne dites pas aussi quels sont les moyens légitimes de démontrer. Ces moyens ne pré-existent pas, il faut se les donner. Examinons de ce point de vue les propositions sur lesquelles s'appuient Euclide pour démontrer la proposition X.

Dans la proposition IV, Euclide démontre que "Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun". Nous reviendrons plus loin sur le sens de la formulation d'Euclide. Intéressons nous au moyen que se donne Euclide pour dire que cette proposition est vraie et nécessaire. Euclide applique le triangle AEZ sur le triangle ABC : si le point A est posé sur le point D alors le point B s'applique sur le point E et le point C s'applique sur le point Z (fig.13). Euclide s'est donné comme axiome, c'est à dire comme énoncé qu'il demande à tout le monde d'accepter, que deux segments ne peuvent enfermer un espace. Par conséquent la base [BC] s'applique sur la droite (EZ). Cette procédure de superposition est-elle légitime? Au XVIème siècle, Jacques Peletier du Mans l'estime illégitime et propose de considérer la proposition IV comme un axiome[14]. Par la suite Euclide l'évite, quitte à fournir des raisonnements complexes. Il évite, en fait, toute procédure qui suppose un mouvement.

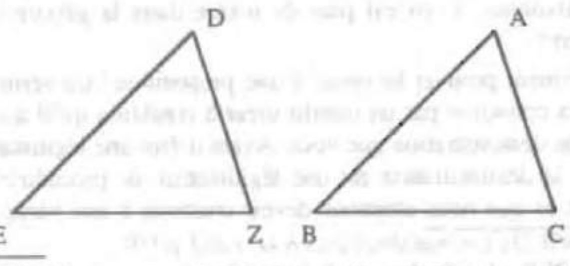


fig.13

13 - WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, p.172

14 - PELETIER du MANS, *Eléments géométriques d'Euclide*, p.10.

Ainsi, dans la proposition V, Euclide démontre que dans un triangle isocèle (c'est-à-dire qui a deux côtés égaux) les angles sur la base sont égaux. Il pourrait tout simplement utiliser le théorème IV par retournement du triangle ABC (fig.14) : puisque AB égale AC, AC égale AB, et les angles au sommet sont égaux on peut conclure que les triangles sont égaux, ainsi que les angles à la base. Ce serait utiliser un mouvement dans la géométrie, comme dans la procédure de superposition. Euclide procède autrement (fig.15). Il prend BZ égal à CH, puis il démontre l'égalité des triangles ABH et ACZ, ce qui implique l'égalité des angles ABH et ACZ, et démontre ensuite l'égalité des triangles BCZ et CBH, ce qui implique l'égalité des angles BCZ et CBH. Ainsi, écrit-il, les angles restants ABC et ACB sont égaux.

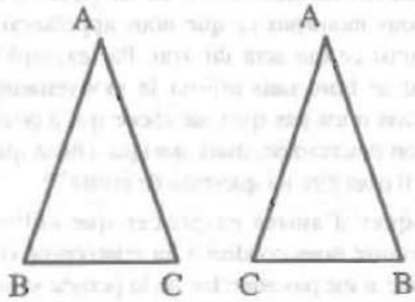


fig. 14

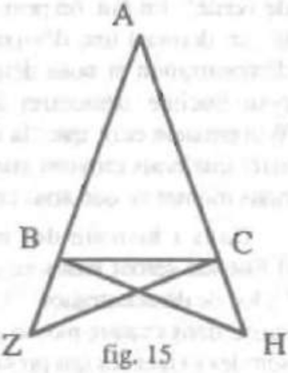


fig. 15

Cette proposition permet de démontrer par l'absurde, à la proposition VII, qu'il est impossible que de deux points distincts C et D, situés d'un même côté d'un segment [AB], on construise des segments [AC] égal à [AD] et [BC] égal à [BD] (fig.16). Cette nouvelle proposition lui permet de démontrer encore par l'absurde, à la proposition VIII, que des triangles ayant des côtés égaux sont égaux sans utiliser cette fois une procédure de superposition (fig.17).

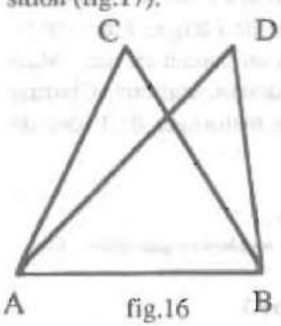


fig.16

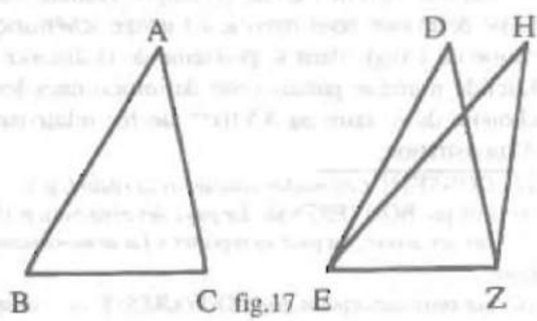


fig.17

La proposition VIII va lui permettre de démontrer, à la proposition IX, l'existence de la bissectrice d'un angle, c'est à dire la possibilité de toujours diviser un angle en deux angles égaux. Enfin, nous l'avons dit, l'existence de la bissectrice d'un angle permet d'affirmer l'existence du milieu d'un segment, sur laquelle se fonde la conception du segment comme continu toujours indivisible.

La lecture des dix premières propositions d'Euclide nous permet de voir que les procédures utilisées par le géomètre correspondent à des choix. Il n'y a pas de pré-établi, mais des moyens que l'on se donne ou non. Il n'y a pas une universalité de la démarche, mais une diversité de procédures possibles. Cette conception, entraîne comme l'écrit Gonseth, une dégradation de l'idée de vérité[15]. En fait, on peut dire que la démonstration donne un sens à la vérité : en donnant une démonstration, nous montrons ce que nous appellerons démonstration et nous déterminons ainsi ce qui sera dit vrai. Par exemple, pour Euclide, démontrer doit pouvoir se faire sans utiliser le mouvement. Wittgenstein écrit que "la démonstration n'est pas quelque chose qui a pour effet que nous croyons une proposition déterminée, mais quelque chose qui nous montre ce que nous croyons, - s'il peut être ici question de croire"[16].

Dans l'histoire des mathématiques d'autres exigences que celles d'Euclide seront mises en avant : l'histoire nous conduit à un relativisme de l'idée de démonstration[17]. Ce relativisme n'est pas anarchie de la pensée si on saisit, dans chaque moment de l'histoire, ce qui fait sens, c'est-à-dire quelles sont les exigences qui président aux choix des procédures.

De ce point de vue, la démonstration n'est pas une exploration de concepts immuables dont les caractères pré-existent[18]. Au contraire, la signification des concepts est modifiée par les démonstrations. Pour illustrer ceci, poursuivons la lecture d'Euclide et intéressons nous au concept d'angle.

La démonstration change la signification des concepts

Euclide définit l'angle rectiligne comme inclinaison de deux droites. Cette définition nous renvoie à l'image schématique de l'angle, à la signification de l'angle dans le problème de la distance d'un bateau en mer. Mais Euclide n'utilise jamais cette définition dans les démonstrations. Clairaut choisira de le faire au XVIIIème siècle ; relativisme historique de l'idée de démonstration.

15 - GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, p.12

16 - cité par BOUVERESSE, *Le pays des possibles*, p.194.

17 - sur cet aspect, on peut se reporter à *La démonstration mathématique dans l'histoire*.

18 - sur cette conception, lire BOUVERESSE, *o.c.*, chapitre 3.

Pour savoir ce qu'est l'angle dans la conception euclidienne de la démonstration, nous devons nous reporter au processus par lequel l'angle se constitue, au fur et à mesure des démonstrations. Un angle a une épaisseur conceptuelle constituée de toutes les nouvelles significations qu'il va acquérir dans les démonstrations successives.

La formulation de la proposition IV que nous avons rappelée précédemment peut nous surprendre : elle ressemble beaucoup plus à un cas d'égalité d'angles qu'à un cas d'égalité de triangles. En effet, Euclide n'utilise pas la définition de l'angle comme inclinaison pour démontrer l'égalité de deux angles. Pour démontrer l'égalité de deux angles, ou pour les comparer, Euclide les enferme dans des triangles (fig.13). La configuration "angle dans un triangle" donne une nouvelle signification à l'angle. Elle aurait pu aussi bien, comme le proposait Jacques Peletier du Mans, permettre d'énoncer une définition de l'égalité de deux angles.

Euclide utilise cette configuration "angle dans un triangle" pour démontrer, à la proposition XVI, qu'un angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés. Il considère le milieu E de [AC] et le point Z tel que BE égale EZ (fig.18). La proposition IV implique que les triangles BAE et ECZ sont égaux, ainsi que les angles BAE et ECZ, par conséquent l'angle ACD est plus grand que l'angle BAC. Cette dernière affirmation repose sur l'évidence topologique du dessin, elle ne nécessite pas pour Euclide de démonstration. Il n'en sera pas de même pour Hilbert, à la fin du XIX^{ème} siècle : relativisme de l'idée de démonstration.

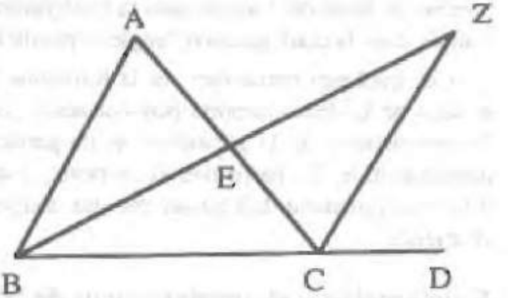


fig.18

La proposition XVI permet d'affirmer que la somme de deux angles d'un triangle est inférieure à deux angles droits. Mais pour démontrer que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits, Euclide doit introduire le concept de droites parallèles. Il a démontré à la proposition XXIX, en utilisant le fameux axiome des parallèles, qu'une sécante coupée par des parallèles procure une nouvelle configuration où des angles pourront être affirmés égaux. Cette démonstration change le concept d'angle en lui

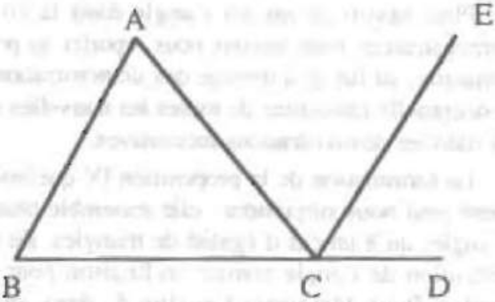


fig.19

donnant une nouvelle signification. La configuration "angles et parallèles" lui permet de démontrer, à la proposition XXXXI, que l'on peut construire une ligne parallèle à une ligne donnée. Puis, dans la proposition XXXII, en prolongeant le côté [BC] d'un triangle ABC et en construisant la parallèle (CE) à (AB), il peut démontrer le résultat sur la somme des angles d'un triangle (fig.19).

Nous avons donc successivement trois significations de l'angle : l'angle comme inclinaison, l'angle dans la configuration "angle dans un triangle", et l'angle dans la configuration "angle et parallèles".

Ces quelques remarques sur la formation des objets géométriques et sur le sens de la démonstration peuvent nous amener à certaines réflexions sur l'enseignement de la géométrie, et en particulier sur l'apprentissage de la démonstration. En particulier si on pense, comme moi, que toute conception d'un enseignement doit passer par une analyse épistémologique des savoirs enseignés.

Epistémologie et enseignement de la géométrie

Je retiendrai de ce qui a été dit précédemment deux éléments de réflexion :

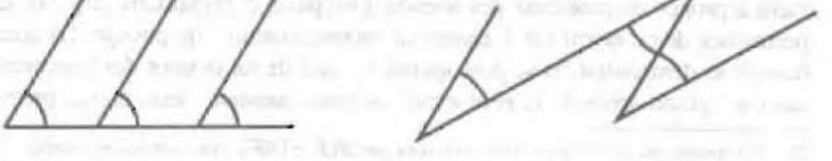
1. Dans le processus de la pensée géométrique tout est à construire, il n'y a pas d'objets géométriques dans le réel ni de logique mathématique innée, et tout est à mettre en place en même temps, la construction des objets géométriques et la construction de raisonnements. Ces constructions prennent sens dans des situations problématiques.
2. La construction de procédures de démonstration est intimement liée au sens que l'on donne à la démonstration. Les deux questions suivantes doivent être explicitées et liées : pourquoi montrer ? comment démontrer ?

Je terminerai par un dernier exemple, pour illustrer ces propos. Je confronterai deux conceptions de l'enseignement de la géométrie au collège, aux prises avec le concept d'angle et avec la démonstration concernant la somme des angles d'un triangle.

Une première conception consiste à demander aux élèves de faire des mesures des angles d'un ou de plusieurs triangles, puis de conjecturer. Conjecturer à partir d'expériences ne permet ni de construire l'objet géométrique idéal de l'angle, ni de construire une démonstration, c'est-à-dire de se donner des procédures de démonstration. Il y a dans ce cas un gouffre conceptuel entre conjecture et démonstration. La conjecture concerne uniquement des dessins d'angle : la somme des angles des triangles dessinés fait 180°, ou à peu près, et on conjecture que si on dessine un nouveau triangle, il en sera de même. Cette conception s'appuie à la fois sur une conception réaliste des mathématiques, la démonstration serait un moyen de suppléer à l'imprécision des mesures, et sur une conception idéaliste des mathématiques, les élèves vont trouver dans leurs têtes la démonstration logique attendue. L'enseignant a proposé une tâche et non pas un problème.

Une seconde conception nous est proposée dans une recherche didactique assez ancienne, où Dina Van Hiele propose un "enseignement de la géométrie s'appuyant sur les pavages". Cet enseignement a pour objectifs, en même temps, la construction des concepts de la géométrie élémentaire et la construction de démonstrations géométriques[19]. Nous résumons rapidement la démarche de cet enseignement qui occupe dix-sept séances destinées à des élèves de 12 ans, en Hollande. Les élèves sont invités à représenter des pavages réalisés avec des figures congruentes à un carré, un losange, un polygone régulier ou irrégulier, un triangle, un parallélogramme, etc. Au fur et à mesure, les élèves vont construire et définir des objets et des notions qui permettent de résoudre les problèmes posés : parallélisme de droites, cercle, angles, etc.

Après plusieurs séances, alors que les élèves ont déjà travaillé sur toutes sortes de pavages, la question se pose de savoir s'il est possible "de prévoir" les pavages réalisables, c'est à dire de savoir avec quel polygone il est possible de paver. Ces questions conduisent les élèves à des premiers raisonnements sur les angles, puis à introduire dans leurs raisonnements "des structures géométriques visuelles" qu'ils appellent les scies et les échelles (fig.20).



19 - VAN HIELE-GELDOF, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de doctorat, Utrecht, 1957.

Ces configurations sont des "structures structurées", elles interviennent dans les pavages en englobant les propriétés de parallélisme et d'égalité d'angles, qui vont devenir des "structures structurantes"[20], c'est à dire qui permettent d'engendrer et d'organiser les connaissances (fig.21). Elles jouent le rôle d'axiomes schématiques. L'organisation des connaissances consiste à construire "un arbre généalogique", selon l'expression utilisée par Dina Van Hiele. L'échelle et la scie sont les "ancêtres" à partir desquels sont déduites les propositions. Elles constituent des moyens légitimes, que les élèves se donnent, pour démontrer.

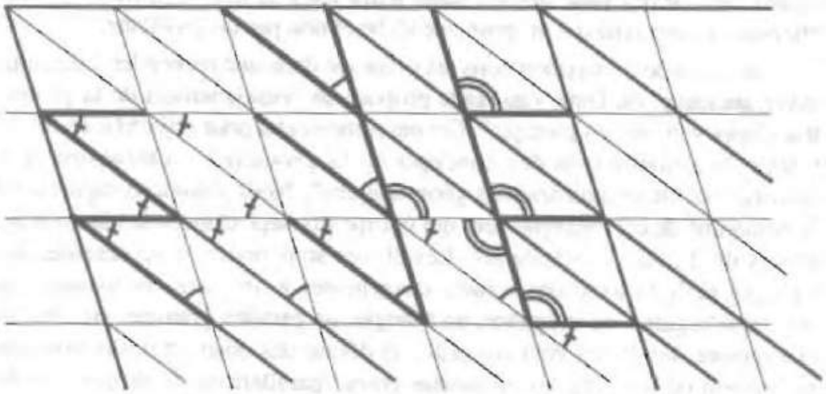


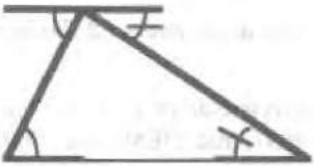
fig.21

Ainsi, les questions : pourquoi démontrer ? comment démontrer ? sont explicitées et reliées entre elles dans une situation problématique. Il faut prévoir les pavages possibles, et pour cela utiliser les axiomes schématiques inscrits dans les pavages.

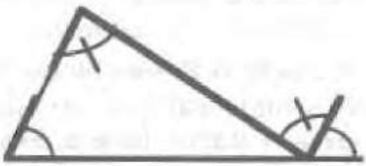
La valeur de la somme des angles d'un triangle est une question qui intervient à propos du problème des noeuds d'un pavage triangulaire (fig.21). La pertinence de ce savoir est d'assurer la "bonne jointure" du pavage. La question de sa démonstration se pose quand il s'agit de lui trouver des "ancêtres" dans le "grand arbre de la géométrie". A cette question, deux élèves propo-

20- Je reprends ici les expressions utilisées par BOURDIEU dans un autre champ problématique, cf. *Le sens pratique*, p.88.

sent aussitôt comme démonstration, le premier deux scies (fig.22), le second une échelle et une scie (fig.23).



deux scies
fig.22



une échelle et une scie
fig.23

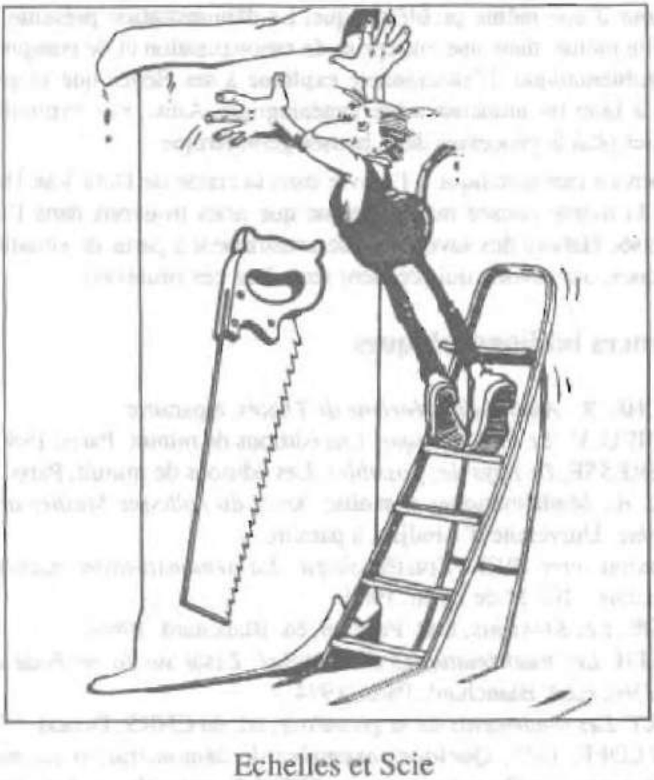
Cet enseignement s'appuyant sur les pavages relève d'une conception constructiviste, dans la mesure où il s'agit de construire en même temps des concepts et des démonstrations, à partir d'un champ de problèmes s'organisant autour d'une même problématique. La démonstration présente un intérêt, en elle même, dans une entreprise de rationalisation et de compréhension d'une problématique. L'enseignante explique à ses élèves que la géométrie consiste à faire un immense arbre généalogique. Ainsi, elle explicite et met au premier plan le processus de la pensée géométrique.

La pensée mathématique à l'œuvre dans la classe de Dina Van Hiele procède de la même pensée mathématique que nous trouvons dans l'histoire : cette pensée élabore des savoirs qui se construisent à partir de situations problématiques, des savoirs qui prennent sens dans ces situations.

Références bibliographiques

BKOUCHE, R., *Autour du théorème de Thalès*, à paraître.
BOURDIEU, P., *Le sens pratique*, Les éditions de minuit, Paris, 1980.
BOUVERESSE, *Le pays des possibles*, Les éditions de minuit, Paris, 1980.
BOYER, A., Mathématiques et réalité, *Actes du colloque Mathématiques et philosophie*, Université d'Abidjan, à paraître.
Commission inter-IREM Epistémologie, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Lyon, 1989.
EUCLIDE, *Les Eléments*, trad. Peyrard, éd. Blanchard, 1966.
GONSETH, *Les mathématiques et la réalité, Essai sur la méthode axiomatique* (1936), rééd. Blanchard, Paris, 1974.
HILBERT, *Les fondements de la géométrie*, éd. du CNRS, Dunod, 1971.
MARTZLOFF, J.-C., Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises, in Commission inter-IREM Epistémologie, *La démonstra-*

tion mathématique dans l'histoire, IREM de Lyon, 1989.
PELETIER du MANS, *Les six premiers livres des Eléments géométriques d'Euclide*, éd. Jean de Tournes, 1628.
PROCLUS, *Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*, éd. Desclée de Brouwer, Bruges, 1948..
VAN HIELE-GELDOF, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de doctorat, Utrecht, 1957, trad. GEM, Louvain la Neuve.
WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Gallimard, Paris, 1983.



Echelles et Scie