Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes» ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 216 (Henri DELEKTA, Château-Thierry)

Peut-on construire un solide dont les projections orthogonales, sur trois plans deux à deux orthogonaux, soient respectivement un cercle, un carré et un triangle équilatéral ?

ÉNONCÉ N° 217 (Roger CUCULIÈRE, Rabat - Maroc)

Soient deux entiers b et c tels que $c \geq b \geq 2$. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ,\ 1[$, on note : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{b^n}$ le développement de x dans la base b, avec $u_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'étant pas stationnaire à $b-1$.

On définit une fonction f en posant : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{c^n}$, que l'on peut prolonger par $f(1) = 1$.

Calculer : $I = \int_0^1 f(t)\,dt$.

ÉNONCÉ N° 218 (Gérard LAVAU, Mesnil-Esnard)

Sous quelles conditions peut-on affirmer que : «*Deux groupes finis G et G' sont isomorphes si et seulement si les ordres des éléments de G et G' sont les mêmes*» ?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 201 Eugène EHRHARDT, Strasbourg)

La suite de Fibonacci étant définie par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, avec $F_1 = F_2 = 1$, soit (G_n) une suite définie elle aussi par $G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$, mais avec $G_1 = a$ et $G_2 = b$ (a et b entiers).

a) Peut-on choisir a et b de sorte que $G_n - F_n\sqrt{5}$ tende vers zéro lorsque n tend vers l'infini ?

b) A quelle condition (sur a et b) la fraction G_n/F_n est-elle irréductible pour tout n ?

SOLUTION de Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles)

Pour plus de commodité, on définira la suite de Fibonacci dans $\mathbf{N}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

La suite G_n est alors définie pour $n \geq 1$ et $(a\ ,b) \in \mathbf{N}^{*2}$ par :

$$G_n = aF_n + (b-a)F_{n-1}.$$

a) La suite F_n peut aussi être définie par : $F_0 = 0$ et $F_{n+1} = \varphi F_n + \dfrac{(-1)^n}{\varphi^n}$ où φ est le nombre d'or.

Donc $G_n - \sqrt{5}\ F_n = [(a-1)\varphi + b - a - 2]F_{n-1} + \dfrac{(-1)^n(a+1-2\varphi)}{\varphi^{n-1}}$

$\lim\limits_{+\infty} F_{n-1} = +\infty$ donc la suite $G_n - \sqrt{5}\ F_n$ ne peut converger que si $a = 1$ et $b - a - 2 = 0$ et dans ce cas, $G_n - \sqrt{5}\ F_n = \dfrac{2(-1)^n}{\varphi^n}$, suite qui converge vers zéro.

Donc $\lim\limits_{+\infty} G_n - \sqrt{5}\ F_n = 0 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = 3$.

b) Commençons par démontrer deux lemmes :

lemme 1 **:** Pour tout entier naturel non nul, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

Démonstration : la proposition est vraie à l'ordre 1 et, puisque $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}$, alors si la proposition est vraie à l'ordre n, elle l'est à l'ordre $n + 1$, d'où le lemme 1.

Remarque : Plus généralement, pour $n \geq 1$, F_n, F_{n+1} et F_{n+2} sont deux à deux premiers entre eux.

lemme 2 : Pour tout entier naturel c, $c \geq 2$, il existe un entier naturel p, $3 \leq p \leq c^2 - 1$ tel que, pour tout entier naturel n, F_{np} soit multiple de c.

Démonstration : Soit r_n le reste de la division euclidienne de F_n par c.
La suite r_n, à valeurs dans $\mathbf{Z}/c\mathbf{Z}$, est définie dans $\mathbf{N}$ par : $r_0 = 0$, $r_1 = 1$, $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$ donc, pour tout c, $r_2 = 1$

F_n et F_{n+1} étant premiers entre eux, deux termes consécutifs de la suite Γ_n peuvent être nuls donc la suite (r_n, r_{n+1}) peut prendre au plus $c^2 - 1$ valeurs dans $[\mathbf{Z}/c\mathbf{Z}]^2$.

La suite r_n est donc périodique à partir d'un certain rang m et sa période p est au moins 3 et au plus $c^2 - 1$.
Mais si $m > 0$ et $r_{m+p} = r_m$ et $r_{m+p+1} = r_{m+1}$, étant donnée la formule de récurrence de la suite r_n, on a $r_{m+p-1} = r_{m-1}$.

La suite r_n est donc périodique à partir du rang 0 et, par conséquent :

$\forall\, n \in \mathbf{N}$ $\qquad r_{np} = r_0 = 0$ ce qui démontre le lemme 2.

Remarque : on démontre d'une façon analogue qu'il existe un entier k $3 \leq k \leq c^2 - 1 - 3(c-2)$ tel que $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad r_{nk} = 0$.

• $\frac{G_n}{F_n}$ est définie pour $n \geq 1$ par $\frac{G_n}{F_n} = a + \frac{(b-a)F_{n-1}}{F_n}$.

Si $b - a = 0$, alors $\frac{G_n}{F_n}$ se simplifie pour tout n, $n \geq 1$.

Si $|b - a| \geq 2$ alors $\frac{G_n}{F_n}$ se simplifie pour une infinité de valeurs de n (lemme 2).

Si $|b-a|=1$ alors $\dfrac{G_n}{F_n}=a\pm\dfrac{F_{n-1}}{F_n}$ est irréductible pour tout n (lemme 1).

D'où la conclusion :

$\dfrac{G_n}{F_n}$ est irréductible pour tout n si et seulement si $|b-a|=1$.

REMARQUE

Cette démonstration fait appel à très peu de connaissances explicites sur la suite de Fibonacci, toutes les relations utilisées découlant immédiatement de la relation de récurrence $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$.

Les démonstrations construites sur davantage de propriétés de cette suite ne sont généralement pas plus simples : ces autres propriétés ne sont nécessaires que, par exemple, si l'on veut prouver que tout nombre premier p divise F_{p-1}, F_p ou F_{p+1}. Nous en aurons besoin, pour l'énoncé 206, mais pas pour celui-ci.

Un peu de patience !

Par ailleurs, lorsque G_n est la suite de Lucas (cf.EHRHARDT, sur les suites de Fibonacci et de Lucas, *Articles mathématiques*, Paris (Cedic-Nathan) 1985, p.144-148), c'est-à-dire celle vérifiant : $\lim\limits_{+\infty} G_n-\sqrt{5}\,F_n=0$, on a :

$G_n=F_{n+1}+F_{n-1}$, $G_n=\dfrac{F_{2n}}{F_n}$ et c'est précisément lorsque $\dfrac{G_n}{F_n}$ n'est pas irréductible (simplifiable par 2 : si n est multiple de 3) que $\dfrac{G_n}{F_n}$, après simplification, est une réduite de $\sqrt{5}$ (au sens des approximations diophantiennes).

Roger CUCULIÈRE (Rabat-Maroc) rappelle que «Edouard Lucas (1842-1891) était professeur de spéciales au Lycée Saint-Louis, immortel pour son œuvre de mathématicien-récréationniste, mais aussi de mathématicien tout court et d'historien des mathématiques».

M.DELEHAM (Paris) nous renvoie à une jolie démonstration de N.Vorobiev (*Initiation aux mathématiques - caractères de divisibilité - Suite de Fibonacci*, Editions de Moscou, 1973, p.122) de la périodicité de F_n modulo n'importe quel entier.

Plusieurs lecteurs citent Hardy et Wright (*An introduction to the Theory of Numbers*, p.150)…

La bibliographie est vaste !

Gilbert ROUX (l'Haÿ les Roses) remercie Jacques Lubczanski dont le stage MAFPEN intitulé «la recherche mathématique à la portée de tous» lui a permis d'arriver au bout de cet exercice.

AUTRES SOLUTIONS

R.ANDRE-JEANNIN (Longwy), Pierre BARNOUIN (Cabris), Luc BARRIA (Serres Morlaas), Mireille BOURNAUD (Vitry), Régis CHARPENTIER (Evry), Roland CHIAVASSA (Lambesc), Roger CUCULIERE (Rabat-Maroc), M.DELEHAM (Reims), Edgar DELPLANCHE (Créteil), Marguerite PONCHAUX (Lille), Gilbert ROUX (l'Haÿ les Roses), et cinq solutions incomplètes ou fausses.

ÉNONCÉ N° 202 (Gérald BOURGEOIS et Jean-Pierre LECHENE, Marseille).

On se donne deux cercles non concentriques : (C), de centre O et de rayon 1, et (γ), de centre I et de rayon r, tels que (γ) soit strictement à l'intérieur de (C), et l'on pose $OI = d$. Soit M un point de (C) ; on mène la tangente issue de M à (γ) qui passe à droite de (γ) pour un observateur situé en M ; cette tangente recoupe (C) en A ; en itérant l'opération, on construit B à partir de A, puis M' à partir de B. On considère la fonction f qui à tout point M de (C) associe l'angle $(OM,OM') \in [0\ ,2\pi[$.

a) Quels sont les points M réalisant le maximum et le minimum de f ?

b) Quels sont les points M tels que M et M' soient diamétralement opposés ? Quels sont les couples $(r\ ,\ d)$ tels que ces points existent ?

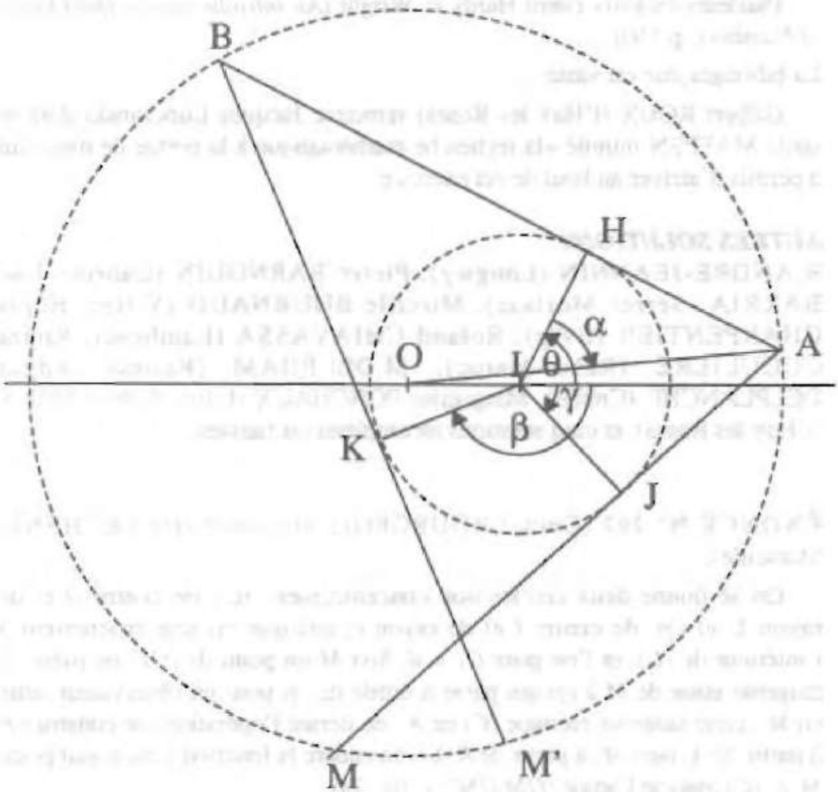
SOLUTION des auteurs. *(figure sur la page suivante)*

On choisit comme paramètres les angles θ, α , β, γ.

a) On identifie les points M de (C) et l'angle $(\overrightarrow{Ox}\ ,\ \overrightarrow{OM}\ )$.

d tel que $\overline{OI} = d \ \in\ ]0\ ,\ 1[$, et r, rayon de γ, vérifient $r + d < 1$. On pose

$(\ \overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{IH}\ ) = \theta \in [0\ ,2\pi[$, $(\ \overrightarrow{IH}\ ,\ \overrightarrow{OA}\ ) = \alpha$, $(\ \overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{IJ}\ ) = \gamma$, $(\ \overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{IK}\ ) = \beta$.



Remarque i) Si on connaît θ, c'est à dire H, alors on connaît α, β, γ mod 2π. Il est clair qu'on peut choisir les déterminations de α, β, γ de façon à *ce qu'elles dépendent continûment de θ, quantité que l'on considérera dans la suite, comme la variable.*

Remarque ii) $M = M' \Leftrightarrow (\gamma)$ est le cercle inscrit au triangle $MAB \Leftrightarrow 2r = 1 - d^2$ (démonstration standard).

Donc $2r = 1 - d^2 \Rightarrow f \equiv 0$ et $2r \neq 1 - d^2 \Rightarrow \forall M, f(M) \in \,]0\,,2\pi[$.

b) *Dans la suite, on se place dans le cas $2r \neq 1 - d^2$.*

On démontre ensuite les relations suivantes:

➜ $\cos\alpha = r + d.\cos\theta$ (1) donc $\sin\alpha \neq 0$

démonstration : on projette OA sur IH pour obtenir (1) ; $\sin\alpha \neq 0$ car $r + d < 1$.

→ $\sin\dfrac{\gamma-\theta-2\alpha}{2} - d\sin\dfrac{\gamma+\theta}{2} = 0$ (2)

démonstration : Si $z, z' \in \mathbb{C}$, on appelle $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs associés ; alors $\mathrm{Re}(z\ \bar{z}') = \vec{u}.\vec{v}$.

Ici, $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IJ} = r^2$ d'où $\mathrm{Re}[(e^{i(\theta+\alpha)} - d)\, re^{-i\gamma}] = r^2$

ou $\cos(\theta+\alpha-\gamma) - d\cos\gamma = r$;

en utilisant (1) on en déduit (2) si $\sin\dfrac{\theta-\gamma}{2} \neq 0$; cette condition est vérifiée sinon $J = H$ et $r = 0$.

→ $\left(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}\right) = 2(\gamma-\beta-\alpha)$ (3) donc $\gamma-\beta-\alpha \in\ ]-\pi, 0[$

démonstration : $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta + a + 2\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{IJ}\right)$

$$= (\theta+\alpha) + 2\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right) + 2\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{IJ}\right) = \theta+\alpha+2(-\theta-\alpha+\gamma) = 2\gamma-\theta-\alpha$$

De même, $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}\right) = 2\beta-\theta+\alpha$ en changeant M en M', γ en β et α en $-\alpha$.

→ D'après (1) $\sin\alpha$ garde un signe constant donc α est une fonction C^1 de θ et $\alpha'\sin\alpha = d\sin\theta$ (4)

→ $\tan\dfrac{\gamma-\alpha}{2} = \dfrac{1+d}{1-d}\times\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}$ (5'), $\tan\dfrac{\beta+\alpha}{2} = \dfrac{1+d}{1-d}\times\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}$ (5")

sauf pour un nombre fini de valeurs de θ.

démonstration de (5' : . (2) s'écrit aussi :

$$(1-d)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\times\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = (1+d)\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\times\sin\frac{\theta+\alpha}{2}$$

d'où (5') si $\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\neq 0$ et $\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2}\neq 0$ ou, ce qui est équivalent, si $\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2}\neq 0$.

Si $\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2} = 0$ alors $\theta+\alpha = \pi \bmod 2\pi$ et (1) s'écrit : $-\cos\theta = r + d\cos\theta$ ce qui fournit deux valeurs de θ.

→ $\tan\dfrac{\gamma-\beta-\alpha}{2} = \dfrac{2r+\left(1-d^2\right)}{2r-\left(1+d^2\right)}\times\tan\dfrac{\alpha}{2}$ (6) pour tout θ.

Démonstration : par (1), (5') et (5"), $\tan\dfrac{\gamma-\beta-2\alpha}{2}=\dfrac{(1-d^2)\sin\alpha}{2r-(1-d^2)\cos\alpha}$

sauf pour un nombre fini de valeurs de θ et si $2r-(1-d^2)\cos\alpha\neq 0$ ou si $2r\neq(1-d^2)(r+d\cos\theta)$; l'égalité ci-dessus est donc valable sauf pour un nombre fini de valeurs de θ ;

de $\dfrac{\gamma-\beta-\alpha}{2}=\dfrac{\gamma-\beta-2\alpha}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$ et de $\sin\alpha\neq 0$ donc $\cos(\alpha/2)\neq 0$, on déduit (6) sauf pour un nombre fini de valeurs de θ.

Comme $\dfrac{\gamma-\beta-\alpha}{2}\in\,]-\pi/2\,;0[$, (6) a un sens pour tout θ ; par continuité, (6) est valable pour tout θ.

c) Réponse à la première question :

On cherche les extréma de $(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM})=2(\gamma-\beta-\alpha)$ ou les extréma de $\tan\dfrac{\gamma-\beta-\alpha}{2}$ ou, par (6), ceux de $\tan\alpha/2$ ou ceux de α.

Par (4) : $\alpha'=0\Leftrightarrow\sin\theta=0\Leftrightarrow\theta=0$ ou π c'est-à-dire que *H est sur Ox et la figure admet Ox comme axe de symétrie.*

Ces deux valeurs de θ correspondent au minimum et au maximum de f car il n'y a que deux points critiques.

d) Réponse à la deuxième question :

Il faut résoudre $2(\gamma-\beta-\alpha)=-\pi$ ou $\tan\dfrac{\gamma-\beta-\alpha}{2}=-1$ ou, par (6),

$$\tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{2r-(1-d^2)}{2r+(1-d^2)}.$$

Remarque : Si on pose $2r=\rho\cos\tau$ et $1-d^2=\rho\sin\tau$, (6) s'écrit :

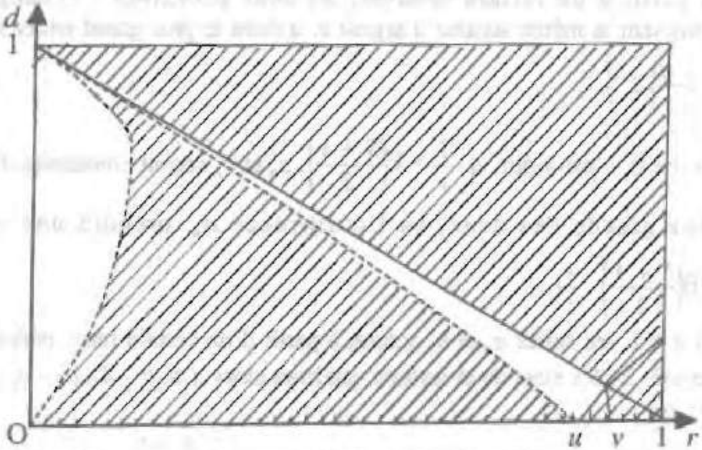
$\tan\dfrac{\gamma-\beta-\alpha}{2}=\tan\left(\tau+\dfrac{\pi}{4}\right)\times\tan\dfrac{\alpha}{2}$ d'où ici, $\tan\dfrac{\alpha}{2}=-\operatorname{cotan}\left(\tau+\dfrac{\pi}{4}\right)$ d'où $a=(-\pi/2+2\tau)\bmod 2\pi$.

Alors : $\cos\alpha=\dfrac{4r(1-d^2)}{4r^2+(1-d^2)^2}$ et $\cos\theta=\dfrac{-r\left[(1+d^2)^2+4r^2-4\right]}{d\left[(1-d^2)^2+4r^2\right]}$.

La condition d'existence étant que

$$r\left|\left(1+d^2\right)^2+4r^2-4\right| \leq d\left[\left(1-d^2\right)^2+4r^2\right] \qquad (*)$$

on obtient en général deux positions pour M symétriques par rapport à Oy.
L'ensemble des couples $(r\ ,\ d)$ vérifiant (*) est représenté ci-dessous.
Seules les deux régions non hachurées conviennent.



$u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $v \approx 0{,}92$.

Autres solutions :
Edgard DELPLANCHE (Créteil), Jacques LEGRAND (Biarritz), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Montaut).

ÉNONCÉ N° 203 (Jacques AMON, Limoges)
Soit t un réel strictement compris entre 0 et 1. Deux personnes A et B ont initialement a_0 et b_0 pièces de 1F (a_0 et b_0 entiers). La plus riche donne à l'autre t fois sa fortune, arrondi à l'entier inférieur : les nouvelles fortunes sont a_1 et b_1 (entiers). Puis la plus riche donne à l'autre t fois sa fortune, arrondi à l'entier inférieur, et ainsi de suite ... Si à un moment, les deux personnes ont le même nombre de pièces, c'est celle qui vient de recevoir qui donne.
Examiner l'évolution des états de fortune des deux personnes.

RÉPONSE :

Supposons $a_0 \geq b_0$, appelons $S = a_0 + b_0$ le nombre total de pièces (pour tout n, $S = a_n + b_n$), et notons $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x.

Posons $q = \mathrm{E}\left(\frac{S}{2}\right)$

A partir d'un certain moment, les deux personnes s'échangeront indéfiniment la même somme d'argent d, d étant le plus grand entier tel que $\mathrm{E}\left(\frac{S+d}{2}\right) \geq \frac{d}{t}$.

Si $d = 0$, c'est-à-dire si $\frac{1}{t} > \mathrm{E}\left(\frac{S+1}{2}\right)$, a_n et b_n seront constantes dès que la plus grande des deux, en l'occurrence a_n, prendra une valeur $a \in \left[\mathrm{E}\left(\frac{S+1}{2}\right), \frac{1}{t}\right[$.

Si $d \geq 1$, les suites a_n et b_n seront, à partir d'un certain rang, périodiques de période 2 ; les états de la fortune vaudront alors :$(a, b-d)$, $(a-d, b)$, $(a, b-d)$, etc ...

le $\sup(a,b)$ pouvant être n'importe quel entier $c > \frac{S-1}{2-t}$ vérifiant les trois inégalités :

$$c \leq \frac{q}{1-t}\ ;\ c < \frac{d+1}{t}\ ;\ c \leq S + d - \frac{d}{t}$$

DÉMONSTRATION

Le cas $d = 0$, soit $\frac{1}{t} > \mathrm{E}\left(\frac{S+1}{2}\right)$,est trivial, car :

- ou bien $a_n \geq \frac{1}{t}$, ce qui entraîne : $a_{n+1} = a_n - 1 \geq \mathrm{E}\left(\frac{S+1}{2}\right)$

- ou bien $\mathrm{E}\left(\frac{S+1}{2}\right) \leq a_n < 1/t$ ce qui entraîne $a_{n+1} = a_n$ et la suite devient bien constante.

Dans le cas $d > 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{t} \leq \mathrm{E}\left(\frac{S+1}{2}\right) \leq q+1$, on a $\frac{q}{1-t} \geq \frac{1}{t}$, donc $\left(\frac{2-t}{1-t}\right) q \geq 2q+1 \geq S$, ce qui entraîne : $tS + (1-t)\,q \leq \frac{q}{1-t}$, de sorte que :

si $a_n > \frac{q}{1-t}$, $q < (1-t)\,a_n$ et le plus riche reste le plus riche, mais sa

richesse décroît jusqu'à ce que : $S - q \leq a_n \leq \frac{q}{1-t}$, ce qui implique:

$S - q \leq b_{n+1} \leq S - (1-t)\,a_n \leq tS + (1-t)\,q \leq \frac{q}{1-t}$.

Dès cet instant, A et B donnent alternativement, et la fortune du plus riche reste majorée par $\frac{q}{1-t}$.

Posons alors $c_n = \sup\{a_n, b_n\} = \frac{S + k_n - \varepsilon_n}{2-t}$ avec $0 \leq \varepsilon_n < 1$ et k_n entier positif ou négatif (ou nul). Comme : $S - (1-t).c_n - 1 < c_{n+1} \leq S - (1-t).c_n$,
on a : $c_n - k_n + (\varepsilon_n - 1) < c_{n+1} \leq c_n - k_n + \varepsilon_n$
Mais, puisque c_n et c_{n+1} sont tous deux entiers,

$$c_{n+1} = c_n - k_n = \frac{S - k_n(1-t) - \varepsilon_n}{2-t} \qquad (1).$$

Par suite, $c_n - tk_n + (\varepsilon_n - 1) < c_{n+2} \leq c_n - tk_n + \varepsilon_n$ (2)

Mais comme la relation (1) peut aussi s'appliquer à c_{n+1} :

$$c_{n+2} = c_{n+1} - k_{n+1} = c_n - k_n - k_{n+1}$$

on a : $k_n(1-t) - 1 < -k_{n+1} < k_n(1-t) + 1$ et comme k_n et k_{n+1} sont entiers,
on en déduit : $|k_{n+1}| \leq |k_n|$ et l'un des deux est ≥ 0, l'autre étant ≤ 0.
Ce qui donne à distinguer deux cas :
- Soit k_n s'annule à partir d'un certain rang, auquel cas la suite c_n devient stationnaire, ce qui est conforme au résultat annoncé sous réserve que cette constante : $a = b$ soit égale à $\frac{S+d}{2}$.
- Soit k_n n'est jamais nul, auquel cas il est alternativement strictement positif et strictement négatif ; or $k_n < 0 \Rightarrow c_n \leq \frac{S-1}{2-t}$ et $k_n > 0 \Rightarrow c_n > \frac{S}{2-t}$, ce

qui signifie que la suite c_n oscille autour de l'intervalle $\left]\frac{S-1}{2-t}, \frac{S}{2-t}\right[= I$.

Dans le premier cas, la constante $a = b$ doit être dans l'intervalle $I = \left]\frac{S-1}{2-t}, \frac{S}{2-t}\right[$ et il reste à prouver que cet intervalle ne peut pas contenir d'entier autre que $\frac{S+d}{2}$. Or la définition de d entraîne immédiatement :

$$\frac{S+d}{2} - 1 < \frac{S-1}{2-t} < \frac{S+d}{2} \leq \frac{S}{2-t} < \frac{S+d}{2} + 1,$$

mais cela ne suffit pas ! Il faut encore prouver que si $S + d$ est impair, $\frac{S-1}{2-t} \geq \frac{S+d-1}{2}$ et $\frac{S}{2-t} < \frac{S+d+1}{2}$, ce qui est vrai car, si $S + d$ est impair, $\frac{d}{t} \leq \frac{S+d-1}{2}$ et $\frac{d+1}{t} > \frac{S+d+1}{2}$. On peut s'aider du petit lemme élémentaire :

> Si u, v, u' et v' sont quatre réels strictement positifs tels que $u > u'$ et $v > v'$, alors $\frac{u}{v} \leq \frac{u'}{v'} \Leftrightarrow \frac{u-u'}{v-v'} \leq \frac{u}{v} \leq \frac{u+u'}{v+v'}$.

Dans le second cas, la définition de d et le lemme ci-dessus prouvent que $\frac{d}{t} \leq \frac{S}{2-t}$ et $\frac{d+1}{t} > \frac{S-1}{2-t}$. Par ailleurs, c_n oscille autour de l'intervalle $I = \left]\frac{S-1}{2-t}, \frac{S}{2-t}\right[$, on peut donc supposer qu'à partir d'un certain rang, $c_{2p} \leq \frac{S-1}{2-t}$, $c_{2p+1} > \frac{S}{2-t}$.

Si $c_{2p} < \frac{d}{t}$, $c_{2p+1} > \frac{S}{2-t} \geq \frac{d}{t}$, donc le plus riche au rang $2p$ donne $\mathrm{E}(tc_{2p}) \leq d - 1$ pièces pour en recevoir, au tour suivant, au moins d, de sorte que : $c_{2p} < c_{2p+2} \leq \frac{S-1}{2-t}$ jusqu'au moment où l'on aura $c_{2p} \geq \frac{d}{t}$ et donc :

$\frac{S}{2-t} < c_{2p+1} \leq S - (1-t)\, c_{2p} \leq S + d - \frac{d}{t}$.

Si $S + d - \frac{d}{t} < \frac{d+1}{t}$, à partir de ce rang $2p$, les joueurs échangeront les mêmes d pièces, mais si $c_{2p+1} \geq \frac{d+1}{t}$, $c_{2p+2} \leq \frac{S-1}{2-t} < \frac{d+1}{t}$ de sorte que le plus riche à ce rang $2p + 1$ donnera plus de pièces qu'il n'en recevra au tour suivant, si bien que $\frac{S}{2-t} < c_{2p+3} < c_{2p+1}$ jusqu'à ce que $c_{2p+1} < \frac{d+1}{t}$.

Dès cet instant, les deux joueurs s'échangeront indéfiniment les mêmes d pièces, mais c_{2p+1} pourra avoir n'importe quelle valeur $> \frac{S}{2-t}$ vérifiant les inégalités $c_{2p+1} \leq S + d - \frac{d}{t}$, $c_{2p+1} < \frac{d+1}{t}$ et (inégalité initiale à ne pas oublier) $c_{2p+1} \leq \frac{q}{1-t}$.

En effet, si $S + d - \frac{d}{t} < \frac{d+1}{t}$, n'importe quel entier $c \leq S + d - \frac{d}{t}$ convient comme sup(a, b), car un joueur ayant c pièces en donnera d, si bien qu'au tour suivant, l'autre joueur en aura $S - c + d \geq \frac{d}{t}$ et lui en rendra d. De même, si $\frac{d+1}{t} \leq S + d - \frac{d}{t}$, n'importe quel entier $c < \frac{d+1}{t}$ convient, car un joueur ayant c pièces en donnera d, l'autre en aura alors $S + d - c > S + d - \frac{d+1}{t} \geq \frac{d}{t}$ et en rendra d.

En réunissant le cas stationnaire et ce deuxième cas, on obtient le résultat annoncé. Mais il importe de remarquer qu'il existe toujours au moins un entier $\mathrm{E}\left(\frac{S+d+1}{2}\right)$ qui vérifie toutes ces inégalités, car :

$$\frac{d}{t} \leq \mathrm{E}\left(\frac{S+d}{2}\right) = S + d - \mathrm{E}\left(\frac{S+d+1}{2}\right) \leq \mathrm{E}\left(\frac{S+d+1}{2}\right) \leq q + d \leq \frac{q}{1-t}.$$

Par ailleurs, la troisième inégalité $c \leq \frac{q}{1-t}$ n'est à prendre en considération que si $S < \frac{2-t}{t^2}$, ou encore si le nombre de pièces échangées est inférieur à la longueur $1/t$ de l'intervalle $\left[\frac{d}{t}, \frac{d+1}{t}\right]$. En effet, $\inf\left(\frac{d+1}{t}, S+d-\frac{d}{t}\right) \leq \frac{S}{2-t} + \frac{1}{2t}$ car $\frac{S+d}{2} \leq \frac{S}{2-t}$ alors que $\frac{q}{1-t} \geq \frac{S-1}{2-t} + \frac{qt}{(1-t)(2-t)} \geq \frac{S}{2-t} + \frac{d-1}{2(1-t)}$.

Plus précisément, cette inégalité $c \leq \frac{q}{1-t}$ n'intervient que si q appartient à l'intervalle : $\left[\frac{d}{t}, S+d-\frac{d}{t}\right] \cap \left]S+d-\frac{d+1}{t}, \frac{d+1}{t}\right[$ défini par les autres inégalités, car alors l'hypothèse

$$\sup(a_{n+1}, b_{n+1}) = E(S-(1-t)\operatorname{Sup}(a_n, b_n)),$$

sur laquelle est construite la démonstration, serait mise en défaut.

Pour mieux voir comment se comportent effectivement ces inégalités, on peut choisir par exemple $t = 0{,}13$ et S décrivant d'une part l'intervalle [42 , 52], d'autre part l'intervalle [114 , 124].

Autres solutions : (moins complètes)
Pierre BARNOUIN (Cabris), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Charles NOTARI (Montaut), Maurice PERROT (Paris), R. RAYNAUD (Digne).

COURRIER DES LECTEURS

Le courrier des lecteurs est toujours enrichissant, mais ... certains lecteurs ne mentionnent pas leur adresse : même s'il s'agit d'une adresse professionnelle, c'est toujours utile pour faciliter le dialogue entre collègues.

D'autres lecteurs ne mentionnent même pas leur nom : de qui provient la réponse anonyme a l'énoncé 210 que j'ai reçue le 31 décembre ?