Dans nos classes

Le texte suivant est extrait du mémoire de fin de stage de l'auteur. Il reprend une situation-problème utilisée en formation à l'IREM du Mans, et a le mérite de transcrire le vécu d'une classe.

Le calcul littéral en quatrième

Pascale Delavallée

IUFM de Créteil

L'Activité proposée aux élèves

1) Description : ma démarche

a) Présentation de l'activité aux élèves.

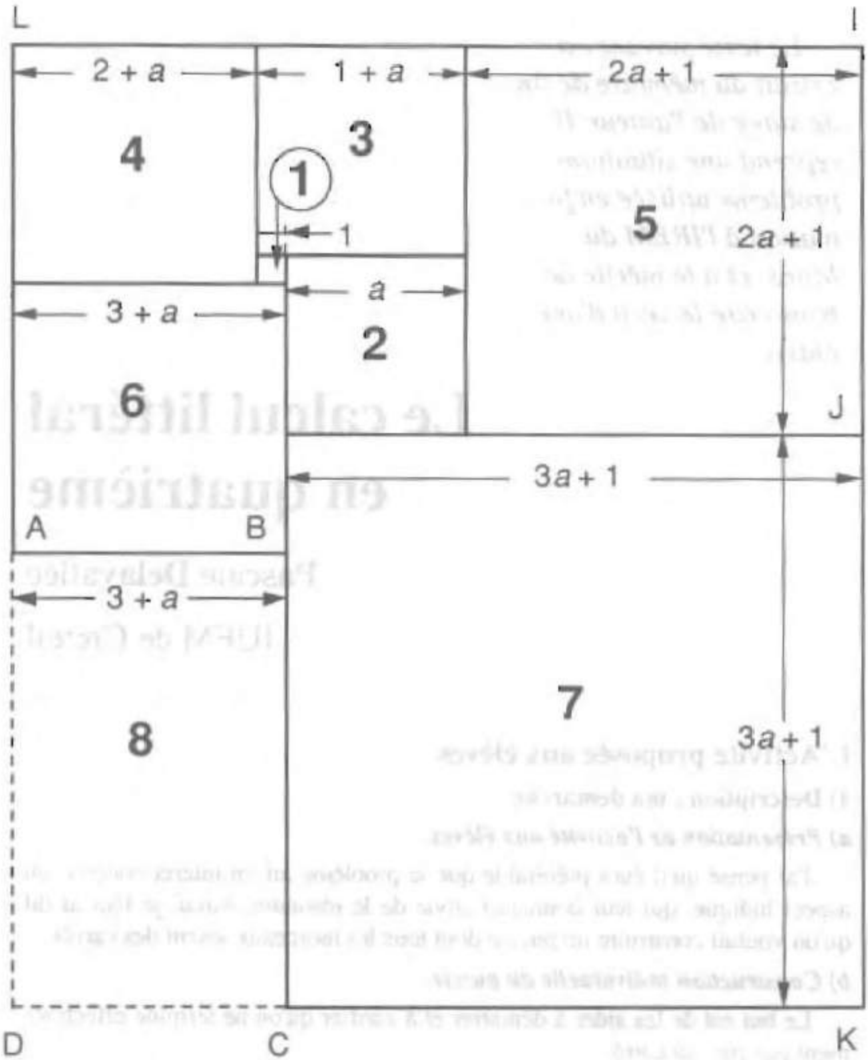
J'ai pensé qu'il était préférable que le problème ait un intérêt concret, un aspect ludique, qui leur donnerait envie de le résoudre. Aussi, je leur ai dit qu'on voulait construire un puzzle dont tous les morceaux soient des carrés.

b) Construction individuelle du puzzle.

Le but est de les aider à démarrer et à vérifier qu'on ne termine effectivement pas par un carré.

- Le carreau est fixé comme unité de longueur.
- La valeur de *a* est différente d'un voisin à l'autre.

$a = 6 \qquad AB = BC \qquad AB = 3 + a$



- Elle est fixée par moi : 2 ou 4 pour les feuilles à grands carreaux, 6 pour celles à petits carreaux, ceci, pour éviter
  - que le puzzle «déborde» des dimensions de leur papier (ce qui entraînerait perte de temps et découragement),
  - qu'ils ne choisissent malencontreusement la valeur 3, ce qui détruirait complètement la motivation, le résultat étant trouvé avant même qu'il ne soit cherché.

c) Rassemblement des résultats sous forme d'un tableau.

a	2	4	6
AB			
BC			

Ce tableau permet
- de contrôler que la construction est juste,
- de les amener par eux-mêmes à poser : «il faut que $AB = BC$ (ou $AB = AD$)»

d) Calcul des longueurs des côtés

La construction étant effectuée, je leur rappelle que, comme dans tout bon vieux problème de géométrie, TOUTES les hypothèses doivent figurer sur le dessin. Si le côté du premier carré a pour longueur 1, et le côté du second a, quelle est la longueur du coté du troisième, du quatrième, ...?

e) Constitution de groupes de 4 élèves.

Dans chacun, toutes les valeurs de a (2; 4; 6) sont représentées, ceci étant capital pour leur permettre de vérifier que ce qui est vrai sur leur figure, l'est aussi sur celles des autres membres du groupe.

f) Vérification du résultat,

après mise en évidence de celui-ci ($a = 3$) par la construction du puzzle.

g) Synthèse collective.

- Confrontation des résultats.
- Bilan.

2) Intérêts et objectifs de cette activité :

INTÉRETS

- Le problème à résoudre est à la fois géométrique et algébrique, et donc, l'inconnue a un statut concret.
- L'imbrication des carrés fait que le calcul de BC n'est pas aisé pour eux. Avec des lettres, ils savent comparer des longueurs égales (si x est la lon-

gueur du côté d'un rectangle, la longueur du côté opposé vaut x aussi). Ici, le problème est bien plus compliqué et permettra de mieux sensibiliser les élèves à l'utilité et l'efficacité du calcul algébrique, alors qu'ils ne le maîtrisent pas encore parfaitement.

- La résolution ne fait intervenir que du calcul algébrique. L'attention des élèves n'est pas détournée par une démonstration géométrique à faire (vérifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme, qu'un point est le milieu d'un segment etc.).
- La valeur de a cherchée est 3. Une fois le résultat trouvé, les élèves pourront vérifier leur travail en construisant le puzzle qui «rentre» dans les dimensions d'une feuille de papier et le barioler avec force couleurs fluorescentes, comme ils aiment le faire.

OBJECTIFS.

Le but est de sensibiliser les élèves à la puissance du calcul algébrique.

Les objectifs sont les suivants :

- Apprendre à exprimer une longueur en fonction d'une autre, alors qu'on ne peut en mesurer aucune.
- Manipuler les «outils» du calcul littéral dans un contexte concret :
  - Signe "–" devant la parenthèse,
  - Résolution d'une équation.
- «Sentir» tout l'intérêt de «poser» une équation.

3) Déroulement de la séquence.

La séquence se'est déroulée en 2 étapes, l'une de deux heures en classe entière (jusqu'au point *f* inclus) et l'autre d'une heure en demi-groupe (synthèse).

CONSTRUCTION

Elle n'a posé aucun problème. Le calcul de la longueur de chaque côté non plus (point *d*), excepté que les réponses étaient de la forme :

$a + a + a + 1 + 1$ (par exemple).

- «Peux-tu l'écrire plus simplement ?»
- «$3a + 2$».

Tous savaient faire cette réponse, mais aucun n'avait utilisé cette écriture.

RECHERCHE EN GROUPE . (point *e*)

Elle a duré un peu plus d'une heure. Les carrés 6 et 8 ayant un côté compmun, il était acquis pour tous que $AB = a + 3$. Ils savaient d'autre part que l'on voulait avoir $AB = BC$. Mais, que faire de ces informations ? Pour nous, il est bien évident qu'il faut calculer la valeur de BC, ce qui permettra de déboucher sur une équation. Les élèves, eux, n'en savent rien. Ils ont appris à résoudre une équation (séances d'exercices au préalable), mais ils ne perçoivent pas qu'ils vont avoir à utiliser cet outil. Dans quelques groupes, après les avoir laissés chercher, j'ai soufflé qu'il fallait calculer BC.

Comment trouver BC ?

J'ai pu observer trois démarches :

➡ Un groupe, trouvant l'affaire bien trop compliquée, a préféré essayer toutes les valeurs de a en se répartissant la tâche. Ils n'on pas mis longtemps !

- «Et si la valeur de a avait été 1,5 ?»

- «On n'aurait pas trouvé !»

J'ai alors expliqué que je demandais une démonstration, mais il a fallu les stimuler pour les remettre sur les rails.

➡ Un autre groupe a tout de suite remarqué que $BC = AD = IK - LA$.

Remarque : c'est moi qui utilise cette écriture, mais tous les élèves sans exception momntraient avec le doigt :

- «BC, c'est cette longueur-là, moins celle-là».

➡ Les autres groupes ont entrepris de calculer BC. Systématiquement, ils ont essayé d'évaluer la longueur BC par rapport à celle de a **en la mesurant** (en comptant les carreaux).

J'ai pratiquement passé toute l'heure à leur faire confronter leurs copies : la formule établie sur leur feuille n'était pas valable sur celle de leur voisin. Pourquoi ?

Pour $a = 6$, ils trouvaient $BC = 2a + 3$ (voir la figure page 208)

Pour $a = 4$, ils trouvaient $BC = a + 2$

Pour $a = 2$, ils trouvaient $BC = a + 1$.

La description ne prend que quelques lignes, mais c'est véritablement là que se trouvait la difficulté pour ces élèves. Ils se fient à leurs yeux et, même s'ils savent que la valeur de a est inconnue, elle est matérialisée sur leur dessin par une grandeur mesurable, et donc le réflexe est de mesurer.

Il fallait donc s'y prendre autrement et généralement, ils ont tenté de résoudre $OC = JK = OB + BC$.

Mais ils ne connaissaient pas OB, et ils retombaient une nouvelle fois dans le panneau, en essayant de le mesurer ! Il leur a fallu un bon moment avant de bien comprendre.

Mise en équation.

Il fallait maintenant mettre en équation ce qui avait été compris géométriquement.

❑ *Calcul de BC.*

Selon le chemin suivi, les équations différaient, mais revenaient toujours à soustraire une longueur d'une autre (par exemple : $BC = IK - LA$). La plupart des élèves maîtrisant habituellement bien le calcul littéral n'ont pas pensé à mettre la parenthèse quand ils recherchaient cette longueur (exemple : $BC = (5a + 2) - (5 + 2a) = 3a - 3$).

C'est ce qui étonne l'observateur. Les élèves sont tellement absorbés par la résolution de leur problème qu'ils en oublient les règles pourtant connues !

❑ $AB = BC$.

Une fois la valeur de BC trouvée, l'équation $AB = BC$ ($a + 3 = 3a - 3$) était facilement posée, mais la résolution laissait à désirer.

Autant il a été difficile de leur faire comprendre qu'il ne fallait pas compter les carreaux, autant, dans cette partie, ils corrigeaient immédiatement leurs erreurs.

SYNTHESE COLLECTIVE (point *g*) en demi-groupe le lundi suivant.

Avant de commencer, les élèves sont invités à donner leurs impressions sur la séance précédente. Ils étaient emballés et stupéfaits d'avoir mis si longtemps à trouver alors que, somme toute, c'était facile.

- «Puisque c'était facile, qu'est-ce qui vous a gênés ?»
- «Mais on n'avait que des *a* !» s'écrie Géraldine.
- «C'était dur de trouver *BC* »
- «Dans ton groupe, explique-nous comment vous avez fait».

Le puzzle, ainsi que les longueurs des côtés figuraient au tableau, mais de sa place, ce n'était pas facile d'expliquer à la classe.

- «J'ai pris cette longueur-là, moins celle-là…»…après s'être lancée dans des explications confuses, elle s'arrête :
- «Je ne peux pas expliquer, il faut mettre les lettres sur les segments»
- «Très bonne idée. Tiens, voilà la craie…»

Toute la classe a suivi, corrigé et approuvé ses explications, jusqu'à l'obtention de la valeur $a = 3$. Puis, un autre élève a pris sa place pour montrer la démarche de son groupe, qui était différente.

- «Est-il possible de s'y prendre autrement encore ?»

Très désireux d'aller au tableau, ils n'ont pas mis longtemps à trouver d'autres chemins, ce qui nous a permis d'écrire un grand nombre d'équations. Quelques erreurs ont été faites pour le signe «–» devant la parenthèse, et un élève a encore eu le réflexe d'évaluer la longueur de a, mais la classe l'a corrigé sur le champ.

La question «le puzzle réalisé est-il un carré ?» a été soulevée. Un élève a suggéré de vérifier en mesurant et aussitôt un autre a proposé de le vérifier par le calcul. On a donc posé $IL = IK$, ce qui aboutissait à $a = 2$. Conclusion?

- «Le puzzle n'est pas un carré puisque $a = 3$»
- «Si $a = 2$, le puzzle est un carré, mais $ABCD$ est un rectangle».

BILAN

«Qu'avez-vous appris au cours de cette activité ?»

- «Je n'ai rien appris, mais j'ai tout compris» (Perrine)
- «Et pourquoi n'arrivais-tu pas à calculer BC l'autre fois ?»
- «C'est parce qu'on mesurait BC, mais je ne vois pas pourquoi on faisait ça».

La réponse d'Arnaud m'a fait particulièrement plaisir, car il vit douloureusement l'école et participe peu.

- »J'ai appris à mesurer sans les chiffres».

David, pour exprimer son sentiment d'avoir franchi une étape dans l'abstraction dit simplement :

- «J'ai appris à raisonner»,

puis, réalisant qu'il restait du pain sur la planche, avec un sourire,

- «Enfin, un peu…»

D'autres réponses :

- «On peut trouver la longueur d'un côté en posant une équation» (Aymeric)
- «On n'a pas besoin des chiffres pour calculer» (Audrey)
- «On peut calculer une longueur avec des lettres» (Jérôme).
- …

4) Analyse personnelle.

- J'ai proposé pour a les valeurs 2, 4 et 6 dans le but de faciliter la tâche des élèves, mais ce n'était pas une bonne idée. Dessiner le puzzle pour 1,5 ou 3,5 … leur aurait ôté toute envie de partir à tâtons et d'essayer toutes les valeurs de a possibles.

- Et si on avait utilisé des feuilles sans carreaux ?

Le problème aurait été le même, puisqu'un élève, lors de la synthèse au tableau, a eu le réflexe d'évaluer (à l'œil) la longueur de a pour la comparer à celle qu'il voulait déterminer.

Les élèves auraient buté sur la même difficulté, mais il m'aurait été bien plus difficile d'argumenter en leur faisant comparer leurs copies. Or, quand les élèves sont engagés dans une démarche et croient *mordicus* qu'ils sont dans le vrai et il y a tout intérêt à leur fournir des preuves dont ils reconnaissent immédiatement la valeur.

Cette activité a débouché sur une prise de conscience des élèves, mais il est bien entendu qu'elle ne permet pas une complète acquisition du calcul littéral.

Mon rôle est de trouver des activités suffisamment simples et riches à la fois, pour que les élèves puissent y participer, et de doser les approches pour recouvrir du mieux possible les divers aspects du calcul littéral.

Amener les élèves à un niveau d'abstraction supérieur est une tâche délicate et, face à cette difficulté, je ressens le besoin d'en débattre avec des collègues, de tenter des expériences en équipe. J'espère en avoir rapidement l'occasion.

BIBLIOGRAPHIE

IREM des Pays de Loire - Centre du Mans : Activités non publiées.

IREM DE POITIERS

Calcul littéral au collège

Travaux numériques au collège, (fascicules 1 et 2)

Texte du GREM 1988

Sur l'introduction du calcul littéral.