Dans nos classes

Voici une activité qui a permis aux élèves de prendre goût à certains sujets de géométrie comme l'homothétie, d'entretenir des liaisons entre les mathématiques et les autres disciplines, et de percevoir certaines des interactions entre les connaissances mathématiques et l'évolution de l'art et de sa technique.

Suites et Arts plastiques

D.Chabault

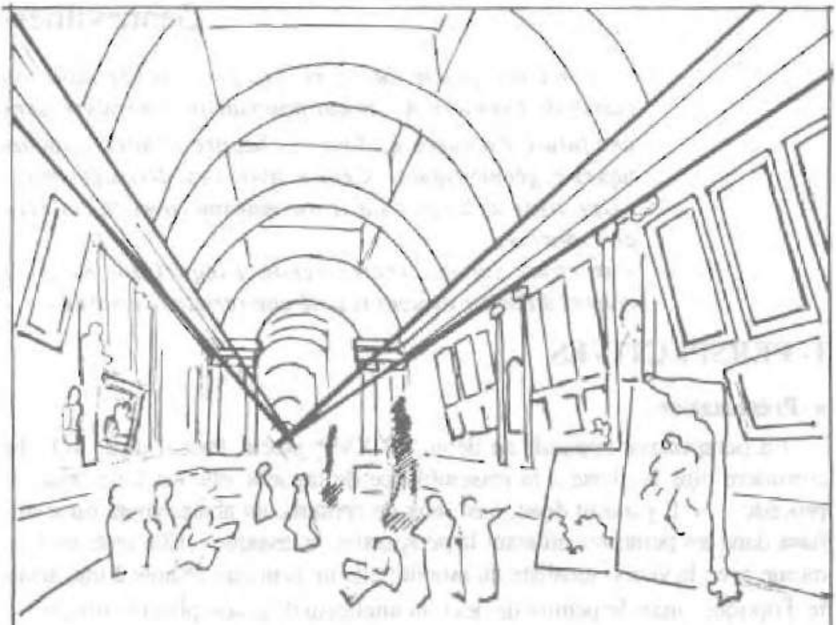
Gennevilliers

Voici une partie du cours, fait cette année dans ma classe de Première A; et qui pourrait se poursuivre dans une future Première L, dans le chapitre «Suites arithmétiques et géométriques». Cette activité s'est déroulée après:
- Une visite du Louvre sur le Romantisme, avec la collègue de Français;
- un cours sur les limites pendant lequel une ou deux œuvres d'Escher avaient suscité une certaine curiosité.

I- PERSPECTIVES

a - Présentation.

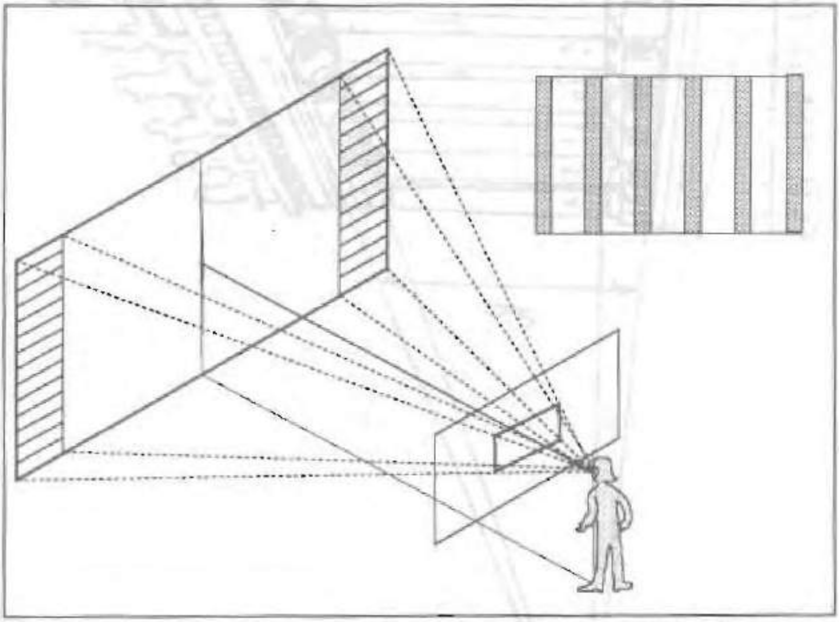
La perspective apparaît au début du XVème siècle. Pascal dira: «On ne considère plus la chose à la ressemblance de laquelle elle est faite, mais le procédé ...». Il y aurait donc, aux yeux de certains, un abaissement du signifiant dans les peintures utilisant la perspective «classique». Elle reste en harmonie avec la vision idéaliste du monde; elle ne peut être réduite à une affaire d'optique; mais le peintre devient un intellectuel, et non plus un artisan.



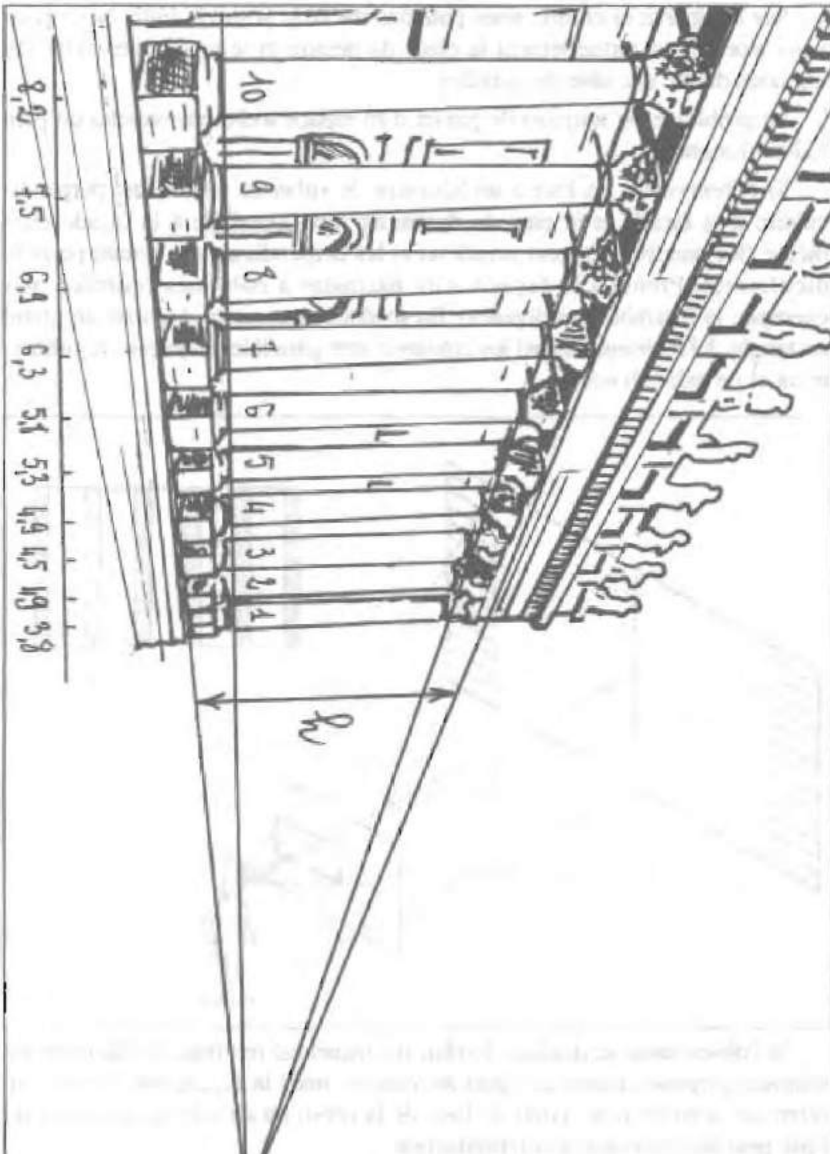
Sur le tableau ci-contre, nous pouvons tracer le point de fuite. Nous pouvons alors situer virtuellement la place du peintre et le niveau des yeux (ce qui nous donne une idée de sa taille).

Le problème est toujours de passer d'un espace tridimensionnel à un plan bidimentionnel.

Si l'observateur est face à un bâtiment, le «plan de vision» est perpendiculaire à la façade et le plan du dessin est alors parallèle à la façade elle-même (les parallèles restent parallèles et les perpendiculaires restent perpendiculaires). Prenons la façade d'un bâtiment à colonnes (comme, par exemple, la Chambre des députés). En schématisant, nous obtenons un grand rectangle, à l'intérieur duquel les colonnes sont parallèles, espacées régulièrement et de même hauteur.



Si l'observateur se déplace, le plan sur lequel est reproduit le bâtiment est toujours perpendiculaire au «plan de vision», mais la façade est dessinée en référence à un horizon, point de fuite de la photo ou du tableau. Le point de fuite peut être extérieur à la reproduction.


8,2
7,5
6,9
6,3
5,8
5,3
4,9
4,5
3,8
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Sur la photo ci-contre, et en tenant compte des approximations de mesure (erreurs de parallaxe, erreurs dues à la photocopie), nous trouvons en commençant par la colonne la plus éloignée de l'observateur, les hauteurs suivantes :

colonne 1 $h_1 \approx 3{,}8$ cm

colonne 2 $h_2 \approx 4{,}1$ cm

$\dfrac{h_2}{h_1} \approx 1{,}09$

....

colonne 10 $h_{10} \approx 8{,}2$ cm

Nous vérifions que tous les rapports $\dfrac{h_n}{h_{n-1}}$ sont approximativement égaux à 1,09. Il s'agit là d'une suite géométrique de raison environ 1,09 et de premier terme $h_1 \approx 3{,}8$.

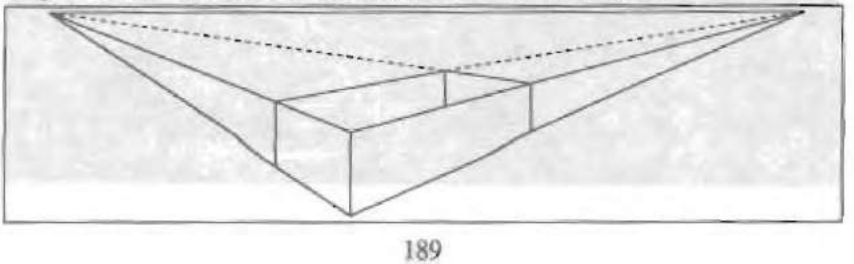
Géométriquement, nous pouvons considérer une homothétie ayant pour centre le point de fuite et pour rapport, celui trouvé précédemment. L'image d'une droite est une droite parallèle (les colonnes restent parallèles) l'image d'une droite contenant le centre de l'homothétie est globalement invariante (le haut du bâtiment, le haut des colonnes, le bas de l'escalier concourent au point de fuite) et l'image d'un segment de longueur ℓ est un segment de longueur $|k|.\ell$ (k étant le rapport de l'homothétie).

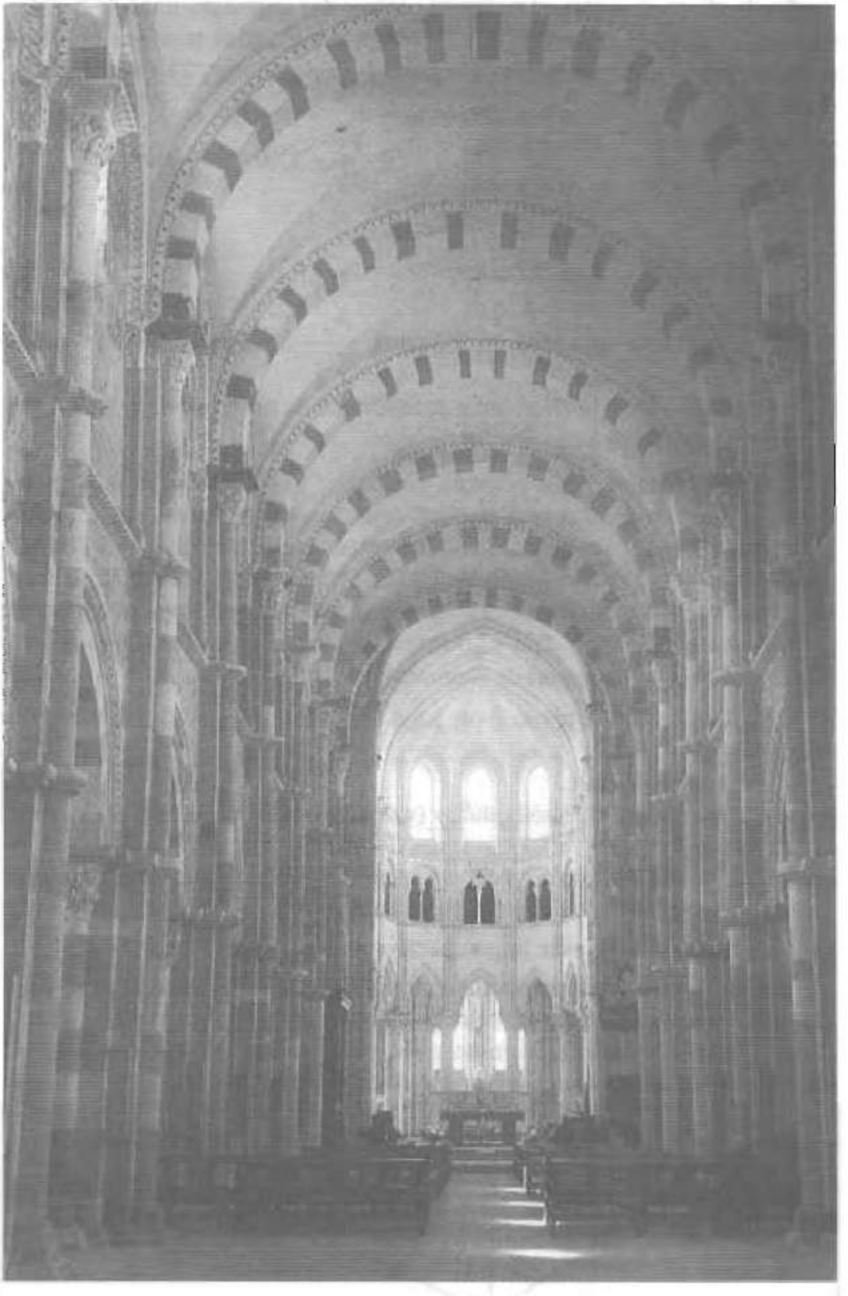
Sur cette deuxième photo (voir page suivante), nous pouvons refaire le même travail :

- trouver le point de fuite,
- trouver le rapport de l'homothétie (valeur approchée), raison de la suite géométrique,
- et même dessiner la voûte plein cintre que la photo ne permet pas de voir (puisque l'image d'un demi-cercle est un demi-cercle...).

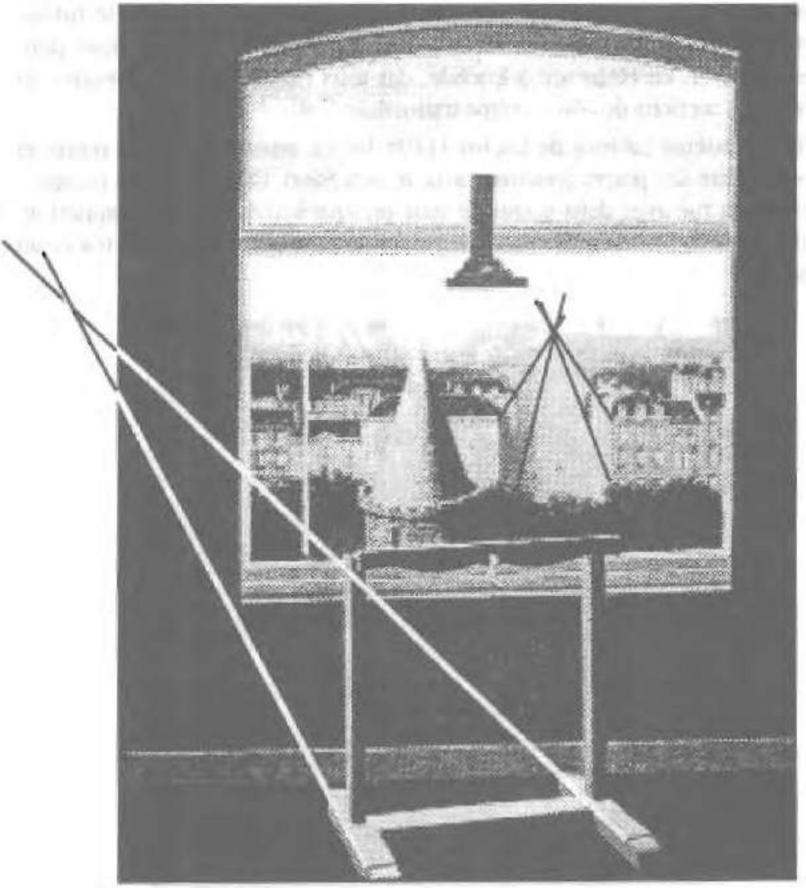
b) Les artistes jouent avec la perspective.

Jusque là, nous nous sommes préoccupés de la perspective centrale à un point de fuite. Bien souvent, deux points de fuite sont nécessaires, l'un à droite, l'autre à gauche, comme pour représenter la boîte ci-dessous. Cependant, les deux points de fuite restent au niveau des yeux.





Les artistes, dans certaines toiles, «jouent» avec la perspective. Dans ce premier tableau, intitulé «les promenades d'Euclide» (1953) de Magritte (1898-1967), le peintre est dans lapièce.



Au premier plan, le chevalet dessiné en perspective donne l'idée de profondeur à l'intérieur de la pièce. Le plan de projection (plan du dessin) est «presque» parallèle aux murs de la pièce: les lignes horizontales restent «presque» parallèles entre elles: nous obtenos là le deuxième plan. Le chevalet sert de support au paysage dessiné sur la toile, comme la fenêtre qui permet de voir à l'extérieur, ce qui forme le troisième plan. L'observateur est face à la rue, les trottoirs et les façades sur rue sont dessinées en perspective, le point de fuite est dans le lointain à la heuteur des yeux du peintre. Le plan de vision est perpendiculaire aux façades des maisons (derrière le rideau d'arbres), elles conservent des fenêtres rectangulaires ou carrées. Nous pouvons observer, en référence à Euclide, des toits en trzapèze ou triangles, et différentes sections de cône: coupe triangulaire.

Ce deuxième tableau de Escher (1898-1971), intitulé: «Nature morte et rue» présente des points communs avec le précédent. On retrouve la perspective dans la rue avec deux points de fuite presque symétriques par rapport au «milieu» de la peinture; ici l'un des points de fuite est utilisé pour tracer un virage.

Autour de la place, les façades «presque» parallèles au plan du tableau se confondent ainsi avec les derniers livres. Lorsqu'il peint ce tableau, Escher est entre deux «périodes»:

- celle des paysages (1929-1937)

et

- celle des métamorphoses (1937-1945).

L'année 1946 semble marquer le début de la période des perspectives, que l'on situe environ de 1946 à 1956, dans l'œuvre d'Escher.

Dans ce tableau, «Un autre monde I», un même point de fuite sert à plusieurs perspectives.*(voir page ci-contre)*

➡ Pour regarder les colonnes latérales, l'observateur (ici, le peintre) est debout le regard face à l'horizon.

Les hauteurs des colonnes sont les termes successifs d'une suite géométrique:

- hauteur du pilier le plus proche $u_1 = 5{,}9$ $\quad \dfrac{u_1}{u_2} = 1{,}5$
- hauteur du pilier suivant $u_2 = 3{,}8$ $\quad \dfrac{u_2}{u_3} = 1{,}5$
- puis $u_3 = 2{,}6$

Cette suite a pour premier terme $u_1 = 5{,}9$ et pour raison 2/3. On pourrait poursuivre la construction à l'infini, mais elle ne serait plus «lisible».

➡ pour regarder le haut du tableau, on peut imaginer l'observateur «couché à plat ventre» au-dessus d'une tour qu'il représente. Le point de fuite est alors appelé le «nadir».

On retrouve les termes d'une suite géométrique de même raison que la précédente (environ 2/3) si l'on considère ici les largeurs entre deux colonnes.

➡ pour regarder le bas du tableau, on peut imaginer le peintre «couché sur le dos», regardant vers le haut: le point de fuite est appelé de «zénith».

On retrouve la même raison que précédemment:

largeur $v_1 = 4{,}25$ $\quad \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{2}{3}$

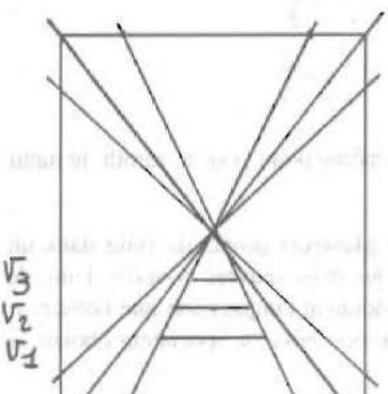
$v_2 = 2{,}8$ $\quad \dfrac{v_3}{v_2} = \dfrac{2}{3}$

$v_3 = 1{,}9$

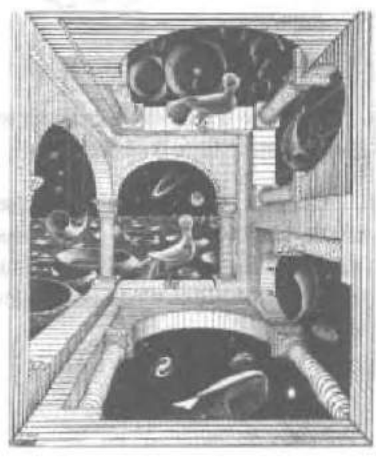
L'astuce d'Escher a été de se servir du même point pour le zénith, le nadir et le point de fuite à l'horizon.

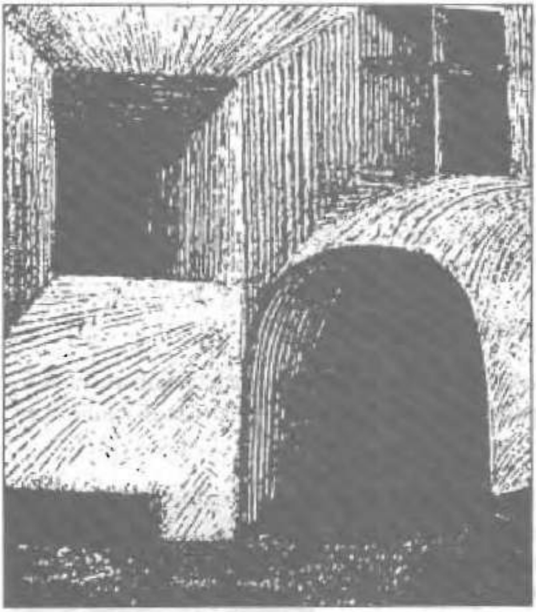
L'astuce peut également se servir de plusieurs points de fuite dans un même tableau. C'est le parti utilisé pour les deux œuvres ci-après, l'une de Vasarely, l'autre de Escher. Ces tableaux donnent l'impression que l'observateur a le choix entre plusieurs pistes. Le peintre laisse le spectateur choisir sa voie.

Un Autre Monde (1)



Un Autre Monde (2)





VASARELY

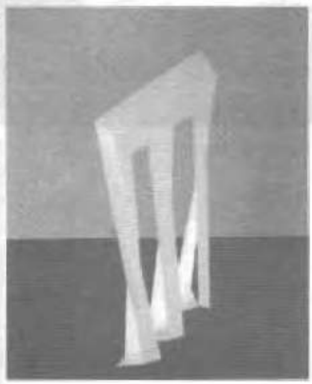
ESCHER

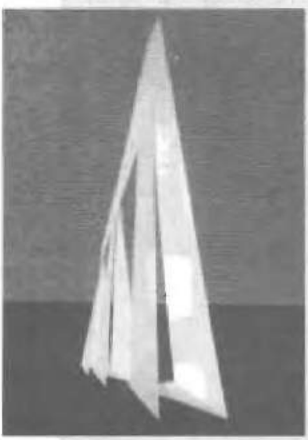
Les sculpteurs aussi, peuvent utiliser de telles méthodes tel Tjeerd Alkema dont les sculptures anamorphoses, en hommage à Mozart, furent inaugurées à Gennevilliers en Novembre 1991.

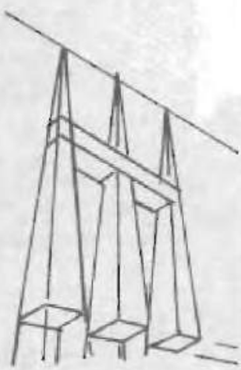
Voilà ce que dit l'un des textes les plus anciens à ce sujet:«*Maintes fois, et avec non moins de plaisir que d'émerveillement, on regarde quelques-uns de ces tableaux ou cartes de perspectives dans lesquels, si l'œil de celui qui les voit n'est pas placé au point déterminé, il apparaît tout autre chose que ce qui est peint, mais, regardé ensuite de son point de vue, le sujet se révèle selon l'intention du peintre ...*» (texte tiré de *Practica della perspectiva* publié en 1559 à Venise par Danielo Barbero).

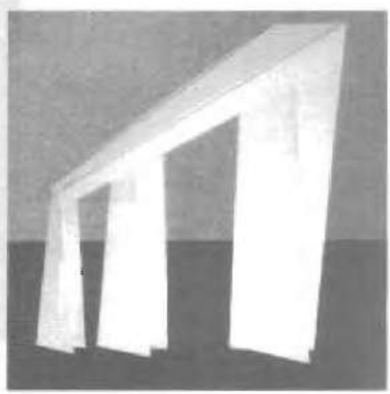
Dans l'anamorphose, le sujet déformé sciemment et scientifiquement et le spectateur doit se déplacer pour percevoir tout ce que l'artiste a voulu faire voir.

Pour la lettre **M**, les différents points de fuite «suspendus à un fil» permettent au spectateur attentif d'interpréter cette sculpture de différentes façons suivant la place qu'il occupe et la lumière qui joue sur les «faces» du **M**.





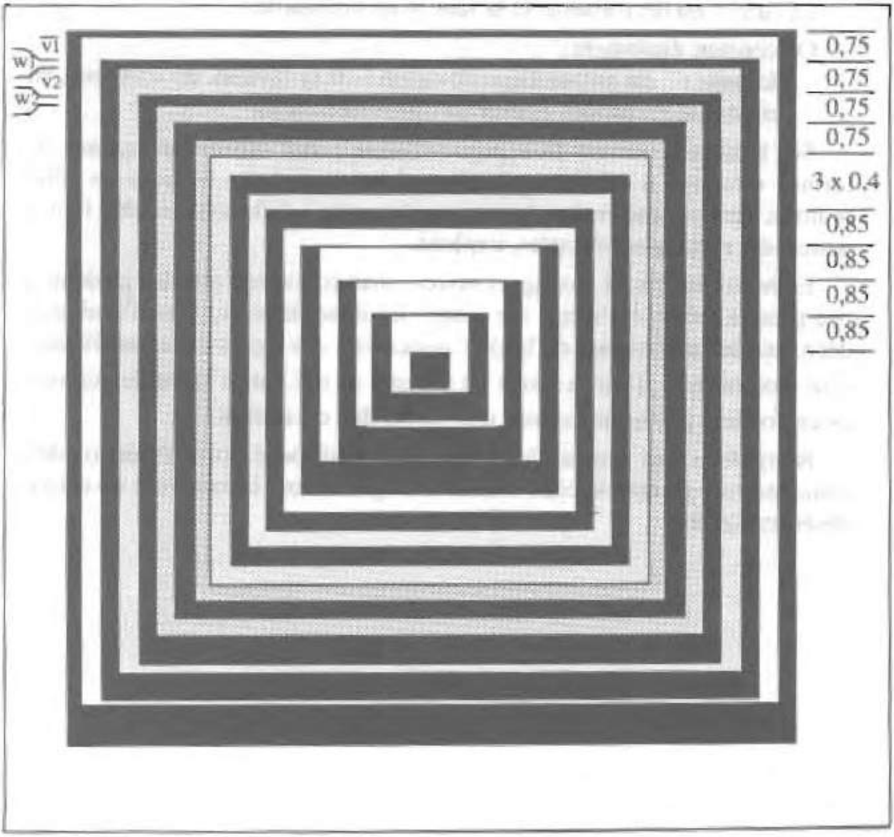




II - Donner du volume à une surface plane.

On retrouve sur ce tableau de VASARELY, un point d'intersection des diagonales (points de fuite, Cf. Tableau d'Escher, «Un autre monde I») lié à un jeu subtil de lumières.

En mesurant les épaisseurs des différentes «bandes» constituant le haut du tableau, nous pouvons remarquer :
- quatre intervalles égaux (bande blanche + bande noire) environ 0,75 cm ;
- puis trois bandes qui permettent de changer de couleur (la bande centrale ayant pour épaisseur environ 0,4 soit la moitié de 0,8, centre de l'intervalle [0,75 ; 0,85] ;
- puis d'autres intervalles égaux (bande blanche + bande noire) environ 0,85 cm.



Soit :

(v_n) la suite des mesures des bandes blanches du haut,
(v'_n) la suite des mesures des bandes blanches du bas,
(w_n) la suite des mesures des bandes noires du haut,
(w'_n) la suite des mesures des bandes noires du bas.

On obtient :

$v_1 \approx 0{,}65$	suite	$w_1 \approx 0{,}1$	suite
$v_2 \approx 0{,}6$	arithmétique	$w_2 \approx 0{,}15$	arithmétique
$v_3 \approx 0{,}55$	de raison	$w_3 \approx 0{,}2$	de raison
$v_4 \approx 0{,}5$	– 0,05 environ	$w_4 \approx 0{,}25$	+ 0,05 environ

La suite v est décroissante et la suite w est croissante.

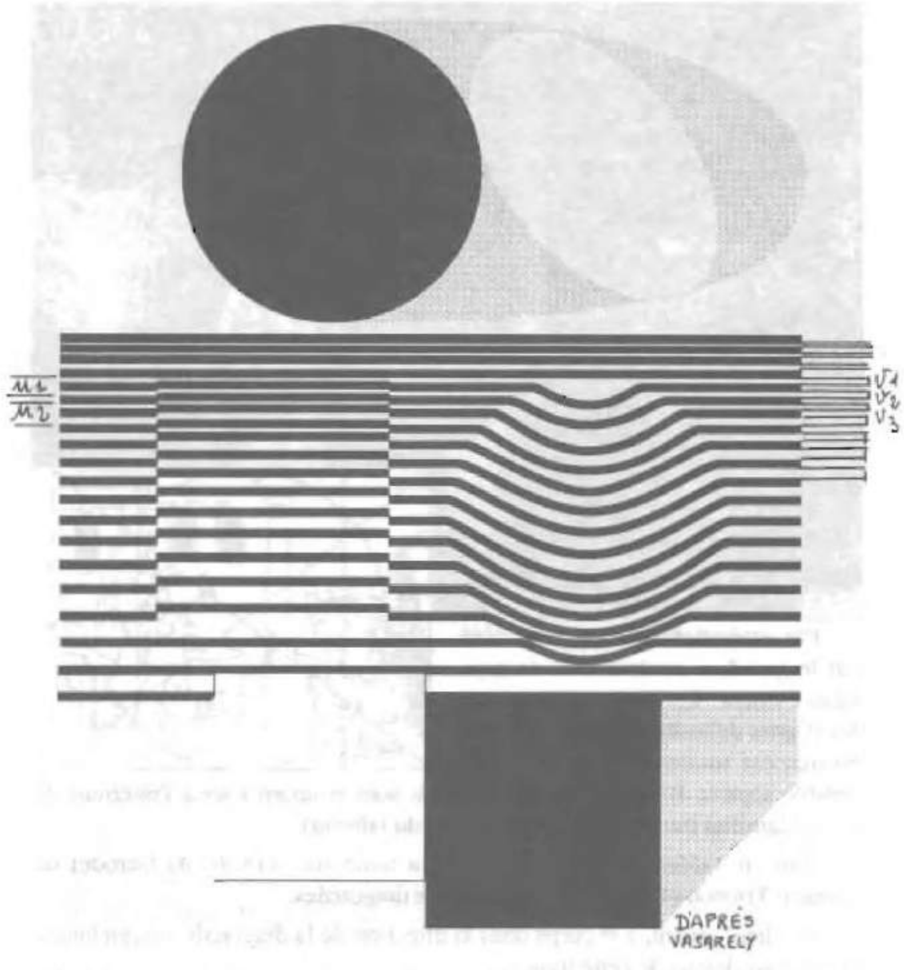
On constate également :

la suite v' est arithmétique de raison (– 0,1) environ, décroissante, en mesurant les bandes à partir du centre du tableau.

Sur le tableau suivant *(voir page suivante)*, nous voyons un passage de formes «rondes» à des formes rectangulaires : quelques sections de cône (ellipse, cercle), une recherche de la sphère par «déformation» des lignes noires, des rectangles, triangles, trapèzes.

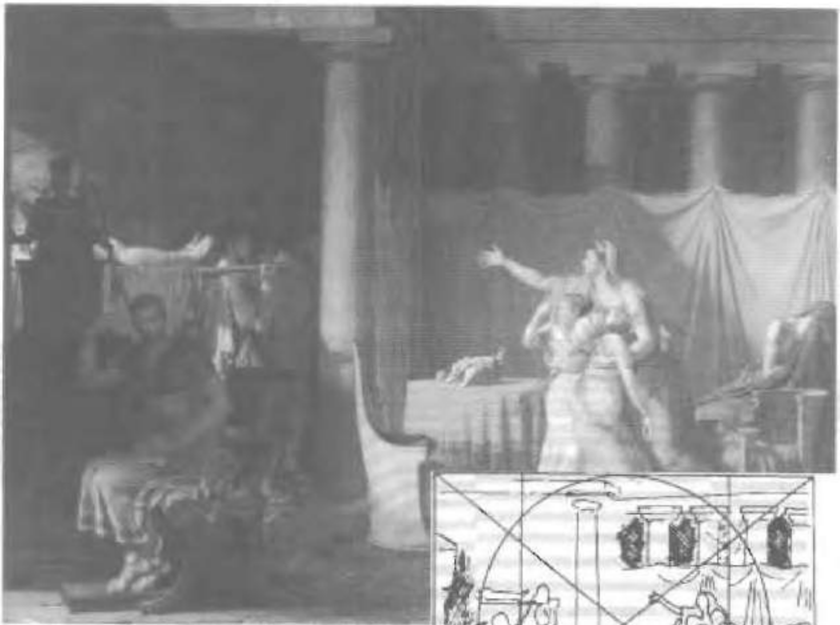
En nous intéressant aux lignes noires, nous constatons qu'elles gardent, à peu près, la même épaisseur. Par contre, les lignes blanches sont d'épaisseur décroissante (u_n)(de haut en bas) et associées à des lignes blanches d'épaisseur croissante (v_n) sur la droite du tableau, ce qui donne l'idée de volume, de profondeur puisqu'une sphère nous apparaît à cet endroit.

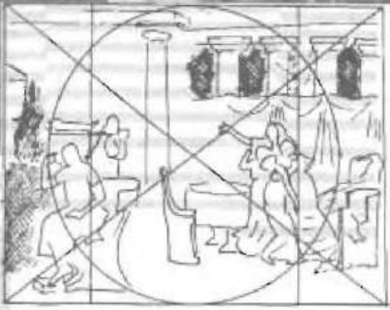
Rappelons que Pascal donnera une définition d'ordre projectif des coniques, tout partant du cône et non de la sphère dont la recherche du centre obsèdera Képler.



III - Lecture géométrique d'un tableau : lignes et points particuliers.

Commençons par tracer les diagonales du tableau ci-dessous : *»Les licteurs rapportent à Brutus les corps de ses fils»* de David. La diagonale «descendante» nous laisse apercevoir les fils morts, dont nous n'apercevons que les jambes, et la lumière éclaire les femmes vivantes au dessus de cette diagonale. Brutus, complètement dans l'ombre, se situe entre les deux diagonales.





Par «rabattement» du petit côté sur le grand, le contraste est de nouveau évident : les femmes sont entre les llignes délimitant les carrés, mais Brutus est totalement exclus. Tout semble séparer Brutus et les femmes ; ils sont pourtant tous à l'intérieur du cercle familial (tangent aux grands côtés du tableau).

Dans le tableau ci-après : *»Atala au tombeau»* (1808) de Girodet de Roussy-Trioson (1767-1824).. traçons les diagonales.

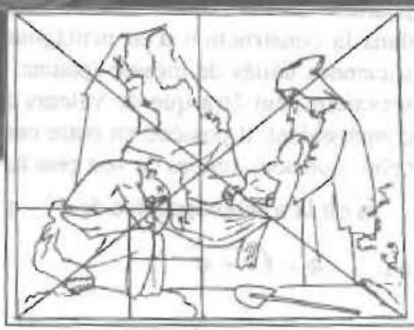
L'indien, vivant, a le corps dans la direction de la diagonale «ascendante» et il est au-dessus de cette ligne.

Le moine, personnage médiateur entre des morts et celui des vivants, à la tête de cette diagonale.

Atala a encore le corps dans la direction ascendante, mais se situe sous cette diagonale. Elle est par contre éclairée par la diagonale «descendante» ; la lumière, venue du «très haut», représentée par la croix, l'illumine par delà la mort.

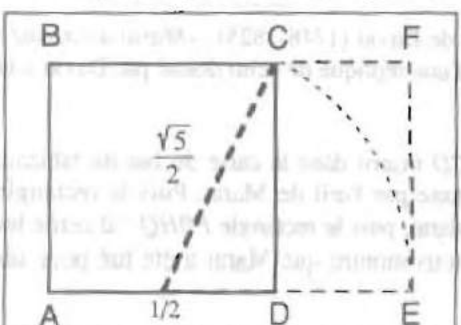
Tous ces personnages se situent entre les lignes de rabattement.

Le nœud du tableau se situe, peut-être, autour des bras de l'indien, qui



enserre les jambes de la jeune fille, comme nous le laisse supposer le tracé des rectangles d'or (*ABCD*, *DCFE*, *FCGH*,...).

Un rectangle est un rectangle d'or lorsque l'égalité: $\frac{L}{l} = \frac{l}{L - l}$ est vérifiée. Cette égalité dans laquelle L et l représentent les mesures des côtés du rectangle (mesures non nulles et non égales), peut s'écrire: $L^2 - lL - l^2 = 0$. Soit en prenant pour unité la largeur l, c'est-à-dire: $l = 1$, $L^2 - L - 1 = 0$.



Cette équation admet pour solution le nombre φ, seule solution positive $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Pour construire un tel rectangle, prenons l'un des carrés obtenu, après rabattement, dans un tableau.

$\frac{AE}{AB} = \varphi$ Alors *ABFE* et *CDEF* sont des rectangles d'or.

En effet $\frac{AE}{AB} = \varphi = \frac{CD}{DE}$. Nous obtenons ensuite, par rabattements successifs, une suite de rectangles d'or.

La suite définie par: $u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} \times \varphi$ est une suite géométrique de raison φ .

Or, $\varphi^2 = \varphi + 1$, d'où $u_1 + u_2 = u_3$.

puis $u_4 = \varphi . u_3 = \varphi(u_1 + u_2) = \varphi . u_1 + \varphi . u_2 = u_2 + u_3$.

Nous admettons que nous avons pour tout n, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (n entier naturel): nous avons obtenu une suite de Fibonnacci. Le nombre φ que certains appellent *proportion harmonieuse*, est un nombre irrationnel. Il apparaît pourtant dans la construction de certaines œuvres architecturales, picturales, dans la construction d'un pentagone, dans la nature (fleurs,...), dans les anciennes unités de mesure (paume, palme, empan ...): les anciens ne se servaient peut-être que de valeurs approchées de ce nombre, mais ils le connaissaient. Il possède en outre certaines propriétés mathématiques, telles celles que nous venons de voir plus haut. En voici deux autres:

φ est la solution positive de $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. On peut écrire $\varphi^2 = \varphi + 1$

ou $\varphi = \sqrt{1 + \varphi}$ ou $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

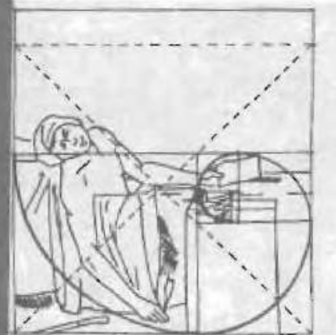
ou $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}$ ou $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}$

ou $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}}$ ....

....

Prenons maintenant le tableau de David (1748-1825): *«Marat assassiné»* (1793) (il ne s'agit d'ailleurs que d'une réplique de celui donné par David à la Convention).

Traçons le rectangle d'or *ABCD* inscrit dans le carré du bas du tableau. L'un des côtés, le côté [*AB*], passe par l'œil de Marat. Puis le rectangle *FBCE*: il contient l'écritoire de Marat, puis le rectangle *FBHQ* : il cerne les papiers et l'encrier. *Ce tableau nous montre que* Marat a été tué pour ses

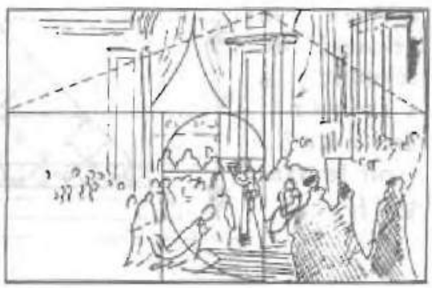


écrits. La droite *(IJ)* passant par le centre du carré souligne la blessure et le bras posé sur des papiers et la main tenant encore ses écrits. La spirale d'or finit de nous convaincre : elle commence par épouser la forme du bras qui tient la plume puis nous ramène au papier écrit, ou en train d'être écrit avant l'assassinat, et, après avoir englobé l'encrier, nous attire vers les écrits reposant sur l'écritoire.

D'autres tableaux comme *«Le couronnement de Joséphine»* de David, *«Le radeau de la méduse»* de Géricault nous ont permis de retrouver les éléments d'étude vus précédemment : diagonales, carrés, rectangles d'or, auxquels nous avons ajouté ce que les peintres appellent les pyramides, le sommet de la pyramide étant, dans ces deux tableaux, l'un des sommets d'un rectangle d'or.

Pour ces deux tableaux, les élèves ont travaillé seuls. Voici deux interprétations possibles de l'une des tableaux.

- La spirale a pour centre approximatif la tête de l'empereur qui pose lui-même la couronne sur la tête de Joséphine.



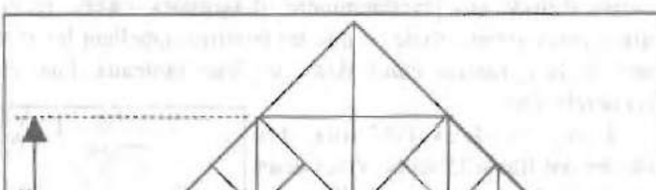
- La spirale a pour centre approximatif la tête du Pape et englobe sa suite. Ils sont en quelque sorte dépossédés de ce couronnement.

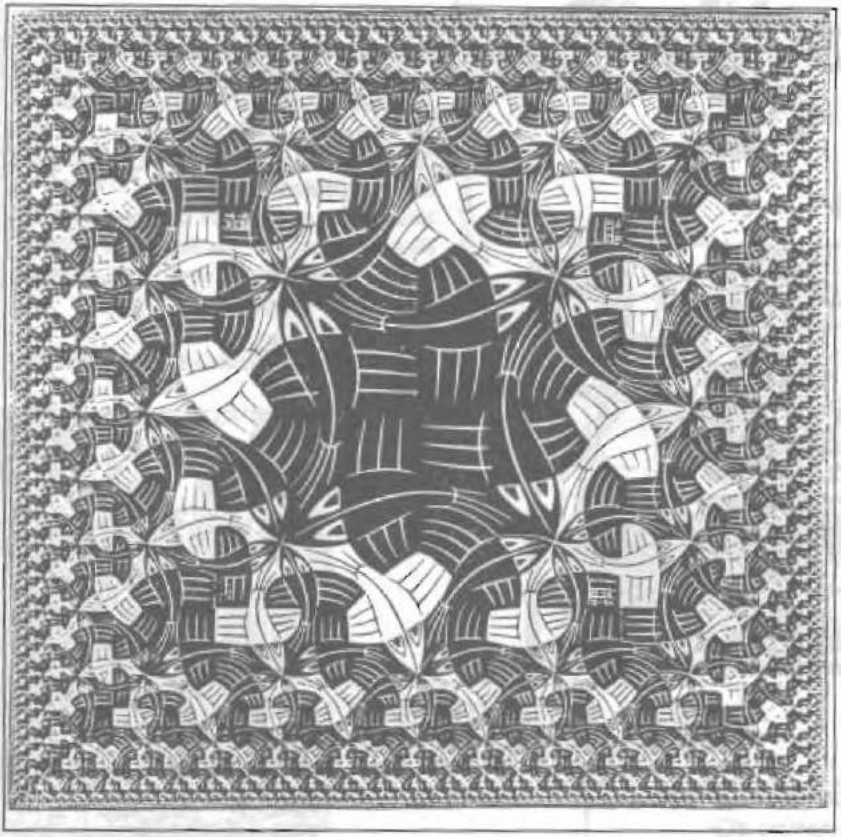
IV - Retour sur les suites et les limites de suites.

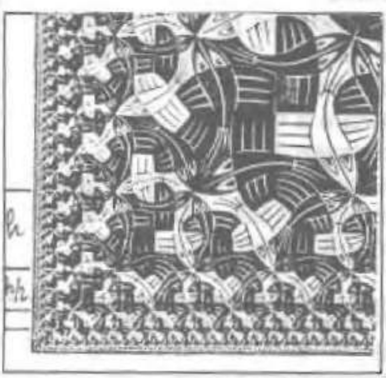
Les diagonales sont également importantes dans ce tableau : *«Limites carrées»* de Escher. Nous nous trouvons confrontés à des suites géométriques. Mesurons les hauteurs des triangles. *(voir page suivante)*

Limite de la suite h : 0 Limite de la suite $s = h_1 + h_2 = \dots$

On peut vérifier sur le tableau la véracité du résultat, à savoir : $\lim s = 2 \times 3,3$ (soit la hauteur H).






h
h/2


h
h/2
h/4