Etudes

Puissance d'un point par rapport à une conique

Jean de Biasi
Université Paul Sabatier - Toulouse

Dans les livres de géométrie d'il y a a trente ans et plus, une place importante était accordée à l'étude :
- I - de la puissance d'un point par rapport à un cercle, des cercles orthogonaux, des faisceaux de cercles.
- II - des coniques,

le cercle apparaissant comme étant une conique particulière, ellipse dont les foyers sont confondus.

Mais, nulle part, nous n'avons trouvé le fait que les notions développées en I pouvaient être généralisées aux coniques quelconques. C'est ce que nous montrons dans cet article.

Avertissement : cette étude se situe dans le cadre de la géométrie plane euclidienne et de la géométrie plane projective.

I - Equation normalisée d'une conique.

Soient un système d'axes orthonormés (Ox ; Oy) et Γ la conique définie par le foyer F,la directrice associée D, l'excentricité e ; Γ est l'ensemble des points M du plan de projection orthogonale μ sur D vérifiant $MF - eM\mu = 0$.

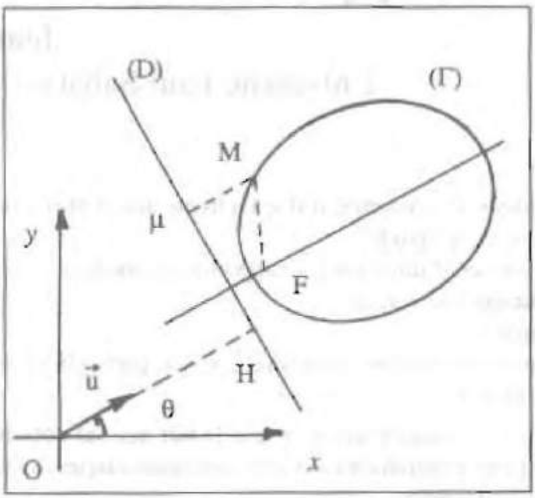
Si α, β sont les coordonnées de F et si $x\cos\theta + y\sin\theta - h = 0$ est l'équation de D avec $h = \overline{OH}$, (H projection orthogonale de O sur D), mesuré suivant le vecteur unitaire $\vec{u}$ (cosθ, sinθ) de la normale à D et si m (x , y) est un point quelconque du plan, l'expression

$$\Gamma(x\,,\,y) = MF^2 - e^2M\mu^2$$

vaut $\Gamma(x\,,\,y) = x^2(1 - e^2\cos^2\theta) + y^2(1 - e^2\sin^2\theta) - 2xye^2\sin\theta\,\cos\theta -$

$$2x(a - e^2h\cos\theta) - 2y(\beta - \varepsilon^2h\sin\theta) + \alpha^2 + \beta^2 - e^2h^2 \qquad (1)$$

$\Gamma(x\,,\,y) = 0$ est appelée équation normalisée de la conique Γ de foyer F (α , β), de directrice associée D ($x\cos\theta + y\sin\theta - h = 0$) et d'excentricité e.



Cas particulier :

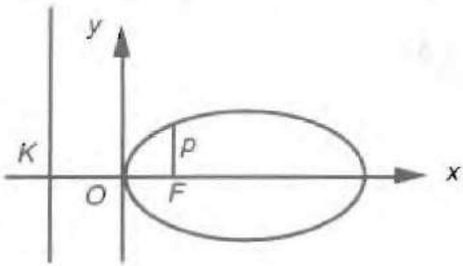
Si l'on prend F sur Ox ($\alpha > 0$, $\beta = 0$), D perpendiculaire à Ox (θ=0) en K avec $h = \overline{OK} < 0$, O appartenant à Γ (O est alors un sommet de Γ et Oy est tangent à Γ en O) l'équation normalisée de Γ est, dans ce cas :

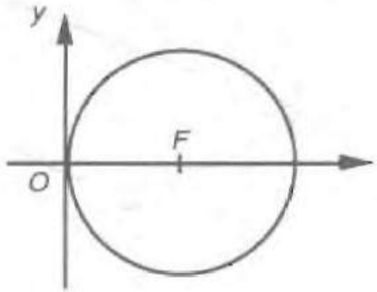
$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px = 0 \qquad (2)$$

où $p = \alpha - e^2h$ (avec $\alpha > 0$, $h < 0$) représente la longueur de la demi-corde focale de Γ perpendiculaire à l'axe focal (p est le paramètre de Γ).

Remarquons que $\alpha = \dfrac{p}{1+e}$ et $h = \dfrac{-\alpha}{e}$.

Le cas du cercle, ellipse dont les foyers sont confondus, apparaît comme le cas limite $e = 0$, (F est le centre du cercle, la directrice D est la droite de l'infini et le rayon vaut p).





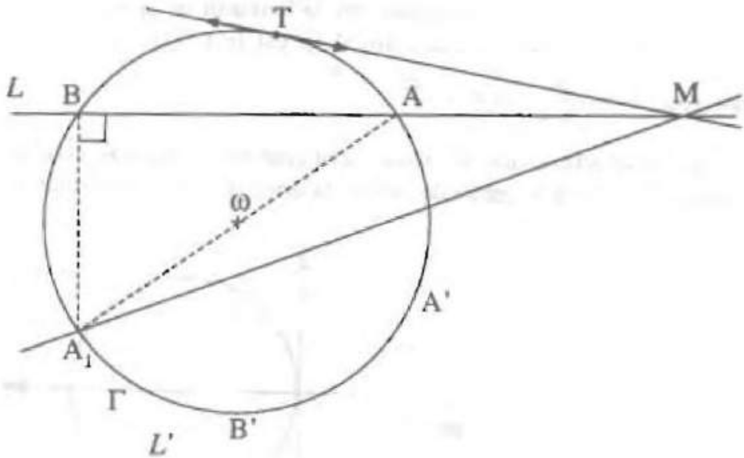
II - Puissance d'un point par rapport à un cercle (rappel).

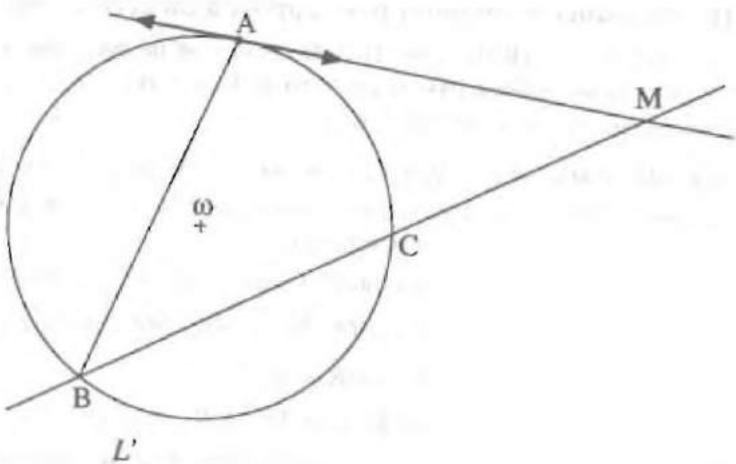
Soient Γ le cercle de centre O et de rayon r, M un point quelconque de son plan. Si une droite L passant par M coupe Γ en A et B et si A_1 est le point diamétralement opposé à A sur Γ, on a :

$\overline{MA}\,.\overline{MB} = \overrightarrow{MA}\,.\overrightarrow{MA_1} = MO^2 - R^2$ et par suite le produit $\overline{MA}\,.\overline{MB}$ est indépendant de L et ne dépend que de Γ et de M. Ce produit est appelé ***puissance*** de M par rapport à Γ et se note $\Gamma(M)$.

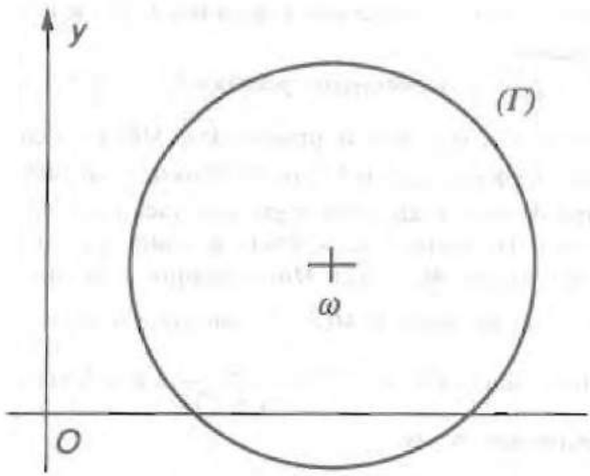
Si L, L' sont alors deux sécantes à Γ passant par M et coupant Γ respectivement en A, B et A', B', on a : $\overline{MA}\,.\overline{MB} = \overline{MA'}\,.\overline{MB'}$ (si L est tangente à Γ en T cette égalité devient $\overline{MA}\,.\overline{MB} = MT^2$).

Réciproquement, si les droites AB, $A'B'$ se coupent en M et si $\overline{MA}\,.\overline{MB} = \overline{MA'}\,.\overline{MB'}$ alors les quatre points A, B, A' et B' son cocycliques et si, plus particulièrement, un point M du côté $[BC]$ du triangle ABC est tel que $MA^2 = \overline{MB}\,.\overline{MC}$, la droite (MA) est tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC.





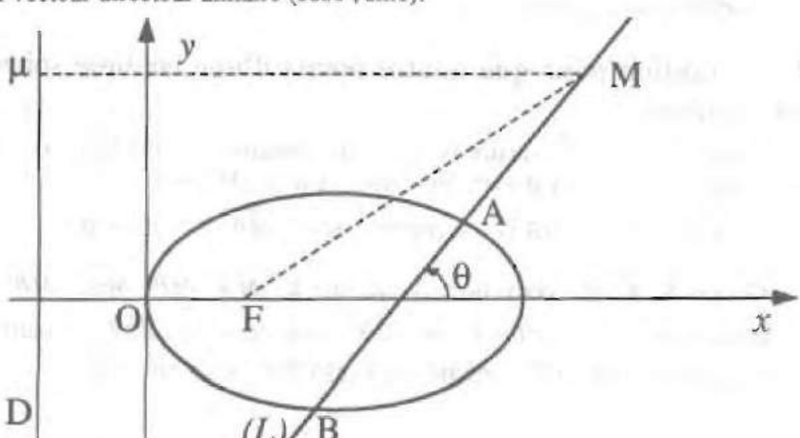
Analytiquement, si l'équation normalisée de Γ dans un repère orthonormé est $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + \beta y + \gamma = 0$ et si M a pour coordonnées (x, y), $\Gamma(M)$ vaut précisément $f(x, y)$, premier membre de l'équation normalisée de Γ. En particulier, la puissance de l'origine des coordonnées par rapport à Γ vaut γ.



III - Puissance d'un point par rapport à une conique quelconque.

Définition : Soit Γ une conique quelconque définie par les éléments F, D, e (foyer, directrice associée, excentricité). Il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation normalisée de Γ est (2), repère que nous choisissons pour alléger les calculs.

Soit $M(x\ ,\ y)$ un point quelconque du plan de Γ et L une droite passant par M et telle que $(Ox\ ,\ L) = \theta$. Une représentation paramétrique de L est $x' = x + t\cos\theta\ ,\ y' = y + t\sin\theta$ où, si M' est un point «courant» sur L le paramètre t représente la mesure algébrique de $\overline{MM'}$ sur un axe porté par L et de vecteur directeur unitaire $(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$.



Les valeurs t_A et t_B de t correspondant aux points A et B de $\Gamma \cap L$ sont les racines de l'équation
$(1 - e^2\cos^2\theta)t^2 + 2((1 - e^2)x\cos\theta + y\sin\theta - p\cos\theta)t + (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px = 0.$

On voit en particulier que le produit $\overline{MA}.\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\theta)$ vaut $\Gamma(x , y)$ et donc, ne dépend que de Γ et de M et pas de L. De plus, d'après la première partie de cette étude, cette expression vaut aussi $MF^2 - e^2M\mu^2$. Enfin, pour $e = 0$, la conique Γ est le cercle de centre $\omega(p, o)$ et de rayon $R = p$, F est en ω, MF vaut $M\omega$. Lorsque e tend vers zéro, $\overline{MA}.\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\theta)$ tend vers $MO^2 - R^2$, puissance de M par rapport à ce cercle ; en effet, $e^2M\mu^2 = e^2x^2 + \dfrac{2pex}{1+e} + \dfrac{p^2}{(1+e^2)^2}$ a pour limite $p^2 = R^2$.
Ceci nous conduit à donner la

Définition :

Soit une conique Γ définie par les éléments F, D, e (foyer, directrice associée, excentricité) M, un point quelconque de son plan, μ la projection orthogonale de M sur D.
Si L est une droite quelconque passant par M formant avec l'axe focal de Γ un angle de mesure θ et coupant Γ en A et B, l'expression $\overline{MA}.\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\theta)$ est indépendante de la direction de L et ne dépend que de Γ et de M ; elle vaut également $MF^2 - e^2M\mu^2$ et $\Gamma(x , y)$ où $\Gamma(x , y)$ est le premier membre de l'équation normalisée de Γ dans un repère orthonormé quelconque.
Cette expression, notée $\Gamma(M)$, est appelée ***puissance*** *du point M par rapport à la conique Γ.*

4 - Condition pour que quatre points d'une conique soient cocycliques.

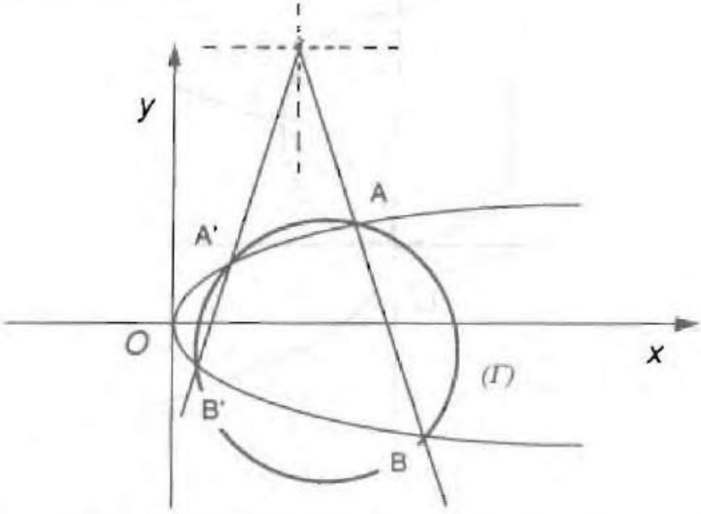
Soient A, B, A', B', quatre points d'une conique Γ d'axe focal xx'. Si $(x'x , AB) = \theta$ et $(x'x , A'B') = \theta'$ et si $AB \cap A'B' = \{M\}$ on a :

$$\Gamma(M) = \overline{MA}.\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\theta) = \overline{MA'}.\overline{MB'}(1 - e^2\cos^2\theta').$$

Or, (A, B, A', B' cocycliques) équivaut à $(\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MA'}.\overline{MB'})$ c'est-à-dire à $(1 - e^2\cos^2\theta = 1 - e^2\cos^2\theta')$ soit $(\cos^2\theta = \cos^2\theta')$. Ecartant le cas de $\theta = \theta'$ (AB , $A'B'$ confondues) il reste $\theta = -\theta'$. Il en résulte la

Proposition :

Quatre points A, B, A', B' d'un conique Γ sont cocycliques si et seulement si les droites AB, A'B' ont des bissectrices parallèles aux axes de Γ (on dit aussi : si et seulement si AB et A'B' sont également inclinées sur les axes de Γ).



5 - Conique radicale de deux coniques.

Définition : Etant données deux coniques Γ et Γ' d'équations normalisées $\Gamma(x , y) = 0$ et $\Gamma'(x , y) = 0$, l'ensemble des points M (x , y) du plan ayant même puissance par rapport à ces deux coniques, est défini par l'équation (non normalisée en général) :

$$\Sigma(x , y) \equiv \Gamma(x , y) - \Gamma'(x , y) = 0.$$

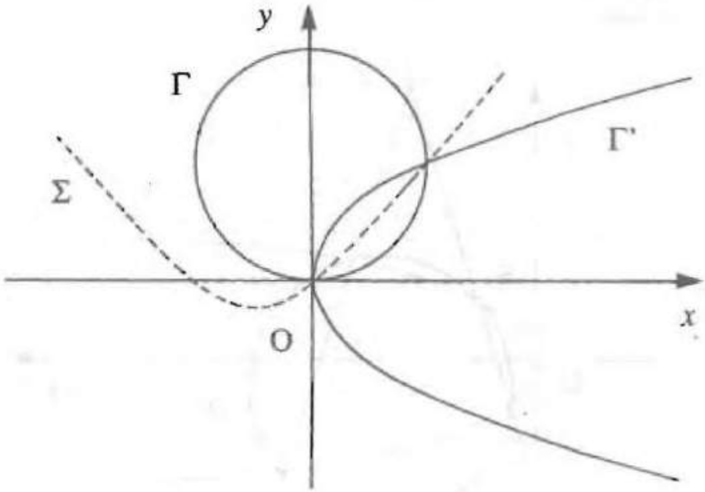
Cet ensemble est donc en général une conique Σ, éventuellement décomposée en deux droites et réduit à une droite lorsque $\Gamma(x , y)$ et $\Gamma'(x , y)$ ont les mêmes termes du second degré (coniques ayant les mêmes directions asymptotiques : cas de deux cercles notamment). Cette conique, appelée ***conique radicale*** de Γ et Γ' passe évidemment par les points communs à Γ et Γ', ces points ayant une même puissance nulle par rapport à Γ et Γ'.

L'ensemble des points ayant même puissance par rapport à deux coniques Γ et Γ' est une conique appelée ***conique radicale*** *de Γ et Γ'. Lorsque Γ et Γ' ont les mêmes directions asymptotiques, l'ensemble est réduit à une droite L et cette droite est* ***l'axe radical*** *de ces deux coniques.*

Exemples :

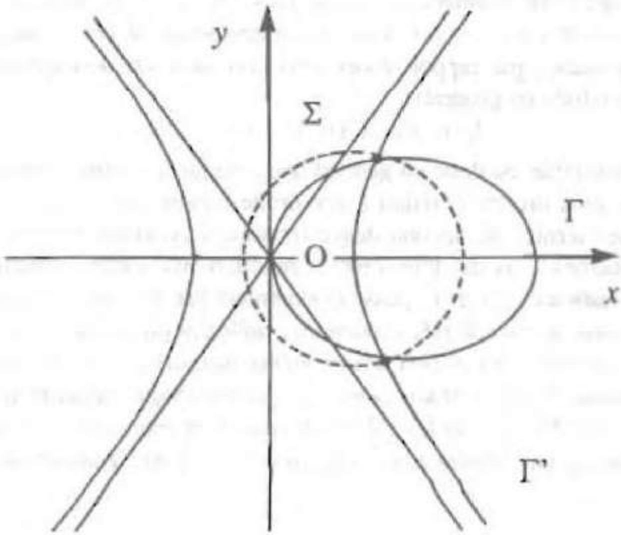
Γ : cercle $x^2 + y^2 - 2y = 0$ Γ' : parabole $y^2 - x = 0$

Σ : parabole $x^2 + x - 2y = 0$

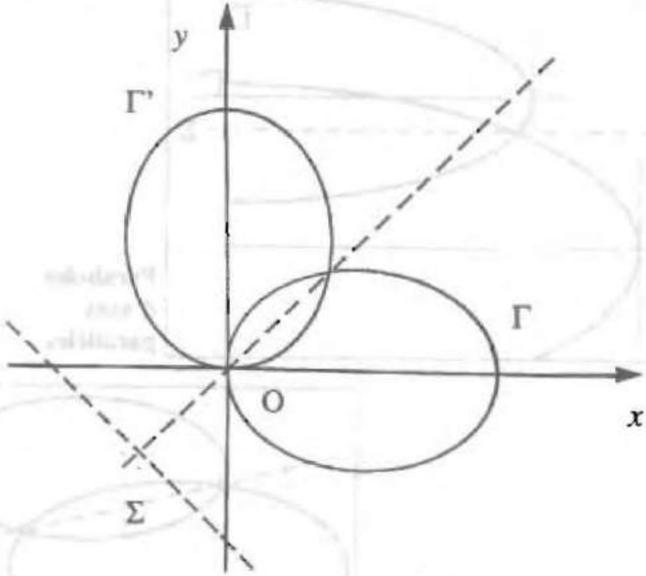


Γ : ellipse $x^2 + 4y^2 - 5x = 0$ Γ' : hyperbole $-2x^2 + y^2 + 1 = 0$

Σ : cercle $x^2 + y^2 - (5/3)x - 1/3 = 0$

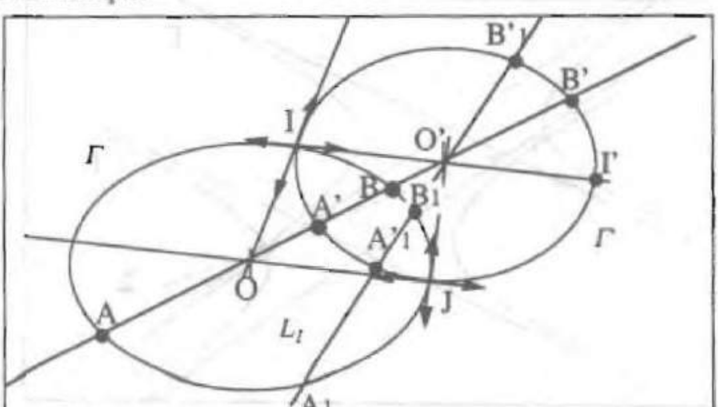


Γ : ellipse $x^2 + 4y^2 - 5x = 0$ Γ' : ellipse $4x^2 + y^2 - 5y = 0$
Σ : 2 droites $(x - y)\,[3(x + y) + 5] = 0$

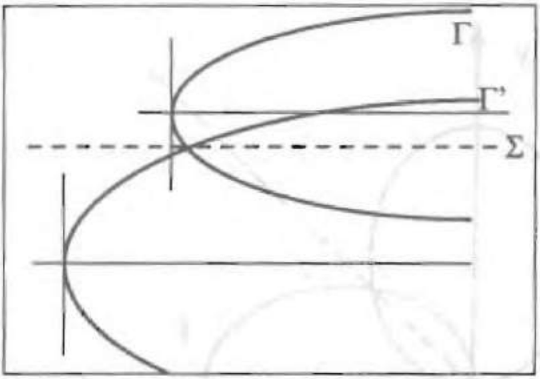


6 - Coniques conjuguées.

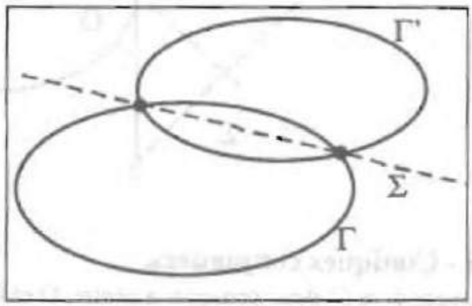
Soient Γ et Γ' deux coniques à centre, O et O', de mêmes directions asymptotiques (et donc d'axes parallèles et de même excentricité e) dont deux diamètres respectifs ont pour extrémité 4 points A, B, A', B' formant une division harmonique.



AXE RADICAL DE DEUX CONIQUES

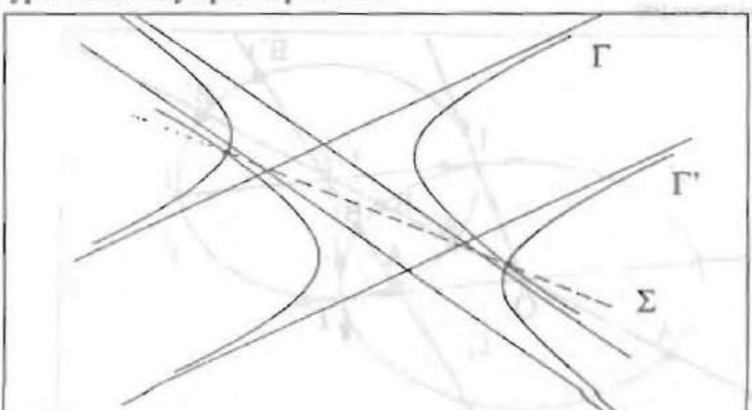


Paraboles d'axes parallèles



Ellipses de mêmes directions asymtotiques

Hyperboles d'asymptotes parallèles



Si θ est l'angle de l'axe focal de Γ (ou de Γ') avec la droite portant les quatre points A, B, A', B' on a :

$$\Gamma(O') = \overline{O'A}\ .\ \overline{O'B}\ .\ (1 - e^2\cos^2\theta) = \overline{O'A'}^2.(1 - e^2\cos^2\theta) = -\Gamma'(O')\ .$$

Soit alors L_1 un autre diamètre de Γ' coupant Γ en A_1 et B_1 et Γ' en A'_1 et B'_1 ; θ étant remplacé par θ', on a :

$$-\Gamma'(O') = \overline{O'A'_1}^2.(1 - e^2\cos^2\theta_1)\ ;\ \Gamma(O') = \overline{O'A_1}\ .\ \overline{O'B_1}\ (1 - e^2\cos^2\theta_1)\ .$$

D'où $\overline{O'A'_1}^2 = \overline{O'A_1}\ .\ \overline{O'B_1}$ et A_1, B_1, A', B' forment une division harmonique. Ainsi, tout diamètre de Γ' (resp. Γ) est divisé harmoniquement par Γ (resp. Γ').

Si I et J sont les deux points communs (à distance finie) à Γ et Γ' et si IO' recoupe Γ' en I', Γ coupe le diamètre II' de Γ' en deux points dont l'un est I, conjugués harmoniques par rapport à I et I' et donc le deuxième point est confondu avec I et IO' est tangente à Γ en I.

Deux coniques telles que Γ et Γ' sont dites ***conjuguées***.

Nous pouvons donc donner les énoncés suivants :

Définition :

Deux coniques à centre Γ (centre O) et Γ' (centre O') sont dites conjuguées si elles ont mêmes directions asymptotiques (et donc des axes parallèles et même excentricité) et si elles coupent leur diamètre commun respectivement en quatre points A, B, A', B' formant une division harmonique.

Et, les réciproques des propriétés précédentes étant vraies,

Théorème :

Deux coniques à centre Γ et Γ' de même directions asymptotiques sont conjuguées :

si et seulement si tout diamètre de l'une est divisé harmoniquement par l'autre ;

ou

si et seulement si la somme des puissances du centre de l'une par rapport aux deux coniques est nulle ;

ou

si et seulement si le centre de l'une des coniques est l'intersection des tangentes à l'autre aux points communs à distance finie des deux coniques.

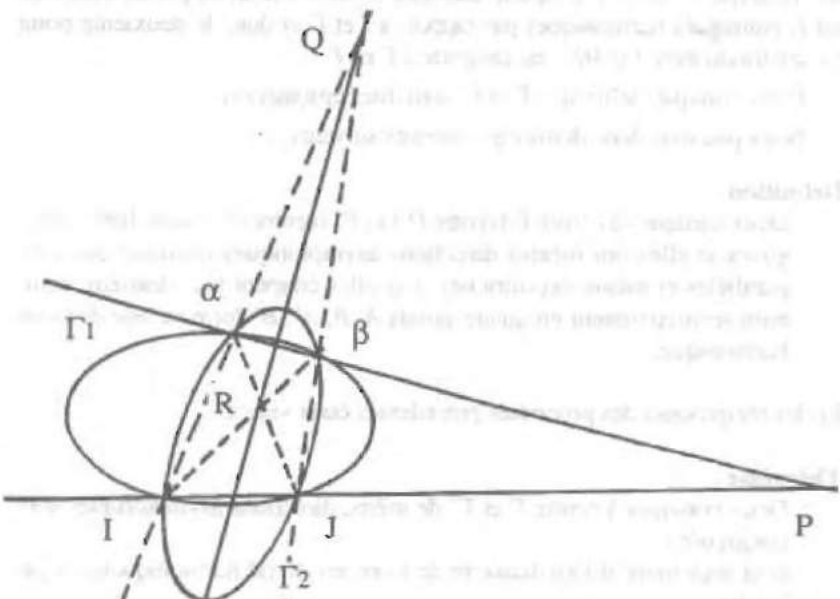
Cette notion de ***coniques conjuguées*** est la généralisation de celle de ***cercles orthogonaux.***

Question : Comment traiter le cas de la parabole ?

7 - Généralisation de la notion de faisceau de cercles

(On se place dans le plan projectif complexe)

Soient Γ_1 et Γ_2 deux coniques de mêmes directions asymptotiques se coupant en deux points à distance finie I et J (réels ou non, distincts ou non) et en deux points à l'infini α et β (appartenant donc à la droite de l'infini, notée $L\infty$). Considérons le faisceau linéaire de coniques passant par les quatre points I, J, α, β c'est-à-dire l'ensemble des coniques Γ passant par I et J et de mêmes directions asymptotiques que Γ_1 et Γ_2.



Soit $P = L_\infty \cap IJ$. O_1 et O_2, centres respectifs de Γ_1 et Γ_2, appartenant à la polaire de P par rapport respectivement à Γ_1 et Γ_2. Mais cette polaire est la même et c'est la droite QR polaire de P par rapport aux deux droites $I\alpha$, $J\beta$ (ou $I\beta$, $J\alpha$) (Q et R sont les points doubles, autres que P, des coniques décomposées du faisceau $\mathcal{F}$).

Cette droite QR ne dépend que des quatre points I, J, α, β et c'est l'ensemble des centres des coniques du faisceau.

Toutes les coniques de ce faisceau F ont deux à deux le même axe radical, la droite IJ.

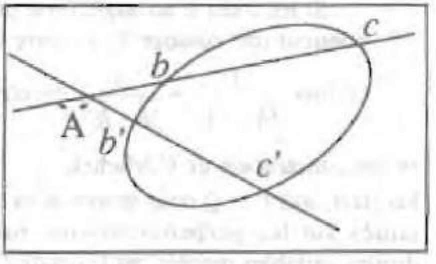
Soit maintenant Γ' une conique *conjuguée* de Γ_1 et Γ_2. Son centre ayant même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2, appartient à l'axe radical IJ du faisceau $\mathcal{F}$ et Γ' coupe IJ en deux points conjugués harmoniques par rapport à I et J. De plus, Γ' coupe le diamètre QR de toute conique Γ du faisceau $\mathcal{F}$ en deux points I' et J' conjugués harmoniques de tous les couples de points d'intersection avec QR des coniques du faisceau $\mathcal{F}$. Ces deux points I' et J' sont donc fixes ; ce sont les points doubles de la division en involution définie par les points d'intersection de QR avec les coniques du faisceau $\mathcal{F}$. Ces coniques Γ' constituent donc un faisceau linéaire $\mathcal{F}'$ de même nature que $\mathcal{F}$ appelé *faisceau conjugué* de $\mathcal{F}$.

L'ensemble des centres des coniques de l'un des faisceaux est l'axe radical de l'autre faisceau et toute conique de l'un des faisceaux est conjuguée de toute conique de l'autre.

8 - Quelques applications.

La condition de cocyclicité de quatre points d'une conique est sans doute la plus immédiate mais il y en a bien d'autres. Voici, par exemple, quelques résultats que nous avons rencontrés dans l'ouvrage de Charles MICHEL [2].

1 - Théorème de NEWTON : Si les côtés d'un angle variable de sommet A rencontrent une conique fixe Γ respectivement en b, c et b', c', le rapport $\dfrac{\overline{Ab}\,.\,\overline{Ac}}{\overline{Ab'}\,.\,\overline{Ac'}}$ garde une valeur constante quand les côtés de l'angle restent parallèles à deux droites fixes.



En effet, on a :

$\Gamma(A) = \overline{Ab}\,.\,\overline{Ac}\,(1 - e^2\cos^2\theta)$

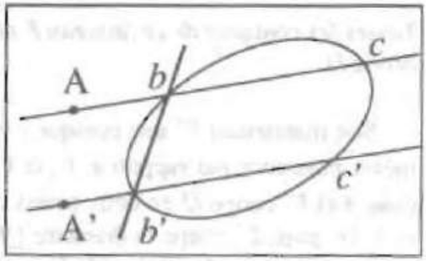
$\Gamma(A) = \overline{Ab'}\,.\,\overline{Ac'}\,(1 - e^2\cos^2\theta')$

d'où : $\dfrac{\overline{Ab}\,.\,\overline{Ac}}{\overline{Ab'}\,.\,\overline{Ac'}} = \dfrac{1 - e^2\cos^2\theta}{1 - e^2\cos^2\theta'}$.

2 - Théorème de Mac-LAURIN :

Si deux droites parallèles coupent une conique aux points b, c et b', c' et varient en passant par deux points fixes A et A', le rapport $\dfrac{\overline{Ab}\,.\,\overline{Ac}}{\overline{A'b'}\,.\,\overline{A'c'}}$ garde une valeur constante.

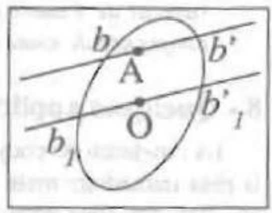
En effet, ce rapport vaut : $\dfrac{\Gamma(A)}{\Gamma(A')}$.



3 - Indice d'un point par rapport à une conique à centre

(Signalé par C.MICHEL, et attribué à FAURE, mais figurant dans l'ouvrage de CLIFFORD.)

a) Théorème et définition : Soit Γ une conique à centre O, un point fixe A, une sécante variable bAb' à Γ et $b_1Ob'_1$, le diamètre de Γ parallèle à bAb'. Le rapport $\dfrac{\overline{Ab}\,.\,\overline{Ab'}}{Ob_1^2}$ est constant. Ce nombre, noté $\mu(A)$, est appelé indice de A par rapport à Γ.



b) Lien avec la puissance :

Comme $\Gamma(A) = \overline{Ab}\,.\,\overline{Ab'}\,(1 - e^2\cos^2\theta)$

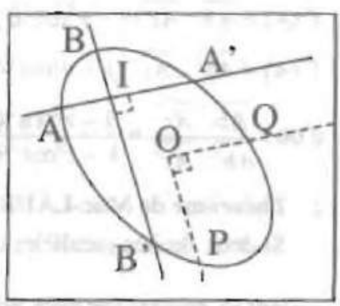
et que $\Gamma(O) = \overline{Ob_1}\,.\,\overline{Ob_1'}\,(1 - e^2\cos^2\theta)$,

on a $\mu(A) = -\Gamma(A)/\Gamma(O)$.

Cette notion d'indice est ainsi voisine de celle de puissance mais elle est moins fine et ne s'étend pas à la parabole. Elle permet de démontrer un certain nombre de propriétés ... ces démonstrations devenant plus rapides et plus générales en utilisant la puissance.

c) Exemple d'application :

Si les côtés d'un angle droit pivotent autour d'un point fixe I et rencontrent une conique Γ, à centre O, respectivement en A, A' et B, B' la somme $\dfrac{1}{\overline{IA}\,.\,\overline{IA'}} + \dfrac{1}{\overline{IB}\,.\,\overline{IB'}}$ est constante.



➡ Démonstration de C.Michel :

En effet, soit P et Q deux points de la conique situés sur les perpendiculaires aux deux droites variables menées par le centre O.

$\dfrac{1/\overline{IA}\,.\,\overline{IA'}}{1/OQ^2} = \dfrac{1/\overline{IB}\,.\,\overline{IB'}}{1/OP^2} =$

$$= \frac{1/\overline{IA}\ .\ \overline{IA'} + 1/\overline{IB}\ .\ \overline{IB'}}{1/OQ^2 + 1/OP^2} = \frac{1}{\mu(I)}$$

Or, comme nous l'avons montré (V,§3), la droite PQ est tangente à un cercle de centre O, et par suite, d'après une propriété classique du triangle rectangle, $1/OP^2 + 1/OQ^2$ est constant.

➡ **Démonstration utilisant la puissance (conique quelconque) :**

$$\frac{1}{\overline{IA}\ .\ \overline{IA'}} + \frac{1}{\overline{IB}\ .\ \overline{IB'}} = \frac{1 - e^2\cos^2\theta + 1 - e^2\sin^2\theta}{\Gamma(I)} = \frac{2 - e^2}{\Gamma(I)}$$

(Remarquons au passage que cette valeur est nulle pour $e = \sqrt{2}$*, ce qui devrait faire réagir les spécialistes de l'hyperbole équilatère).*

Bibliographie

[1] M.BERGER *GEOMETRIE* (Fernand Nathan 1990)

[2] C.MICHEL *COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE MODERNE* (Vuibert 1941).

[3] W.K.CLIFFORD *MATHEMATICALS PAPERS* (1866)

Addenda :

Paul-Louis HENNEQUIN nous fait remarquer fort judicieusement que, pour passer de la puissance d'un point par rapport à un cercle à celle de puissance d'un point par rapport à une conique, une idée naturelle est d'utiliser un cône de révolution.

En effet, soit, dans un repère orthonormé (origine O, axes $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$, vecteurs unitaires e_1, e_2, e_3, le cône de révolution C d'équation $X^2+Y^2-kZ^2 = 0$ $k > 0$)). Pour tout point $M(X, Y, Z)$ de l'espace, appelons puissance de M par rapport au cône C l'expression : $C(M) = X^2 + Y^2 - kZ^2$.

Considérons un plan (P), supposé sans restreindre la généralité, parallèle à $X'X$, $M(X, Y, Z)$ un point de P, L une droite de P passant par M et formant avec la projection $x'x$ de $Z'Z$ sur P l'angle θ, Γ la conique intersection de C avec P.

Soit $\vec{u}$ (a, b, c) un vecteur unitaire de L. Le point courant de L a pour coordonnées $(X + \lambda a\ ,\ Y + \lambda b\ ,\ Z + \lambda c)$ et les points de $C \cap L$, qui sont aussi les points de $\Gamma \cap L$, sont déterminés par l'équation en :

$$(X + \lambda a)^2 + (Y + \lambda b)^2 - k\,(Z + \lambda c)^2 = 0$$

ou $$\lambda^2 (a^2 + b^2 - kc^2) + 2\lambda (aX + bY - 2ckZ) + X^2 + Y^2 - kZ^2 = 0$$

Soient A et B, lorsqu'ils existent, les points de $C \cap L$. On a

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \lambda_A \lambda_B = \frac{C\,(M)}{a^2 + b^2 - kc^2} = \frac{C\,(M)}{1 - (1 + k)c^2}$$

d'où $$\overline{MA}.\overline{MB}\,[1 - (1 + k)c^2] = C\,(M) = c^{te}$$

Mais si α est le demi-angle au sommet du cône et φ l'angle de $Z'Z$ avec P, on sait que l'excentricité e de Γ est telle que $e^2 = \dfrac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}$.

Or, $\cos^2\varphi = \dfrac{c^2}{b^2 + c^2}$ et $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + k}$ d'où $e^2 = \dfrac{(1 + k)c^2}{b^2 + c^2}$ et comme $\cos^2\theta = b^2 + c^2$, on obtient $e^2\cos^2\theta = (1 + k)c^2$, ce qui permet bien de retrouver le fait que $\overline{MA}.\overline{MB}\,[1 - (1 + k)c^2]$ est constant, cette valeur constante étant la puissance de M par rapport au cône C.