Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leurs caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes» … si possible, trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement donnée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P.) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
7510 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°213 (Mohammed IGUIDER, Salé-Maroc).

Soit $\prod(N)$ le produit de tous les chiffres représentant l'entier naturel N dans la base décimale (exemple : $\prod(273) = 2 \times 7 \times 3 = 42$).

Montrer que si $N \geq 1000$, $\prod(N) < \frac{2}{3}N$.

Peut-on avoir $\prod(N) = \frac{N}{5}$? N = 0 ; 175

contient des chiffres impairs et est divisible par 175.
n = 175 + k 1400
(il n'y a pas d'autres ?)

ÉNONCÉ N°214 (François LO JACOMO, Paris).

Un cube, d'arête unité, est coupé par un plan.
Quelle est la surface maximale du polygone intersection ?
Quel est le périmètre maximal du polygone intersection ?

ÉNONCÉ N°215 (Jacques AMON, Limoges).
Soit f une fonction continue de $[0\ ,\ 1] \to \mathbf{R}$, et soient a et b respectivement l'inf et le sup de $f(t)$ sur $[0\ ,\ 1]$.

Montrer que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)\,dt \leq -ab$.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 199 (Daniel REISZ, Dijon).

Un disque de rayon 1 est partagé en quatre régions par deux cordes perpendiculaires. Quelle est la plus grande valeur possible de la somme des rayons des cercles inscrits dans ces quatre régions ?

RÉPONSES

Cet énoncé est extrait de la revue *Crux Mathematicorum* (problème 1627, mars 1991). Il a été abordé de deux façons différentes.

a) Abord géométrique (par majoration) *comme le propose Daniel REISZ (Dijon) :*

Soit le cercle de centre O et de rayon R et les deux cordes perpendiculaires (MN) et (ET), ainsi que les quatre cercles $(O_i,\ r_i\ )$ inscrits dans chacune des quatre régions Q_i.

On a alors, en désignant par Ai les points de contact des cercles (O_i, r_i) avec le cercle (O, R) les alignement des points A_i, O_i, O. D'où :

$$A_1O_1 + O_1O_3 + O_3A_3 \leq A_1O + OA_3 = 2R$$

$$A_1O_1 + O_1H + HO_3 + O_3A_3 \leq 2R$$

$$r_1 + r_1\sqrt{2} + r_3\sqrt{2} + r_3 \leq 2R$$

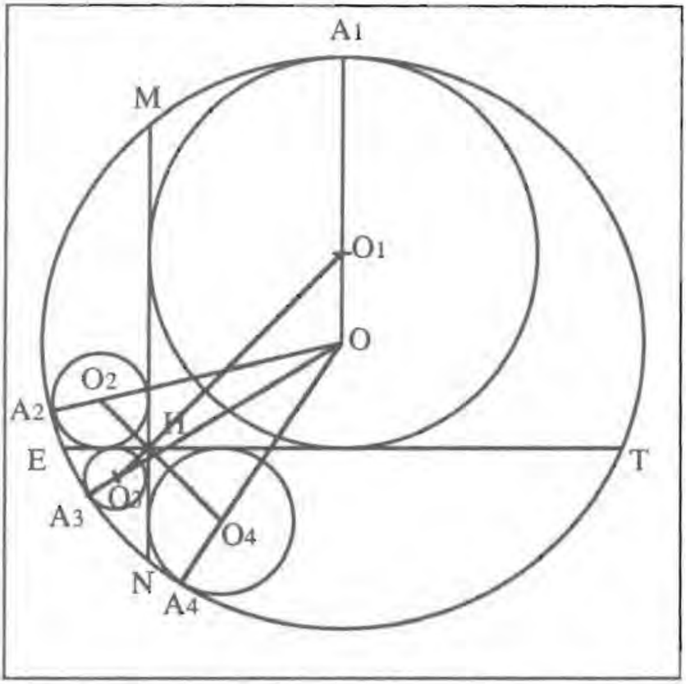
$$(r_1 + r_3)(1 + \sqrt{2}) \leq 2R$$

$$r_1 + r_3 \leq 2R\,(\sqrt{2} - 1)$$

De même $$r_2 + r_4 \leq 2R\,(\sqrt{2} - 1)$$

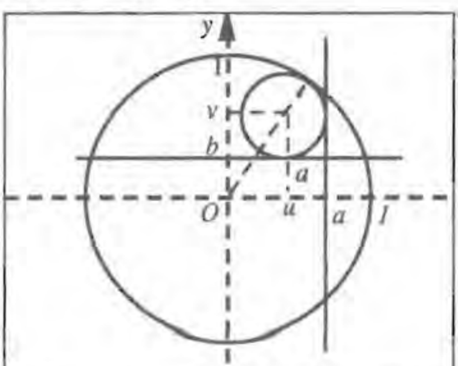
D'où $$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq 4R\,(\sqrt{2} - 1)$$

(Il y a égalité si $H = 0$).



b) Abord analytique (par calcul explicite)*, comme le propose, par exemple, J.L.NICOLAS (Villeurbanne).*

Choisissons un repère orthonormé de centre O, le centre du cercle, et d'axes parallèles aux cordes. Soit $x = a$ et $y = b$, les équations des cordes dans ce repère. Soit $(u\ ,\ v)$ les coordonnées du centre d'un cercle inscrit dans l'une des quatre régions et r son rayon.



On doit avoir

(1) $u = a + \alpha r$ avec $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ suivant que le cercle est à droite ou à gauche de la droite $x = a$.

De même, on doit avoir

(2) $v = b + \beta b$ avec $\beta = \pm 1$.

Enfin, on doit avoir

(3) $\sqrt{u^2 + v^2} = 1 - r$ et $0 < r < 1$, soit $u^2 + v^2 = (1 - r)^2$,

et par (1) et (2),

(4) $r^2 + 2(a\alpha + b\beta + 1)r + a^2 + b^2 - 1 = 0$.

On vérifie que pour chacun des 4 choix (α, β), l'équation (4) a exactement une solution comprise entre 0 et 1. Les solutions sont donc :

$$r = -\alpha a - \beta b - 1 + \sqrt{2(1 + \alpha a)(1 - \beta b)}\ ,\ \alpha = \pm 1\ ,\ \beta = \pm 1$$

et la somme des quatre rayons vaut $-4 + \sqrt{2}\, f(a, b)$ avec $f(a, b) = \sqrt{(1+a)(1+b)} + \sqrt{(1+a)(1-b)} + \sqrt{(1-a)(1+b)} + \sqrt{(1-a)(1-b)}$ . .
Posons $a = \cos 2u$, $b = \cos 2v$, avec $u, v \in [0, \pi/2]$. Il vient : $f(a, b) = 2(\cos(u-v) + \sin(u+v))$. Or, ceci montre que $f(a,b) \leq 4$ avec égalité lorsque $u = v = \pi/4$ (et seulement dans ce cas), ce qui donne $a = 0$ et $b = 0$.

Cette seconde approche (calcul explicite) débouche sur la généralisation suivante (Pierre NOÉ, Marseille): «La différence entre la somme des rayons des quatre cercles inscrits et la somme des deux cordes orthogonales est indépendante de la position des rayons des quatre cercles exinscrits. Il s'ensuit que ces deux sommes sont simultanément maximales». Cette différence constante est égale à 8, les deux calculs étant très similaires.

La première approche (par majoration) conduit à une autre généralisation, amorcée par Daniel CARRON (Bruxelles): «Soit *(C)* un cercle de rayon *R*, *M* un point intérieur au cercle et D_1, D_2 … D_n, *n* droites passant par *M*. La somme des rayons des cercles tangents au cercle *(C)* et à deux droites consécutives admet pour valeur maximale :

$$S_n = \frac{2n \sin \frac{\pi}{2n}}{1 + \sin \frac{\pi}{2n}} R$$

En s'inspirant en effet de cette technique de majoration, on démontre que, avec les notations de la figure:

$$2R \geq M_1M'_1 \geq N_1N'_1 = \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha_1}\right)(r_1 + r'_1)$$

De sorte que la somme des rayons vaut:

$(r_1 + r'_1) + (r_2 + r'_2) + \ldots + (r_n + r'_n) \leq$

$$\leq 2R \left(\frac{\sin \alpha_1}{1 + \sin \alpha_1} + \frac{\sin \alpha_2}{1 + \sin \alpha_2} + \ldots + \frac{\sin \alpha_n}{1 + \sin \alpha_n}\right)$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \pi/2$.

Or, la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$ a pour dérivée seconde

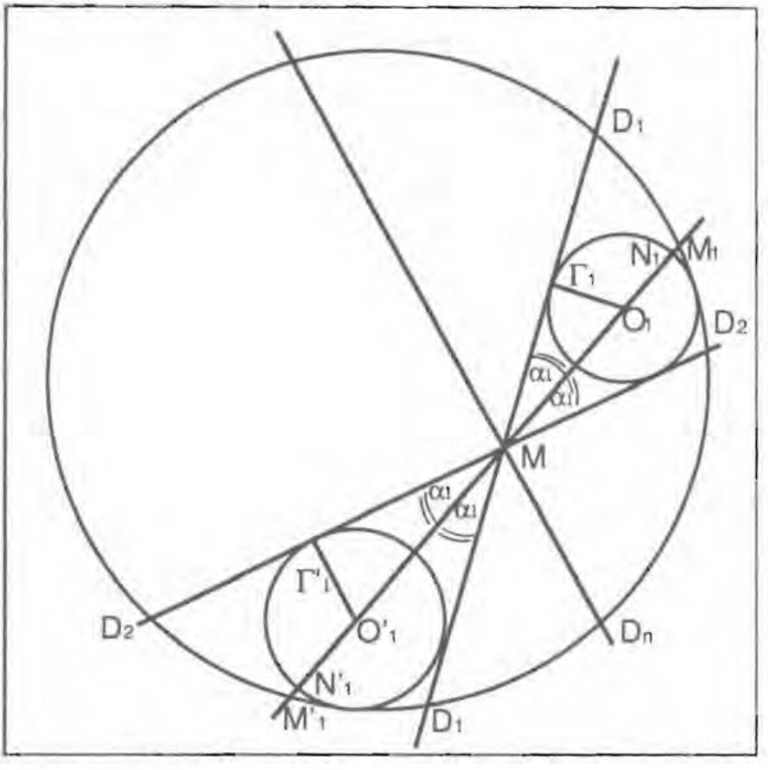
$$f''(x) = \frac{\sin x - 2}{(1 + \sin x)^2} < 0$$

de sorte qu'elle est concave et vérifie donc:

$$f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_n) \leq \frac{n \sin \frac{\pi}{2n}}{1 + \sin \frac{\pi}{2n}}$$

D'où $S_n \leq \left(\dfrac{2n \sin \frac{\pi}{2n}}{1 + \sin \frac{\pi}{2n}}\right) R$, et l'égalité est vérifiée lorsque M est au centre du cercle (Γ) et que tous les angles de droites sont égaux à $\dfrac{\pi}{n}$, car alors $M_kM'_k = 2R$ (pour tout k) et les points (M_k et N_k tout comme M'_k et N'_k) sont confondus.(voir la figure page suivante)

Signalons également la remarque de Denis HARTEMANN (Cayenne-Guyane), qui signale que le cercle inscrit dans une région pourrait être défini comme le plus grand cercle contenu dans cette région. Or ce dernier n'est pas nécessairement le cercle tangent aux deux cordes : si, dans le cercle de centre (0,0) et de rayon 1, les cordes ont pour équations, par exemple $y = 1/10$ pour l'une, $x = 3/5$ pour l'autre, il existe dans les deux plus grandes régions des cercles plus grands que ceux tangents aux deux cordes. Toutefois, au prix d'un calcul supplémentaire, même avec cette définition, le résultat n'est pas remis en question.



Autres solutions :

Par le calcul explicite :

M.BAUVAL (Versailles), R.BECZKOWSKI (Châlon sur Saône), Michel BIGOT (Equeurdreville), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Edgard DELPLANCHE (Dijon), Robert FERREOL (Paris), Denis HARTEMANN (Cayenne), Marc LAVENIR (St Vallier), René MANZONI (Le Havre), Marguerite PONCHAUX (Lille), Geneviève SAMBARD (St Quentin), Gheorge-Joan VELCIOV (Timis-Roumanie) et Francisco BELLOT ROSADO et Maria Ascension LOPEZ CHAMORRO (Valladolid-Espagne).

Par majoration :

Mireille BOURNAUD (Vitry sur Seine), Daniel CARRON (Bruxelles).
Gilbert ROUX (L'Haÿ les Roses), Dominique PARINET (*Loches*) : par

majoration en utilisant l'énoncé n° 181.

Pierre NOÉ (Marseille): par majoration, indépendamment de sa remarque (cercles exinscrits) qui nécessite, elle, un calcul explicite.

Charles NOTARI (Noé): par majoration, en utilisant des dilatations qui transforment les cercles de rayons r_i en des cercles de rayons $R - r_i$ tangents intérieurement à un même carré de côté $2R$, dont les cordes sont axes de symétrie.

Michel HEBRAUD (Toulouse) : par majoration, en utilisant des homothéties qui transforment le point d'intersection des cordes en les quatre sommets d'un carré dans lequel est inscrit le grand cercle.

R.RAYNAUD (Digne) : par une méthode analytico-géométrique, qui s'appuie sur une propriété des paraboles passant par les extrémités d'une corde et les centres de deux des cercles inscrits (parabole dont le foyer est le centre du grand cercle).

ÉNONCÉ N°200 (Dominique ROUX, Limoges).

Pour tout entier N, notons $\overline{N}$ le «renversé de N et posons $\Delta(N) = |N - \overline{N}|$. Par exemple, si $N = 153$, $\overline{N} = 351$ et $\Delta(N) = 198$.

- Prouver que la suite (U_n) définie par $U_0 = N$ puis $U_{n+1} = \Delta(U_n)$ est périodique à partir d'un certain rang.
- La longueur de la période obtenue peut-elle être plus grande que 2 ?
- Caractériser les entiers N pour lesquels $\Delta_\circ\Delta(N) = N$.

RÉPONSE

A partir des quelques notes succinctes que m'a léguées l'auteur, Dominique ROUX, et des éléments de solution fournis par René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé) et Pierre BARNOUIN (Cabris), j'ai pu reconstituer, non sans mal, le texte suivant, qui va un peu plus loin que les solutions de René MANZONI, sans pour autant épuiser le problème, dont de nombreux aspects restent ouverts.

Tout d'abord, il est clair que, le nombre de chiffres de Un ne pouvant que décroître, la suite ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes : elle finira donc par reprendre deux fois la même valeur, et sera dès lors périodique dans la mesure où chaque terme de la suitre est entièrement déterminé par le précédent.

Si l'on appelle: $y_q y_{q-1} y_{q-2} \cdots y_2 y_1 y_0$ les $(q + 1)$ chiffres de N, on aura, (si $N > \overline{N}$) :

$$\Delta(N) = (y_q - y_0)(10^k - 1) + (y_{q-1} - y_1)(10^{k-1} - 10) +$$
$$+ (y_{q-2} - y_2)(10^{k-2} - 100) + \ldots$$

Lorsque $q = 1$ (resp. $q = 2$), $\Delta(N)$ (et donc chacun des U_n à partir de n = 1) est donc de la forme: $9.a$ (resp. $99.a$), son renversé vaut alors : $9\,(11 - a)$ resp. $99\,(11 - a)$), et donc la suite prendra assez vite la valeur 9 (resp.99), perdant ainsi un chiffre et donnant 0 à tous les rangs suivants. D'où un cycle de longueur 1.

Il est clair, par ailleurs, qu'aucun autre cycle ne peut avoir une longueur 1: ce ne serait possible que s'il existait un nombre N tel que $\overline{N} = 2N$. Le premier chiffre de N (dernier chiffre de $\overline{N}$ pair) ne pourrait être que 2 ou 4 : si N commence par 4, $\overline{N}$ commence par 8 ou 9, donc N finit par 8 ou 9, ce qui est incompatible avec le fait que $\overline{N}$ doit finir par 4. Il en est de même si N commence par 2.

On remarquera également que si les éléments de la suite ont un nombre impair de chiffres, ils sont divisibles par 99, alors que s'ils ont un nombre pair de chiffres, $N \equiv -\overline{N}$ modulo 11, de sorte que $\Delta(N) \equiv \pm eN$ modulo 11. Il en résulte que si U_0, ayant un nombre pair de chiffres, n'est pas multiple de 11, aucun des éléments suivants ne sera multiple de 11 à moins que le nombre de chiffres ne décroisse; en outre, un cycle composé de non-multiples de 11 aurait, de ce fait, une longueur multiple de 5, et pour tout i entre 1 et 10, l'un des U_n du cycle, ou son renversé, serait congru à i modulo 11. Je ne connais pas de cycles constitués de non-multiples de 11, et il se peut que tous les non-multiples de 11 (ayant un nombre pair de chiffres) perdent obligatoirement un chiffre (problème ouvert?).

C'est ainsi que, parmi les nombres de 4 chiffres, tous les non-multiples de 11 aboutissent en fin de compte à 0, mais cela peut prendre un certain temps : 1728 → 6543 → 3087 → 4716 → 1458 → 7083 → 3276 → 3447 → 3996 → 2997 → 4995 → 999 → 0. Alors que les multiples de 11 (non-multiples de 1111) aboutissent rapidement au cycle: 2178 → 6534 → 2178 → ..., de longueur 2. Il n'y a pas de cycle de longueur supérieure à 2 pour les nombres de 4 chiffres: à partir de U_1, ces nombres s'écrivent tous: $999.a + 90.b$; s'ils sont multiples de 11, $(a - b)$ est multiple de 11, et compte tenu que $1 \leq a \leq 9$ et $-9 \leq b \leq +9$, ils sont obligatoirement soit de la forme: $1089.a$ (de renversé: $1089(10-a)$), soit de la forme: $1089.a - 990$ (de renversé: $1089(11-a) - 990$); donc à partir de U_2, ils sont multiples de 1089 et à partir de U_3, ils sont pairs (donc multiples de 2178), d'où l'unique cycle de multiples de 11. Pour les non multiples de 11, on peut s'aider de l'application linéaire et injective qui à $N = 999.a + 90.b$ associe $f(N) = 21.a + b$, et qui vérifie $f(N) + f(\overline{N}) = 220$ (donc $f(\Delta(N)) = |2.f(N) - 220|$) si ni a ni b ne sont nuls. Ou on peut demander à l'ordinateur …

Pour les nombres de 5 chiffres, c'est rigoureusement le même problème que pour les nombres de 4 chiffres, car le chiffre du milieu n'influence pas le comportement de la suite; plus généralement, le problème est le même pour les nombres de $2q$ chiffres et les nombres de $2q+1$ chiffres. En faisant confiance à Dominique ROUX, il n'existe pas de cycle de longueur supérieure à 2 pour les nombres de 6 ou 7 chiffres (il suffit d'étudier les $99999.a + 9990.b + 900.c$ congrus à 0 ou 1 modulo 11, soit quelques centaines de nombres, ce qui est faisable, même manuellement). Par contre, Dominique ROUX cite le plus petit entier conduisant à une période plus grande que 2, nombre de 8 chiffres qui vaut : $11436678 = 99 \times 11 \times 10502$, de période 14 ($11436678 \to 76226733 \to 42464466 \to 23981958 \to 61936974 \to 13973058 \to 71064873 \to 33218856 \to 32662377 \to 44664246 \to 19582398 \to 69746193 \to 30581397 \to 48737106 \to 11436678 \to \ldots$: dix nombres de ce cycle sont de la forme $1089.p$, avec $p = 10502 \to 69997 \to 38994 \to 22022 \to \ldots \to \ldots \to 65257 \to 30504 \to 29993 \to 41014 \to 17982 \to \ldots \to \ldots \to 44754$, les autres sont de la forme $1089.p - 990$). Il cite également un entier de 12 chiffres conduisant à une période de longueur 22: $108811891188 (99 \times 1001 \times 12 \times 91501)$.

René MANZONI, quant à lui, travaillant sur les chiffres des éléments de la suite, détermine un cycle de longueur 4, de nombre de 18 chiffres : $312535222687464777 \to 464929563535070436 \to 169140971830859028 \to 651817066348182933$. Chacun des quatre nombres est multiple de 999999999, et deux d'entre eux sont divisibles en outre par 1001.

Par ailleurs, il est clair que si l'on intercale au milieu d'un élément du cycle un nombre indéterminé de 9 ou de 0, on obtient un cycle de même comportement (il faut intercaler des 9 lorsque l'élément provient d'une soustraction «avec retenue au centre», comme $76226733 - 33762267$). On peut aussi mettre bout à bout un nombre indéterminé d'éléments d'un cycle pour obtenir un cycle de même comportement (par exemple: 1143667811436678).

Mais tous les cycles non-triviaux ont-ils obligatoirement un nombre pair de termes? La longueur d'un cycle peut-elle être aussi grande que l'on veut? (Problèmes ouverts?)

Reste le problème de caractériser les entiers N pour lesquels $\Delta_0\Delta(N) = N$. Appelons $N = y_q y_{q-1} y_{q-2} \ldots y_2 y_1 y_0$ et $N' = y'_q y'_{q-1} y'_{q-2} \ldots y'_2 y'_1 y'_0$ les deux nombres et supposons $N < N'$. Il résulte que : $N' = \overline{N} - N$, et $N = N' - \overline{N'}$; en particulier, $y'_0 = y_q - y_0 + 10$, et $y_0 = y'_0 - y'_q + 10$, alors que $y'_q = y_0 - y_q - \varepsilon'$, et $y_q = y'_q - y'_0 - \varepsilon$, où ε' et ε valent 0 ou 1 (suivant qu'il y a retenue ou non). On en déduit que $y_0 + y_q = 9$ ou 10 tout comme $y'_0 + y'_q$. Ce qui m'incite à poser $M = N + \overline{N'}$ et $M' = N' + \overline{N'}$, obtenant ainsi le système :

$$N' = M - 2N \qquad \text{soit} \qquad N' = \frac{M + 2M'}{5}$$

$$N = 2N' - M' \qquad \text{soit} \qquad N = \frac{2M - M'}{5}.$$

Si l'on avait $M = M'$, cela entraînerait $N' = 3N$, $\overline{N} = 4N$ et $\overline{N'} = 2N$, seulement ... pourquoi diable aurait-on $M = M'$? On peut déjà voir qu'ils sont tous deux multiples de 10, car si l'un d'eux (tous les deux) se terminait par 9, les expressions ci-dessus ne fourniraient pas des nombres entiers pour N et N'. Il en résultre que les retenues ε et ε' sont toutes deux nulles, et donc que $y_1 \geq y_{q-1}$ et $y'_1 \leq y'_{q-1}$.

Plus généralement, on a :

$$y'_k = y_{q-k} - y_k + u'_k \qquad \text{et} \qquad y_k = y'_k - y'_{q-k} + u_k$$

$$y'_{q-k} = y_k - y_{q-k} + u'_{q-k} \qquad\qquad y_{q-k} = y'_{q-k} - y'_k + u_{q-k}$$

où chacun des u_k, u'_k, u_{q-k}, u'_{q-k} vaut -1, 0, 9 ou 10.

Par soustraction, on a :

$$(y'_k - y'_{q-k}) = -2\,(y_k - y_{q-k}) + (u'_k - u'_{q-k})$$

$$(y_k - y_{q-k}) = -2\,(y'_k - y'_{q-k}) + (u_k - u_{q-k})$$

d'où

$$(y'_k - y'_{q-k}) = -\frac{2}{5}(u_k - u_{q-k}) + \frac{1}{5}(u'_k - u'_{q-k})$$

$$(y_k - y_{q-k}) = \frac{1}{5}(u_k - u_{q-k}) + \frac{2}{5}(u'_k - u'_{q-k})$$

et, une fois encore, comme $(u_k - u_{q-k})$ et $(u'_k - u'_{q-k})$ ne peuvent être congrus qu'à -1, 0 ou 1 modulo 10, on en conclut que:

$$u_k \equiv u_{q-k} \pmod{10} \text{ et } u'_k \equiv u'_{q-k} \pmod{10}.$$

En particulier, si $y_k = y_{q-k}$, $u'_k = u'_{q-k} = 0$ ou 9, donc $y'_k = y'_{q-k}$ et j'obtiens un nouveau cycle de même longueur 2 en supprimant dans les deux nombres les chiffres y_k et y_{q-k}, y'_k et y'_{q-k}. On peut donc supposer, dans un premier temps, que $\forall k,\ y_k \neq y_{q-k}$.

L'égalité modulo 10 de $u'k$ et $u'q-k$ signifie dès lors, que, soit il y a retenue dans les deux cas ($y_{q-k-1} < y_{k+1}$ et $y_{k-1} < y_{q-k+1}$), soit il n'y a retenue dans aucun des deux cas: $y_{q-k+1} > y_{k+1}$ et $y_{k-1} > y_{q-k+1}$. En d'autres termes:

$$y_{k-1} < y_{q-k+1} \Leftrightarrow y_{k+1} > y_{q-k-1}.$$

Or, comme $y_0 > y_q$ et $y_1 > y_{q-1}$, on a : , on a $y_2 < y_{q-2}$ et $y_3 < y_{q-3}$ puis $y_4 > y_{q-4}$ etc ...

Le même raisonnement de proche en proche s'appliquant tant à N qu'à N', on voit qu'en toute position, si $u'_k \equiv u'_{q-k} \equiv 0 \pmod{10}$, alors $u_k \equiv u_{q-k} \equiv 0 \pmod{10}$ et si $u'_k \equiv u'_{q-k} \equiv -1 \pmod{10}$ alors $u_k \equiv u_{q-k} \equiv -1 \pmod{10}$. Comme $u_k + u_{q-k} = y_k + y_{q-k} = 8$ ou 10 (du fait que $y_k \neq y_{q-k}$), on a en toute position: $y_k + y_{q-k} = y'_k + y'_{q-k}$, ce qui suffit à prouver que $M = N + \overline{N} = N' + \overline{N'} = M'$.

Plus précisément, $y_0 + y_q = 10$ mais $y_1 + y_{q-1} = 8$ (du fait de la retenue) ; pour la même raison, $y_2 + y_{q-2} = 8$, mais $y_3 + y_{q-3} = 10$ et ainsi de suite ... Le fait d'avoir supposé $y_k \neq y_{q-k}$ implique que q soit impair (donc que N ait un nombre pair de chiffres). Comme N est multiple de 9, il y a autant de $y_k + y_{q-k} = 10$ que de $y_k + y_{q-k} = 8$, donc le nombre de chiffres de N est multiple de 4 ($q = 4p - 1$). On a dès lors :

$$M = (10 + 80 + 800 + 10\,000)\,(1 + 10^4 + \ldots + 10^{4p-4})$$

$$= 10.1089.\frac{10^{4p} - 1}{9999} = \frac{110}{101}\left(10^{4p} - 1\right) \text{ d'où}$$

$$N = \frac{M}{5} = \frac{22}{101}\left(10^{4p} - 1\right) \qquad \overline{N} = 4N$$

$$N' = 3N \qquad \overline{N'} = 2N.$$

On remarquera que le nombre:

$S = \dfrac{N}{2} = \dfrac{11}{101}\left(10^{4p} - 1\right) = 10891089\ldots1089$ vérifie lui aussi : $y_0 + y_q = 10$, $y_1 + y_{q-1} = 8$, etc... donc lui aussi vérifie: $S + \overline{S} = M$, d'où $\overline{S} = 5N - \dfrac{N}{2} = 9S$. Lui aussi aboutit au cycle (N, $3N$, ...).

Où peut-on intercaler des $y_k = y_{q-k}$? A un endroit où cela ne fausse pas la «symétrie des retenues». Pour pouvoir intercaler un bloc de longueur quelconque de chiffres identiques (0 ou 9) entre y_j et y_{j-1} il faut soit qu'il y ait une retenue des deux côtés : $y_{q-j+1} < y_{j-1}$ et $y_j < y_{q-j}$, auquel cas les chiffres intercalés dans N' seront des 9. Mais, comme les retenues étaient au même endroit dans N et dans N', les chiffres intercalés dans N seront eux aussi des 9, et l'on aura donc toujours $N + \overline{N} = N' + \overline{N'}$ puisqu'on a intercalé les mêmes chiffres. Soit il n'y a pas de retenue, ni d'un côté ni de l'autre, $y_{q-j+1} > y_{j-1}$ et $y_j > y_{q-j}$ et l'on aura des zéros intercalés dans N', mais également dans N, et, une fois de plus $N + \overline{N} = N' + \overline{N'}$.

La solution générale se compose donc de blocs: 21[9 ... 9]78[0 ... 0]21[9 ... 9]78[0 ... 0] ... 21[9 ... 9]78 où [9 ... 9] (resp.[0 ... 0]) représente un nombre indéterminé (éventuellement nul) de 9 (resp.de 0).

Les blocs doivent être symétriques par rapport au centre des nombres, mais ils sont en nombre quelconque (pair ou impair). A noter que si je divise par 2 une telle solution N, j'obtiens:

S = 10[9 ... 9]89[0 ... 0]10[9 ... 9]89[0 ... 0] ... 10[9 ... 9]89 qui vérifie $S + \overline{S} = N + \overline{N}$, donc $\overline{S} = 9S$ car $\overline{N} = 4N$ – 85. De sorte que la caractérisation cherchée s'écrit :

Un cycle $\{N\ ,\ N'\ \}$ de longueur 2 vérifie (si $N < N'$) : $N' = 3N$, $N + \overline{N} = N' + \overline{N'}$ donc $\overline{N} = 4N$ et $\overline{N'} = 2N$. En outre, N est pair et $S = \dfrac{N}{2}$ vérifie $\overline{S} = 9S$.

Pour parachever la démonstration, il faudrait prouver dans l'autre sens que : $\overline{N} = 4N \Rightarrow \{N\ ,\ 3N\ \}$ est un cycle (de longueur 2), et que $\overline{S} = 9S \Rightarrow \{2S, 6S\ \}$ est un cycle (de longueur 2), ce qui prouverait pleinement l'équivalence. Cette seconde partie de la démonstration, plus facile, est laissée au lecteur ; il suffit de résoudre exhaustivement les équations $\overline{N} = 4N$ et $\overline{S} = 9S$, en procédant chiffre par chiffre des extrémités vers le centre du nombre, et de comparer au résultat ci-dessus.

Charles NOTARI cite également la suite de KAPREKAR, qui se différencie de la suite ci-dessus dans la mesure où l'on ordonne des chiffres avant de soustraire, et l'on tolère donc que le nombre le plus petit commence par des zéros.
Exemple : 4086 → 8172 (= 8640 - 0468) → 7443 → 3996 → 6264 → 4176 → 6174.

Les nombres de 4 chiffres aboutissent tous au cycle de longueur 1 : 6174. Mais les nombres de 5 chiffres peuvent aboutir à trois cycles : 59994 → 53955, ou bien 74943 → 62964 → 71973 → 83952 ou bien 75933 → 63954 → 61974 → 82962. Cette suite a fait l'objet d'un article dans la revue *Matematiko Translimen* de l'Association des Mathématiciens Espérantistes (décembre 1977). Pour tous renseignements sur cette revue ou cette association (qui existent toujours !...), prière de contacter le responsable de la présente rubrique.

COURRIER DES LECTEURS

A propos du problème 190 (*Bulletin 384*, «Un professeur donne 2 entiers et dit "ce sont les longueurs de 2 côtés d'un triangle rectangle, trouver la longueur du troisième côté, sachant qu'elle est entière"...»), Edgard DELPLANCHE (Créteil) rappelle l'ouvrage fondamental de Legendre : *Théorie des Nombres* (1798), qui contient des démonstrations équivalentes, s'appuyant sur les *Commentaires de Diophante* de Fermat :
«L'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers ne saurait être égale à un

carré ; les deux sommes $q^2 + n^2$, $q^2 + 2n^2$ ne peuvent être simultanément deux carrés ; la formule $m^4 - n^4$ ne peut être un carré, nom plus que la formule $f^4 + 4g^4$, excepté seulement dans les cas évidents, l'un de $m = n$ ou $n = 0$, l'autre de f ou $g = 0$. On peut en conclure, ajoute Legendre, que l'équation $x^4 + y^4 = 2p^2$ est impossible, hors le cas de $x = y$, car de cette équation on tirerait : $p^4 - x^4y^4 = ((x^4 - y^4)/2)$; or on vient de voir que le premier membre ne peut être un carré.»

Vincent THILL souhaiterait contacter ceux qui se sont intéressés à son énoncé 193 : $(4ab^2 - ac^2)^2 + (4b^3 - 3bc^2)^2 = c^6$, afin de leur faire parvenir des compléments sur la question et d'autres problèmes similaires. Vous pouvez lui écrire à l'adresse suivante :

Vincent THILL, 1 rue Pierre Larousse, 89400 Migennes
Tél. 86 80 40 47.