Examens et concours

Vous êtes nombreux à préparer l'agrégation interne, et vous savez combien le chemin est ardu. Pour vous, et aussi pour d'autres, amateurs de problèmes, nous publions ici le travail très complet que Christian JEANBRAU a proposé d'effectuer pour le Bulletin et dont nous le remercions : pour la Première Epreuve, un corrigé allant droit au but, accompagné d'une analyse du sujet et de commentaires de l'auteur.

Agrégation interne Session 1991

Première épreuve de mathématiques

SOLUTION(S) :

indications succinctes et *compétences mobilisées*

Christian Jeanbrau

L'énoncé de cette épreuve a été donné dans le Bulletin n°384 (juin-juillet 92)

Partie I.

1.a Si $r - 1_V$ est de rang 1, alors son noyau est de dimension $n - 1$.

1.b La réunion d'une famille libre et d'un vecteur n'appartenant pas au sous espace engendré par cette famille est libre. Donc $\mathcal{E} \cup \{u\}$ est une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n ; c'est une base. On a dans cette base :

$$\mathrm{Mat}(r, \mathcal{E} \cup \{u\}) = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix}\beta_{1,n} \\ \beta_{n-1,n}\end{matrix} \\ \hline 0\ldots\ldots 0 & \beta_{n,n}\end{array}\right]$$

On a donc : $\det(r) = \beta_{n\ ,\ n}$ et : $\mathrm{Mat}\,(r - \det(r).\mathrm{I}_v) = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{n-1} & \begin{matrix}\beta_{1\ ,\ n}\\ \beta_{n-1,n}\end{matrix} \\ \hline 0\ .\ . & 0 \end{array}\right]$

ce qui répond à la question pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$.

1.c Le polynome minimal est un diviseur du polynome caractéristique. Par 1.b, celui-ci est $(t-1)^{n-1}.(t - \text{dét}\,(r))$.
$r - \mathrm{I}_v$ est de rang 1, donc non nul ; $r - \det(r).\mathrm{I}_v$ est non nul ; sa matrice est en 1.b ci-dessus ; $(r - \mathrm{I}_v)\,o(r - \det(r)\mathrm{I}_v)$ est nul : $\mathrm{Im}(r - \det(r).\mathrm{I}_v)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(r - \mathrm{I}_v)$ par 1.b.
$\mathrm{P}(t) = (t-1)\,(t - \det\,(r))$ est le diviseur unitaire de plus petit degré du polynôme caractéristique, annulateur de r : c'est le polynome minimal.
C.N.S. pour r diagonalisable : ....que son polynôme minimal soit scindé, à racines simples. D'où ici la C.N.S. : $\det\,(r) \neq 1$.

1.d Si $\det\,(r) = 1$, u n'appartenant pas à K, on peut retenir comme base de K le vecteur v tel que : $r\,(u) = u + v$. Alors, dans la base $(v\ ,\ u)$, la matrice de r s'écrit : $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Si v^* est la forme linéaire "composante sur v", on a, pour tout vecteur w: $r(w) = w + v^*(w)\,v$; r est une transvection relative à la droite (l'hyperplan) K.

Si $\det(r) \neq 1$, r est diagonisable et dans une base $(v\ ,\ u)$, sa matrice s'écrit : $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \det(r)\end{pmatrix}$. r est une affinité relative à la droite (l'hyperplan) K.

2.a On a : $\mathrm{Mat}\,(\mathrm{M_p}) = \begin{bmatrix} 0\,0 & 0 & -a_n\\ 1\,0 & 0 & -a_{n-1}\\ & & \\ 0\,0 & 1 & -a_1\end{bmatrix}$;

$$\det(t\mathrm{I}_v - \mathrm{M}_p) = \begin{vmatrix} t & 0 & & 0 & a_n \\ -1 & t & & 0 & a_{n-1} \\ & & & & \\ 0 & 0 & & -1 & a_1+t \end{vmatrix}$$

Le développement du déterminant fournit le polynôme caractéristique. Soit D_n ce déterminant d'ordre n. On a : $\mathrm{D}_0 = 1$; $\mathrm{D}_1 = t + a_1$; $\mathrm{D}_2 = t^2 + a_1 t + a_2$; on peut poser l'hypothèse récurrente : $\mathrm{D}_k = t^k + a_1 t^{k-1} + \ldots + a_{k-1}t + a_k$; le contrôle de validité de l'étape k à l'étape $(k+1)$ est immédiat ; d'où D_n par la forme ci-dessus (où $n = k$).
Il suffit alors d'appliquer le théorème d'Hamilton-Cayley pour conclure.

2.b Par 2.a, $\mathrm{Q}(t)$ est le polynôme caractéristique de $\mathrm{M_q}$; on peut donc écrire : $\det(\mathrm{M_q}) = (-1)^n\cdot(\det(t\,\mathrm{I}_n - \mathrm{M_q})_{t=0} = (-1)^n.(\mathrm{Q}(t))_{t=0}$.
Soit : $\det(\mathrm{M_q}) = (-1)^n.\mathrm{Q}(0)$; $\mathrm{M_q}$ est donc inversible et on peut manipuler $\mathrm{M_q}^{-1}$.
On examine $(\mathrm{M_p} - \mathrm{M_q})$: $1 \le i \le n$, $(\mathrm{M_p} - \mathrm{M_q})(e_i) = 0$
et $(\mathrm{M_p} - \mathrm{M_q})(e_n) = -((a_n - b_n)\,e_1 + \ldots + (a_1 - b_1)\,e_n)$,
vecteur non nul dans la base (e_i) puisque ses composantes sont non-toutes-nulles. $(\mathrm{M_p} - \mathrm{M_q})$ est donc de rang 1 ; par $\mathrm{M_q}$ automorphisme, $(\mathrm{M_p} - \mathrm{M_q})$ a même rang que $\mathrm{M_q}^{-1}\circ(\mathrm{M_p} - \mathrm{M_q}) = (\mathrm{M_q}^{-1}\circ\mathrm{M_p} - \mathrm{I}_V)$ ... ce qui répond à la question.

Examen des compétences mobilisées par cette Partie I :

1 - Théorème du rang : E est un e.v. de dimension finie ; F est un espace vectoriel ; f une application linéaire de E vers F : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{E})$.

2 - Familles libres et bases :
- E est un espace vectoriel : $\mathrm{F} = \{u_i\}$ une famille libre indexée de E ; v est un vecteur quelconque de E : $\mathrm{F} \cup \{v\}$ Libre $\Leftrightarrow v \notin \mathrm{Vect}(\mathrm{F})$
- E un espace vectoriel de dimension finie ; F famille libre de E est une base si et seulement si : $\mathrm{Card}(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{E})$.

3 - Matrice d'une application linéaire de E espace vectoriel de dimension finie vers F, espace vectoriel de dimension finie, dans un jeu de bases données : $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$; (e_i) , base indexée de E ; (u_j) base indexée de F ;

$\mathrm{Mat}(f\,;\,(e_i),(u_j)) = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = u^*i\,(f(e_j))$, composante de rang i de $f(e_j)$.

4 - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} A & & & \\ 0 & B & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix}\ ;\ \det(M) = \det(A) \times \det(B) \times \ldots \times \det(C).$$

5 - Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires dans un jeu de bases données : renvoie au morphisme $L(E,F) \rightarrow M_{\dim F, \dim E}$.

6 - Polynôme caractéristique, minimal et conditions de diagonalisation :

- Condition suffisante : polynôme caractéristique scindé ; toutes racines simples.
- Condition nécessaire et suffisante : polynôme minimal scindé ; toutes racines simples.

7 - Développement d'un déterminant suivant une rangée : $M = (m_{ij})$; notion de cofacteur M_{ij} de m_{ij} ; $\det(M) = \sum_i m_{ij}\,.\,M_{ij} = \sum_j m_{ij}\,.\,M_{ij}$

8 - Principe de récurrence ...

9 - Théorème d'Hamilton-Cayley : Toute matrice est un zéro (formel) de son polynôme caractéristique.

10- Morphisme inversible : E est un espace vectoriel de dimension finie ; f est un endomorphisme de E ; f est inversible si et seulement si : $\det(f) \neq 0$.

11- Rang de la composée de deux applications linéaires.

g de E vers F ; f de F vers G.

$\mathrm{rang}(f \circ g) = \dim(\mathrm{Im}(f \circ g))$;

$f / \mathrm{Im}(g)$ désignant la restriction de f à $\mathrm{Im}(g)$, on a par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(f(\mathrm{Im}(g))) + \dim(\mathrm{Ker}(f/\mathrm{Im}(g)))$

$\mathrm{Ker}(f/\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$

D'où : $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f \circ g)) + \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$

$\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{rang}(g) = \mathrm{rang}(f \circ g)$.

Commentaires :

Application directe des résultats ci-dessus rappelés du "programme", cette partie, facile, peut raisonnablement être rédigée en une heure, incluant la lecture initiale des "notations" du texte.

Partie II

1.a pour i de 1 à $n-1$: $M_p.e_i = e_{i+1}$; $X_v M_p.e_i = X_v.e_{i+1} = A^i.v$

$$M_p.e_n = -(a_n e_1 + a_{n-1} e_2 + \ldots + a_2 e_{n-1} + a_1 e_n)$$

$$X_v M_p.e_n = -(a_n.v + a_{n-1}A.v + \ldots + a_2 A^{n-2}.v + A^{n-1}.v)$$

$$X_v M_p.e_n = -(a_n.\mathrm{Id} + a_{n-1} A + \ldots + a_2 A^{n-2} + a_1 A^{n-1})(v)$$

soit, par P polynôme caractéristique de A et le théorème d'Hamilton Cayley ; $X_v M_p.e_n = A^n.v$.

1.b pour tout i de 1 à n, par 1.a, $X_v M_p.e_i = A^i.v = A.A^{i-1}.v$ soit $X_v M_p.e_i = A.X_v.e_i$; d'où : $X_v M_p = A.X_v$, et l'appartenance de X_v à C_A. Pour tout v, $X_v e_1 = v$; on en déduit que la famille $(X_{e_1}, X_{e_2}, \ldots, X_{e_n})$ est libre : $\left(\sum_i l_i X_{e_i}\right).e_1 = \sum_i l_i e_i$. Donc $\sum_i l_i X_{e_i} = 0$ entraîne

$\sum_i l_i e_i = 0$, soit, la famille indexée (e_i) étant une base, la nullité de tous les l_i ; C_A contient une famille libre à n éléments : C_A dont la structure d'espace vectoriel est d'évidence, est au moins de dimension n.

2.a Les éléments de F se présentent comme des matrices $n \times n$ dans lesquelles les alignements parallèles à la diagonale principale sont formés de termes identiques ; cette propriété se conserve par combinaison linéaire ; F n'est pas vide (I_n appartient à F) : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, donc un espace vectoriel. On a schématiquement :

$$\begin{bmatrix} a & b & c & \ldots & d \\ e & a & b & c & \\ f & e & a & b & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \\ a_{31} & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

On obtient trivialement comme base de F la famille des $2n-1$ matrices à éléments tous nuls, sauf un alignement parallèle à la diagonale principale, formé de termes tous égaux à 1.

2.b Se contrôle "à la main" :

$$M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & & -a_n \\ 1 & 0 & & & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad {}^tM_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \ldots & & & 1 \\ -a_n & & & -a_1 \end{bmatrix}$$

Alors : $X_{i,j} = \sum_k ({}^tM_p)_{i,k}(XM_p)_{k,j} = (XM_p)_{i+1,j}$

et $(XM_p)_{i+1,j} = \sum_k X_{i+1,k} \cdot M_{p\,k,j} = X_{i+1,j+1}$ d'où le résultat.

3.a $P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n ; t^n$.

$$P(1/t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n = a_n P(t)$$

On en déduit : $a_n a_1 = a_{n-1}$ ...ou bien $a_n = 1$:

$a_n a_2 = a_{n-2}$ $\qquad 1 \le k \le n-1,\ a_k = a_{n-k}$

....

$a_n a_{n-1} = a_1$ ...ou bien $a_n = -1$:

$a_n^2 = 1$ $\qquad 1 \le k \le n-1,\ a_k = -a_{n-k}$

...relations qui caractérisent P à partir de ses coefficients ; si on raisonne sur les racines de P ... :

a_n non nul, sinon par $a_n = P(0)$, P est le polynôme nul ; 0 n'est donc pas racine de P ; les entiers m, q, p_k étant éventuellement nuls, P se décompose en :

$P(t) = (t-1)^m(t+1)^q\prod(t-\beta_k)^{p_k}$

d'où $P(1/t) = (1/t - 1)^m(1 + 1/t)^q \prod (1/t - \beta_k)^{p_k}$

$P(1/t) = (1/t^{m+q+\Sigma p_k}).(1-t)^m(1+t)^q\prod(1-\beta_k t)^{p_k}$

$P(1/t) = (1/t^n).(\ldots)$; avec $(\ldots) = a_n P(t)$

... par $\beta_k^2 \neq 1$, on en déduit que les racines de P distinctes de -1 et $+1$ se répartissent par paires $(\beta_k, 1/\beta_k)$, de même ordre de multiplicité ... ce qui caractérise P à partir de ses racines.

3.b 0 n'est pas racine de P ; $P(0) = (-1)^n \det(A)$: A est inversible.

$a_n.P(t) = (-1)^n\det(A).P(t) = (-1)^n\det(A).\det(t\,I_n - A)$

$a_n.P(t) = t^n.P(1/t) = t^n.\det(1/t)I_n - A) = \det(I_n - t\,A)$

$P(t) = (-1)^n(\det(A))^{-1}.\det(I_n - t\,A) = \det(A^{-1}).\det(t\,A - I_n)$

$P(t) = \det(t\,I_n - A^{-1})$: P est le polynôme caractéristique de A^{-1} donc aussi de ${}^tA^{-1}$.

On sait par I.2.a que M_p a pour polynôme caractéristique P ; donc aussi ${}^tM_p^{-1}$. Par la définition II.1.b, on a : $C_{{}^tM_p^{-1}} = (X ; XM_p = {}^tM_p^{-1}X)$ ... soit

$C_{{}^tM_p}^{-1} = (X\ ;\ {}^tM_pXM_p = X)$.

4.a Par II.1.b et II.3.b, $C^tM_p^{-1}$ et $C^tM_q^{-1}$ sont deux sous-espaces vectoriels chacun de dimension au moins n dans un espace vectoriel (l'espace vectoriel F du II.2.a) de dimension $2n-1$: leur somme ne peut pas être directe ; leur intersection n'est donc pas réduite à $\{0\}$ et il existe X, élément commun à ces deux sous-espaces vectoriels. C'est la réponse cherchée.

4.b Si X, trouvée par 4.a est symétrique, le résultat est acquis, sinon : ${}^tX$ répond aussi à la question (transposer (*)), et par la structure d'espace vectoriel des ensembles C_A, $(1/2)({}^tX - X)$ aussi, qui est non nulle et antisymétrique.

4.c Soit B la forme bilinéaire symétrique associée à X dans la base canonique (e_i). La relation (*) affirme que dans les bases (u_j) (matrice de passage M_p) et (v_k) (matrice de passage M_q), la forme B garde la même traduction matricielle ; ce qui permet d'écrire :

$X_{11} = X_{22} = X_{33} = B(u_j\,,\,u_j)_{\,(1 \le j \le 3)} = B(v_k\,,\,v_k)_{\,(1 \le k \le 3)}$

$X_{21} = X_{32} = B(u_1\,,\,u_2) = B(v_1\,,\,v_2) = B(u_2\,,\,u_3) = B(v_2\,,\,v_3)$

$X_{31} = X_{13} = B(u_1\,,\,u_3) = B(v_1\,,\,v_3)$

Ce qui conduit dans $M_3(R)$ à une droite de solutions engendrée par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & -9 & 41 \\ -9 & 1 & -9 \\ 41 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Compétences mobilisées par la partie II :

1 - Familles libres dans un espace vectoriel :

la nullité d'une combinaison linéaire équivaut à la nullité de tous ses coefficients.

la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie est supérieure au cardinal de toute famille libre de l'espace.

2 - $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ décrivant $\mathbf{R}^k$, situation usuelle de sous espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ défini comme ensemble de matrices $(l_{ij}(a_1, a_2, \dots, a_k))$, l_{ij} forme linéaire sur $\mathbf{R}^k$.

3 - Notions sur les polynômes ; factorisation sur **R** ou **C** (théorème de d'Alembert).

4 - Règles de calcul sur les *déterminants : A → det(A) comme* forme linéaire ; $\det(AB) = \det(A).\det(B)$; $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$; $\det({}^tA) = \det(A)$.

5 - Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels :
$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$, $\dim(E+F) \leq \dim(E) + \dim(F)$;
$\dim(E+F) < \dim(E) + \dim(F) \Leftrightarrow E \cap F \neq \{0\}$.

6 - Notions sur les matrices symétriques, antisymétriques :
$M_n(R) = \text{Sym.}(M_n(R)) \oplus \text{Asym.}(M_n(R))$

$\forall A \in M_n(R)$: $(1/2)\,(A + {}^tA) \in \text{Sym.}(M_n(R))$; $(1/2)\,({}^tA - A) \in \text{Asym.}(M_n(R))$

7 - Notions sur les formes bilinéaires (symétriques) : matrice M(B) d'une forme B dans une base (e_j) donnée : $M(B)_{ij} = B(e_i, e_j)$.

Influence d'un changement de base : matrice de passage P pour nouvelle base (u_k) ; nouvelle matrice = ${}^tP$. (ancienne matrice) . P

Matrices congruentes.

Commentaires :

L'application demandée des résultats du programme est moins directe qu'en partie I sans être difficile. La rédaction demande toutefois quelques soins et une durée raisonnable de travail sur cette partie me semble être de l'ordre de 1h30.

Partie III

1. $b^{-1} \circ a$ est une pseudo-réflexion ; le noyau de $b^{-1} \circ a - I_v$ est donc de dimension $n - 1$; c'est aussi, par b automorphisme, la dimension du noyau de $b \circ (b^{-1} \circ a - I_v) = a - b$; $a - b$ et $b - a$ ont le même noyau : W est de dimension $n - 1$ (est un hyperplan de V).

2.a En raisonnant par exemple sur une décomposition de V en somme directe de E et d'un supplémentaire de E, on fera apparaître à partir de la matrice de a, le polynôme caractéristique de a' comme diviseur de P. Evidemment, le polynôme caractéristique de b' sera dès lors un diviseur de Q.

2.b E non réduit à $\{0\}$: le polynôme caractéristique de a' est de degré dim(E), donc au moins de degré 1 : par E inclus dans W, $a' = b'$; le polynôme caractéristique de a', de degré au moins 1, divise donc P et Q : P et Q ne sont pas premiers entre eux.

2.c $E \cap W \subset E$: $\dim(E) - \dim(E \cap W) \geq 0$; mais $\dim(E) \neq \dim(E \cap W)$ sinon $E = E \cap W$, soit $E \subset W$. Dès lors, on a : $\dim(E) - \dim(E \cap W) \geq 1$.
Par : $\dim(E + W) = \dim(W) + \dim(E) - \dim(E \cap W)$,
$\dim(E + W) \geq \dim(W) + 1$. W est un hyperplan de V, donc : $\dim(E + W) = n$ et $E + W = V$; le résultat demandé relève simplement du théorème de la base incomplète.

Les matrices de a et de b dans la base exhibée prennent la forme :

$$\mathrm{Mat}(a) : \begin{bmatrix} \mathrm{Mat}(a', \mathcal{E}) & \dots \\ & \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad \mathrm{Mat}(b) : \begin{bmatrix} \mathrm{Mat}(b', \mathcal{E}) & \dots \\ & \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}$$

A (resp. B) est la matrice de la composée de la restriction de a (resp. b) à vect($\mathcal{F}$) par le projecteur sur vect($\mathcal{F}$) parallèlement à E. Par vect($\mathcal{F}$), sous-espace vectoriel de W, ces restrictions sont égales et A = B. Mais alors, d'évidence, le polynôme caractéristique de A (qui est aussi celui de B = A) divise P et Q ; E est distinct de V donc card($\mathcal{F}$) ≥ 1 ; P et Q ont un facteur commun de degré au moins 1 et ne sont pas premiers entre eux.

2.d Si P et Q sont premiers entre eux, on peut affirmer qu'aucun sous espace strict de V distinct de $\{0\}$ n'est invariant et par a et par b.

3. Les conclusions ci-dessus de 2.d s'appliquent donc ...

3.a W est de dimension $n-1$; a est un automorphisme, donc aussi a^{-j}, pour tout j entier ; a^{-j} (W) est donc de dimension $n-1$. On peut écrire :

$\dim(\mathrm{W}) = n-1$; $\dim(a^{-1}(\mathrm{W})) = n-1$

$\dim(\mathrm{W} + a^{-1}(\mathrm{W})) = 2n-2-\dim(\mathrm{W} \cap a^{-1}(\mathrm{W})) \leq n$;

$\dim(\mathrm{W} \cap a^{-1}(\mathrm{W})) \geq \boldsymbol{n-2}$.

On procède par récurrence à partir de l'hypothèse :

$\dim(\mathrm{W} \cap a^{-1}(\mathrm{W}) \cap \dots \cap a^{-k}(\mathrm{W})) \geq n-\boldsymbol{k}-1$;

$\mathrm{A}_k = \mathrm{W} \cap a^{-1}(\mathrm{W}) \cap \dots \cap a^{-k}(\mathrm{W})$

$n \geq \dim(\mathrm{A}_k + a^{-k-1}(\mathrm{W})) = \dim(\mathrm{A}_k) + \dim(a^{-k-1}(\mathrm{W})) - \dim(\mathrm{A}_{k+1})$

$n \geq 2n-k-2-\dim(\mathrm{A}_{k+1})$; $\dim(\mathrm{A}_{k+1}) \geq n-(\boldsymbol{k}+1)-1$

La récurrence est validée ; on aura donc finalement :

$\dim(\mathrm{W} \cap a^{-1}(\mathrm{W}) \cap \dots \cap a^{-(n-2)}(\mathrm{W}) \geq n-(n-2)-1 = 1$; c'est le résultat.

3.b On peut donc exhiber un vecteur v non nul de cette intersection et étudier la famille des vecteurs $a^j.v$, pour j de 0 à $(n-1)$; de $j=0$ à $j=n-2$, ce sont tous des vecteurs de W ; on leur adjoint $a^{n-1}.v$ pour obtenir une famille de n vecteurs ; E, sous-espace qu'ils engendrent, est de dimension au plus n ; si dim(E) $= n$, cette famille de n vecteurs est libre et par là, base de V ; si dim(E) $\neq n$, ils forment une famille liée ; soit alors une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls associée et soit $n-k$ l'exposant de a le plus élevé de coefficient non nul ; directement si $k=1$ ou en en prenant l'image par a^h si $k=1-h$, on fait alors apparaître $a^{n-1}.v$ comme combinaison des $a^j.v$ pour j de 0 à $(n-2)$, donc comme élément de W ; finalement, on a ... : $E \subset W$; mais alors :

E est un sous-espace vectoriel strict de V, non réduit à $\{0\}$.

Par le théorème d'Hamilton Cayley, a^n est combinaison linéaire des a^j, pour j de 1 à $n-1$ et donc $a(E) \subset E$; a est un automorphisme : $a(E) = E$; mais par $E \subset W$: $a(E) = b(E)$.

E serait stable par a et b : exclu par 2.d ; donc $\dim(E) \neq n$ et le résultat.

3.c On se place dans la base $\mathcal{E}$ de 3.b ; pour j de 0 à $n-2$, l'expression de $a(a^j.v)$ dans $\mathcal{E}$ est directe ; pour $j = n-1$, on utilise le théorème d'Hamilton Cayley : $a^n = -(a_1.a^{n-1} + \ldots + a_{n-1}.a + a_n.I_v)$; on reconnaît immédiatement M_p ; de même pour b et M_q en remarquant que a et b ont même restriction à W, donc que $a^j.v = b^j.v$, pour j de 0 à $n-2$ et que pour $j = n-1$, $a^{n-1}.v = a(a^{n-2}.v) = a(b^{n-2}.v) = b(b^{n-2}.v) = b^{n-1}.v$.

3.d $P = t^n - 1$; $Q = t^n + 1$

$\{a^n = I_v ; b = -I_v\}$; a^j définit sur $\mathcal{E}$ une permutation circulaire et b^k définit sur $\mathcal{E}$ la composée d'une permutation circulaire par la transformation de k des vecteurs en leurs opposés ; par composition itérée des a^j et b^k, on transforme $\mathcal{E}$ par permutation circulaire et transformation en leurs opposés de r' vecteurs ($r' \leq k$) ; il y a n permutations circulaires possibles et 2^n choix de signes :

$\mathrm{Card}(G((a, b), \circ)) = n.2^n$; G est un groupe fini.

Compétences mobilisées par la partie III :

Il n'y a pas de nouveauté significative par rapport à I et II sinon la connaissance du théorème de la base incomplète et des notions sur les polynômes (...premiers entre eux).

Commentaires :

La rédaction demande de la réflexion et cette partie me paraît justifier, comme la partie II, un effort de 1h30.

Partie IV

1.a Par II.4.b, P et Q étant réciproques, existence d'une matrice X, non nulle, symétrique ou antisymétrique, telle que ${}^t\mathrm{M_p}\mathrm{X}\mathrm{M_q} = {}^t\mathrm{M_q}\mathrm{X}\mathrm{M_p} = \mathrm{X}$.

Par III.3.c, les polynômes P et Q étant premiers entre eux, existence d'une base $\mathcal{E}$ de V (définie en III.3.b) dans laquelle $\mathrm{Mat}(a\ ,\ \mathcal{E}) = \mathrm{M_p}$ et $\mathrm{Mat}(b,\ \mathcal{E}) = \mathrm{M_q}$.

On travaille alors dans $\mathcal{E}$ et on y définit f, bilinéaire, non nulle, symétrique ou antisymétrique, par : $f(x,y) = {}^t x\mathrm{X}y$. On en déduit : $f(a.x,\ a.y) = {}^t(a.x)\mathrm{X}(a.y) = {}^t x\,{}^t\mathrm{M_p}\mathrm{X}\mathrm{M_p}y = {}^t x\mathrm{X}y = f(x,\ y)$.
De même $f(b.x\,,b.y) = f(x\,,y)$

1.b E est le noyau de f. E est distinct de V par f non nulle. Trivialement, E est stable par a et par b ; on a même : a (E) = b (E) = E puisque a et b sont des automorphismes : pour tout u de E et tout x de V, $f(a.u,\ x) = f(a.u,\ a\ (a^{-1}\ x)) = f(u\,,a^{-1}x) = 0$ etc ... Or, par III.2.d, P et Q étant premiers entre eux, aucun sous-espace strict de V n'est invariant et par a et par b : E = {0} et f est non dégénérée.

1.c $y \to f(\quad,y)$ est alors l'isomorphisme canoniquement attaché à f de V sur son dual V*. Toute forme linéaire peut donc, en ce sens-là, s'exprimer (d'ailleurs d'une seule façon) au moyen de f.

2.a p est de rang 1 par $b^{-1} \circ a$ pseudo-réflexion. On peut donc choisir w non nul, base de $\mathrm{Im}(p)$. Alors, pour tout x : $p.x = \beta(x)w$ où β est une forme linéaire sur V. Par 1.c ci-dessus, il existe et d'une seule façon $v\sim$ dans V tel que : $\beta = f(\quad,v\sim)$. Par $v = v\sim$ si f est symétrique, $v = -\,v\sim$ si f est antisymétrique, on établit la proposition demandée. La non nullité de v est acquise puisque β n'est pas la forme nulle ($\mathrm{rang}(p) = 1$).

2.b On a trivialement : $\det(b^{-1} \circ a) = \det(a)/\det(b) = \mathrm{P}(0)/\mathrm{Q}(0)$. Par ailleurs, P et Q sont unitaires et réciproques, donc, au signe près, P(0) et Q(0) sont égaux à 1. D'où, au signe près, $c = 1$, qui est le résultat demandé.

Par I.1.c, $\mathrm{P}(t) = (t-1)(t-c)$ est le polynôme minimal de la pseudo-réflexion $b^{-1} \circ \boldsymbol{a} = p + \mathrm{I_V}$. Or, tout endomorphisme est un zéro de son polynôme minimal. D'où : $p\ (p + (1-c)\mathrm{I_V}) = 0$, soit, en développant $p^2 + (1-c)\,p = 0$.

3.c A remarquer : $p^2.x = p\ (p.x) = p\ (f(v,x)\ w) = f(v,x)p.w = f(v,x)\,f(v,w)\ w$ $\ldots = f(v,w)\,f(v,x)\ w = f(v,w)\ p.x$. Or : $p^2.x = (c-1)\ p.x$.
Soit : $f\ (v,w)\ p.x. = (c\ -\ 1)\ p.x$. Relation valable pour tout x : $f(v,w) = c-1$, ou $c = 1 + f(v,w)$.

On exécute alors le calcul conseillé :

$f(p.x + x,\ p.y + y) = f(p.x\ ,\ p.y) + f(p.x,\ y) + f(x,\ p.y) + f(x,y) =$

(par $p.z = f(v,z)\ w$)

$f(v, x) f(v, y) f(w, w) + f(v, x) f(w, y) + f(v, y) f(x, w) + f(x, y)$ (β)

Par ailleurs : $f(b^{-1} \circ a.x,\ b^{-1} \circ a.y) = \ldots$ trivialement par IV.1.a ...

... $= f(x, y)$.

En rapprochant ce résultat de (β), on peut écrire :

$0 = f(v,x) f(v,y) f(w,w) + f(v,x) f(w,y) + f(v,y) f(x,w)$

$0 = f(f(v,x) f(w,w)\ v + f(v,x)\ w + f(x,w)\ v\ ,\ y)$ (pour tout y ; f non dégénérée :)

$0 = (f(v,x) f(w,w) + f(x,w))v + f(v,x)w$ (pour tout x ; par $x = w$:)

$0 = ((1 + f(v,w) f(w,w)v + f(v,w)w$

Par la remarque préalable, c'est la relation demandée.

3.a Par f antisymétrique : $f(w,w) = 0$; donc, par le résultat précédent : $f(v,w)w = 0$; par w non nul, $f(v,w) = 0$; par la remarque initiale de IV.2.c, ($c = 1 + f(v,w)$) : $c = 1$. C'est le résultat demandé.

3.b Par la remarque déjà soulignée : $c = 1 + f(v,w)$, supposer $c = 1$ renvoie à $f(v,w) = 0$; par le résultat de 2.c ci-dessus, on en déduit $f(w,w) = 0$ ($c = 1$, w non nul). On a, pour tout x :
$f(p.x + x, p.x + x) = f(p.x, p.x) + f(p.x, x) + f(x, p.x) + f(x, x)$; mais (cf. calcul 2.c $f(p.x + x, p.y + y)) f(p.x + x, p.x + x) = f(x,x)$ et on vient de le dire : $f(w,w) = 0$, soit $f(p.x\ , p.x) = (f(v,x))^2 f(w,w) = 0$; finalement : $0 = f(p.x,x) + f(x,p.x)$. Par la symétrie de f, on a finalement : $0 = f(p.x,x)$ soit $0 = f(v,x) f(w,x)$ (relation valable pour tout x). En appliquant cela au développement de $f(p\ (x + y)\ ,\ x + y)$, on obtient : $0 = f(p.y,x) + f(p.x,y) = f(v,y) f(w,x) + f(v,x) f(w,y)$. Multipliant cette égalité par $f(v,x)$ et utilisant la relation précédente, il reste : $(f(v,x))^2 f(w,y) = 0$ (**relation valable pour tout x et pour tout y**).

On peut alors dégager la contradiction attendue : ... f n'étant pas dégénérée, il existe x tel que $f(v,x)$ soit non nul ; alors, pour tout y, $f(w,y) = 0$, ce qui, toujours par f non dégénérée, renvoie à $w = 0$ (**exclu!**).

On a donc $c = -1$; d'où (par IV.2.c) : $f(w,w)v = f(v,w)w$; $f(v,w)$ non nul (on a même $f(v,w) = c - 1 = -2$), donc : $w = (-f(w,w)/2)v = \beta v$; alors $p.x = f(v,x)\beta v$; on peut toujours poser $\beta = \pm a^2$; $p.x = \pm f(a.v\ ;\ x)av$; par $u = av$, on a le résultat (a est la racine carrée de la valeur absolue de : $f(w,w)/2$, dans la détermination présentée de u).

3.c On a obtenu : f antisymétrique (resp. symétrique) ssi $c = 1$ ($c = -1$). P et Q sont premiers entre eux, donc 1 ne peut être racine que de l'un des deux. Ce sont des polynômes réciproques, donc si β est l'ordre de multiplicité de 1, racine de P (resp. β', pour Q) réciproque unitaire,

$P(0) = (-1)^{\beta}$ (resp. $Q(0) = (-1)^{\beta'}$). Par suite, $C = P(0)/Q(0) = (-1)^{\beta + \beta'}$, avec un seul des deux β, β' non nul. Par suite, le signe de c est donné par la parité de l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de l'un (et d'un seul) des polynômes P, Q :

1 racine d'ordre pair : f est antisymétrique

1 racine d'ordre impair : f est symétrique.

(On peut contrôler l'affirmation sur l'exemple de II.4.c).

Remarque :

Ces trois premières questions du IV me semblent pouvoir occuper (réflexion et rédaction) environ 1h30 à 2h de travail. En conséquence, en cumulant cette estimation avec les évaluations du même ordre faites pour les parties I(1 heure), II (1h30) et III (1h30), on obtient un temps total de 6 heures environ, soit la durée prévue de l'épreuve. Le problème peut, à partir de là, être considéré comme trop "long". On y reviendra dans les commentaires de bilan.

4.a Simple lecture de règles de calcul :

$b \circ (b - t\,I_v)^{-1} = ((b - t\,I_v) \circ b^{-1})^{-1} = (I_v - tb^{-1})^{-1}$; la relation demandée équivaut à : $I_v = (b^{-1} \circ a - t\,I_v) - p) \circ (I_v - tb^{-1})^{-1}$, soit encore à $I_v = (b^{-1} \circ (a - t\,b^{-1} - p) \circ (I_v - tb^{-1})^{-1}$; le résultat par : $p = b^{-1} \circ a - I_v$.

4.b Utiliser un supplémentaire de V~ de Vect(u) dans V et une base $(u, e_2, e_3, \dots, e_n)$ adaptée à cette décomposition ; dans cette base, la matrice de Iv + L sera :

$$M = \begin{bmatrix} 1+\ell(u) & \ell(e_2) & \dots\dots & \ell(e_n) \\ 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots\dots & 1 \end{bmatrix}$$

Le calcul de son déterminant est trivial, d'où le résultat demandé.

Application :

$p.x = -f(u,x)u$; $p \circ (I_v - tb^{-1})^{-1}(x) = -f(u, (I_v - tb^{-1})^{-1}(x))u\dots$

soit $\ell(u) = -f(u, (I_v - tb^{-1})^{-1}.u)$ en utilisant $L = p \circ (I_v - tb^{-1})^{-1}$.

On applique alors la relation qu'on vient d'obtenir : $\det(I_v + L) = 1 + l\ell(u)$; mais aussi, par l'autre écriture ici de $I_v + L$:

$\det(b^{-1} \circ (a - t\,I_v) \circ b \circ (b - t\,I_v)^{-1}) = (1/\det b).\det(a - t\,I_v).\det b.1/\det(b - t\,I_v)$

soit finalement :

$\det(I_v + L) = \det(a - t\, I_v)/\det(b - t\, I_v) = P(t)/Q(t)$; c'est la relation demandée.

5.a Le polynôme caractéristique de b est donc scindé sur **R** et à racines simples : b est diagonalisable et on peut définir une base $u_{\sim\beta}$, β décrivant S, de vecteurs propres de b ; le vecteur u se décompose donc en une somme $\Sigma a_\beta u_{\sim\beta}$, pour β décrivant une partie de S et a_β non nul, ou pour β décrivant S et a_β éventuellement nul. On retient cette dernière formulation et on pose $u_\beta = a\, u_{\sim\beta}$. La famille des u_β ainsi définie répond trivialement aux questions posées.

5.b $f(u_\beta, u_{\beta'}) =$ (par 1.a ci-dessus) $= f(b.u_\beta, b.u_{\beta'}) = \beta\beta' f(u_\beta, u_{\beta'})$
$(1 - \beta\beta') f(u_\beta, u_{\beta'}) = 0$; par $\beta\beta' \neq 1$, on en déduit $f(u_\beta, u_{\beta'}) = 0$.

5.c b est un automorphisme, donc S ne contient pas 0 ; $b.u_\beta = \beta u_\beta$ renvoie à $(1/\beta)u_\beta = b^{-1}.u_\beta$.

On exploite 4.b ci-dessus :

$$P(t)/Q(t) = 1 - f(\Sigma u_\beta, (I_v - tb^{-1})^{-1}.\Sigma u_\beta) = 1 - \sum_{\beta\beta'} f(u_\beta, (I_v - tb^{-1})^{-1}.u_{\beta'})$$

$(I_v - tb^{-1}).u_{\beta'} = (1 - t/\beta').u_{\beta'}$; donc $(I_v - tb^{-1})^{-1}.u_{\beta'} = (1 - t/\beta')^{-1}.u_{\beta'}$

$$P(t)/Q(t) = 1 - \sum_{\beta\beta'} (1 - t/\beta')^{-1} f(u_\beta, u_{\beta'}) = 1 - \sum_\beta f(u_\beta, u_{1/\beta})/(1 - t/\beta)$$ (par 5.b précédent).

$\beta f(u_\beta, u_{1/\beta})$ apparaît alors comme résidu de $P(t)/Q(t)$ au pôle β. Cette fraction rationnelle n'ayant que des pôles simples, on sait que ce résidu vaut $P(\beta)/Q'(\beta)$. D'où $f(u_\beta, u_{1/\beta}) = P(\beta)/(\beta.Q'(\beta))$.

(Erreur de signe dans la formule proposée par l'énoncé).

6.a Les racines de P et Q sont simples, mais on ne les suppose pas réelles ; on prolonge à V_C les endomorphismes a et b en prenant les matrices de a et b (dans $(V, \mathcal{E})$) pour matrices de $\overline{a}$ et $\overline{b}$ (dans $(V_C, \mathcal{E})$). Ce faisant, P et Q sont polynômes caractéristiques de $\overline{a}$ et $\overline{b}$ qui sont dès lors diagonalisables.

Si β est valeur propre de $\overline{b}$ (resp. $\overline{a}$), β^p est valeur propre de $\overline{b}^p$ (resp. $\overline{a}^p$). Le groupe G est fini : existence de p tel que $\overline{b}^p = I_{V_C}$; on en déduit pour cette valeur de p : $\beta^p = 1$; les racines de Q (resp. P), valeurs propres de $\overline{b}$ (resp.$\overline{a}$), sont donc des racines de l'unité.

(La limitation à Q de la question est assez maladroite, sauf raison à expliciter).

6.b On a mis sur $\mathcal{E}$ le produit scalaire hermitien canonique rendant la base orthonormée. La forme $f(x, y)$ introduite est trivialement sesquilinéaire (la matrice de g est toujours "réelle"), à symétrie hermitienne, définie et positive (trivial) ; c'est bien un produit scalaire (sur V_C).

G est un groupe d'automorphismes. Donc : $\forall h \in G$, $\{g \circ h, g \in G\} = G$ Donc, pour tous x, y, h : $f(h.x, h.y) = f(x, y)$.
Par ailleurs, la restriction de f à V x V vérifie les hypothèses qui conduisent dans IV.3.b à $c = -1$. Donc $P(0)/Q(0) = -1$, soit $P(0).Q(0) = -1$, puisque P(0) et Q(0) sont, en module, égaux à 1.

6.c On suppose $Q(0) = -1$, donc $P(0) = 1$. P et Q sont réciproques. Utilisant la relation donnée en II.3 et l'appliquant à e^{it}, on obtient

$e^{nit}P(e^{-it}) = P(0)P(e^{it})$ soit $e^{nit/2}P(e^{-it}) = e^{-nit/2}P(e^{it})$ soit $\overline{h}(t) = h(t)$ et de même : $e^{nit}Q(e^{-it}) = Q(0)Q(e^{it})$; $e^{nit/2}Q(e^{-it}) = -e^{-nit/2}Q(e^{it})$ soit, en multipliant les deux membres par $-i$: $\overline{k}(t) = k(t)$.

Ainsi, $h(t)$ et $k(t)$ prennent des valeurs réelles pour toutes les valeurs réelles de t. Il est évident que h et k sont des fonctions périodiques et de période $4.\pi$ par la 2π-périodicité de l'exponentielle complexe e^{it}. $Q(x)$ et $P(x)$ ont chacun n zéros, tous simples ; à chacun de ces zéros, on peut associer, sur une période, deux valeurs de t (pour P) et deux valeurs de t (pour Q), zéros (via e^{it}) de $h(t)$ et de $k(t)$ respectivement (les zéros de P et Q sont des racines de l'unité). Les zéros de P et Q sont simples : P, P' d'une part, Q, Q' d'autre part, sont des couples de polynômes sans zéro commun. Et il est immédiat, par dérivation, de contrôler que si e^{it} est zéro de $P(x)$ (resp. $Q(x)$) alors $h'(t) = ie^{i(t-nt/2)}P'(e^{it})$ et $k'(t) = -e^{i(t-nt/2)}Q'(e^{it})$. Les $2n$ zéros ainsi dégagés par période des fonctions réelles h et k sont des zéros simples et correspondent donc bien à des nulllités "avec changement de signe" ($h(t)$ nul, $h'(t)$ non nul ; $k(t)$ nul, $k'(t)$ non nul).
Le raisonnement est fait sur V_C. On peut toujours exhiber, par la restriction de f à V x V et par 3.b ci-dessus, u tel que $p.x = -f(u,x).u$.
L'automorphisme $\overline{b}$ est diagonalisable ; on peut donc travailler dans

une base $(\overline{u}_\beta)$, pour β parcourant S, de vecteurs propres, et décomposer u dans cette base pour introduire la famille (u_β) de ses projetés sur chaque sous-espace $\mathrm{Vect}(\overline{u}_\beta)$ et obtenir l'écriture requise. Les calculs faits en 4.a ci-dessus sont maintenus à l'identique, V étant à lire V_C, comme a (resp. b) est à lire $\overline{a}$ (resp. $\overline{b}$).

La démonstration du 5.b se lit maintenant :

$f(\overline{b}.u_\beta, \overline{b}.u_{\beta'}) = f(\beta u_\beta, \beta' u_{\beta'}) = \overline{\beta}\beta' f(u_\beta, u_{\beta'})$ par $f(\overline{b}.x, \overline{b}.y) = f(x,y)$ on obtient ici : $f(u_\beta, u_{\beta'}) = 0$ pour $(1 - \overline{\beta}\beta')$ non nul.

Le calcul du 5.c peut alors être repris, mais avec la condition de non nullité $\overline{\beta}\beta' = 1$, soit $\overline{\beta} = 1/\beta'$, ce qui, s'agissant de racines de l'unité donne ici : $\beta = \beta'$.

On en tire alors : $P(t)/Q(t) = 1 + \beta f(u_\beta, u_\beta)/(t - \beta)$; d'où, ici encore : $f(u_\beta, u_\beta) = P(\beta)/\beta Q'(\beta)$.

On l'a déjà souligné dans le 6.c, on a, pour t tel que $\beta = e^{it}$, $h(t) = e^{-int/2}P(\beta)$ et $k'(t) = -e^{i(t-nt/2)}Q'(\beta) = -\beta e^{-int/2}Q'(\beta)$; on en tire $h(t)/k'(t) = -P(\beta)/\beta Q'(\beta)$, soit ici : $h(t)/k'(t) = -f(u_\beta, u_\beta)$. Par f produit scalaire, $h(t)/k'(t)$ apparaît à l'évidence comme réel négatif.

6.e Les fonctions réelles $h(t)$ et $k(t)$ sont continues-dérivables (en fait, elles sont de classe C_∞). Raisonnons sur le cercle trigonométrique, parcouru dans le sens positif ; entre deux zéros consécutifs t_i et t_{i+1}, $k(t)$ ne prend pas la valeur zéro et donc reste de signe fixe ; on a alors :

$$k(t_i) = k(t_{i+1}) = 0$$

$k'(t_i)$, $k'(t_{i+1})$ non nuls : Si $k'(t_i)$ positif, à droite de t_i et localement, $k(t)$ est positif. Donc $k(t)$ est positif sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$; par suite, $k'(t_{i+1})$ est négatif ou nul, donc ici négatif.

De la même façon, supposer $k'(t_i)$ négatif renvoie à $k'(t_{i+1})$ positif.

On en retient : $k'(t_i)\,k'(t_{i+1}) < 0$; par la conclusion de 6.d, on en déduit : $h(t_i)\,h(t_{i+1}) < 0$; par le théorème des valeurs intermédiaires, c'est l'affirmation de l'existence d'un zéro de h entre deux zéros consécutifs de k, ce qui fournit bien sur le cercle trigonométrique l'entrelacement attendu des zéros de P et de Q, racines de l'unité.

Commentaires et compétences mobilisées (IV).

On a déjà signalé, en termes de durée, le caractère probablement "hors délai" des questions IV.4-5-6. On peut estimer à 2 heures le temps nécessaire à leur compréhension/recherche/rédaction, ce qui porterait sans doute à 8 heures la durée de l'épreuve si on en souhaitait réellement l'étude complète ...

Pour ce qui est des compétences mobilisées par cette quatrième partie, on notera qu'elles portent sur :
- la notion de produit scalaire (hermitien) ; définition ...
- les racines de l'unité ; définition, maniement élémentaire ;
- les notions complémentaires usuelles sur la conjugaison, la réalité (nombres complexes) ;
- la connaissance d'un résultat classique sur la décomposition des fractions rationnelles : $P(t)/Q(t)$ quand Q est scindé à zéros tous simples : $P(\beta)/Q'(\beta)$ est le résidu en β.
- les zéros des polynômes : ordre de multiplicité, changement de signe local si on est sur $\mathbb{R}$, zéros de la dérivée ;
- les propriétés élémentaires des fonctions continues (valeur intermédiaire en particulier)...

Quel bilan global ?

Le problème est, je l'ai dit, trop long pour une épreuve de six heures. Le champ des compétences qu'il couvre est assez large mais leur mobilisation est inégalement répartie : si I et II sont des parties d'application directe ou semi-directe des connaissances demandées, III et IV vont plus loin dans la demande d'initiative et d'aisance dans la manipulation des concepts.

En fait, quelle est la philosophie de l'affaire ? Est-il nécessaire de vouloir faire, comme l'évoque (avec une connotation élogieuse) l'encadré initial du *Bulletin* (n°384, p.387), un "grand" problème ? Ne s'agit-il pas de procéder à un recrutement ou à une validation de compétence réaliste et efficace ?

Ne vaudrait-il pas mieux, si l'on choisit quoiqu'il en soit de rester dans la logique d'une épreuve de concours, prévoir une première partie consistant en un contrôle, par sollicitation directe d'énoncés et de résultats, de connaissances ; une seconde partie, distincte, consisterait à évaluer l'aptitude du candidat à mobiliser avec pertinence lesdites connaissances, pour maîtriser des situations de recherche un peu plus ouvertes ?

Dans cet esprit, et pour s'ancrer dans l'existant, on pourrait discuter d'une réécriture du texte proposé en demandant à l'auteur de le (re)travailler dans le cadre suivant :

NOTATIONS

Ce traditionnel paragraphe est parfois nécessaire et toujours fastidieux.

Proposer un système (révisable à l'usage) de notations s'imposant à tous les auteurs et porté chaque année à la connaissance des candidats sous la forme d'un document officiel disponible dans le cadre de la préparation au concours.

PRESENTATION DU PROBLEME

L'auteur doit décrire l'économie générale de son travail de recherche, définir le cadre global dans lequel il se place et les situations particulières auxquelles il s'est intéressé et qu'il soumet à l'étude. Ainsi, ici, semble-t-il :

(0) On souhaite procéder, avec le recours de l'algèbre des endomorphismes en dimension finie, à l'étude de certaines situations liant deux polynômes R(X) et les endomorphismes dont ils peuvent être les polynômes caractéristiques.

(1) Pour procéder à cette étude, on commencera par souligner que l'attention devant se porter sur les zéros de ces polynômes on pourra les supposer unitaires ... et qu'à tout polynôme unitaire de $R_n(X)$, on sait associer (sans unicité) un endomorphisme de R_n l'ayant pour polynôme caractéristique ; on notera respectivement P, p et M_p le polynôme, l'endomorphisme qu'on lui associera par référence à la base canonique $\mathbf{R}^n$ et la traduction matricielle de *p* dans ladite base canonique.

(2) On développera quelques unes des possibilités offertes par le cadre défini en (1) en se plaçant dans les situations suivantes où interviendront deux polynômes P et Q et leurs associés p, q, M_p et M_q :

- 2.1 P est réciproque (à préciser), puis P et Q sont réciproques.
- 2.2 *a* et *b*, endomorphismes de polynômes caractéristiques respectifs P et Q sont des automorphismes et $b^{-1} \circ a$ est une pseudo-réflexion (à préciser) avec :
  - 2.2.1 P et Q sont premiers entre eux.
  - 2.2.2 P et Q sont premiers entre eux et réciproques.
  - 2.2.3 P et Q sont premiers entre eux, réciproques et tous les zéros de Q sont réels simples.
  - 2.2.4 P et Q sont premiers entre eux, réciproques, scindés sur C à zéros tous simples et racines de l'unité.

CHAMP DES COMPETENCES A MOBILISER

Prévoir, sous forme de questions fermées, le contrôle de détail des compétences à mobiliser, contrôle auquel on pourra annexer la démonstration de tout ce qui, dans les démarches prévues, relève du "général". On pourra ainsi trouver des libellés très étroits tels que :

- *f* élément de L(E,F) ; relation entre dim(Ker(*f*)), Rg(*f*) et dim(E).

ou

- endomorphismes, matrices : polynôme caractéristique, polynôme minimal, conditions de diagonalisation. Rappeler les résultats élémentaires concernant ces notions (moins de 5 lignes).

mais aussi les questions "préparatoires" éparses dans le texte telles que (références du texte "actuel") :

- I,1
- II,2,a
- II,3,a
- IV,6,b (Sauf $P(0).Q(0) = -1$)

ETUDE DE DETAIL DES SITUATIONS RETENUES-ANNONCEES

Prévoir autant de "chapitres" que de situations annoncées. Chaque fois, recadrer l'étude à entreprendre avant de proposer une progression. Ainsi, par exemple, pour la situation annoncée (par moi) 2.1 (ci-dessus), prévoir : «On veut démontrer que si P et Q sont réciproques, de degré *n*, il existe une matrice X de $M_n(R)$, non nulle, telle que : ${}^tM_pXM_p = {}^tM_qXM_q = X$ (*). On suggère les étapes suivantes ...»

Ce qui revient à (re)libeller II.1.a, II.3.b, et II.4.a,b. On gardera le II.4.c pour une partie "Applications" ...

En guise de conclusion ...

On peut toujours estimer qu'un problème d'Agrégation est, aussi, un instrument de formation continue et que (re)libellé dans l'esprit indiqué ci-dessus, il peut contenir des indications de recherche dépassant largement le raisonnable pour une épreuve de six heures, parce que son étude sera intégrée, l'année suivante à la préparation des candidats, dont elle contribuera à enrichir la culture. Mais peut-être alors, faut-il plus clairement le dire et, en présentant la succession des situations proposées, dire où se situe l'attente principale du jury pour ce qui est de la session de recrutement en cours. La partie "contrôle des connaissances-résultats généraux préalables" relève assurément d'une telle attente ; au-delà, il est acceptable que soient dessinées assez loin les pistes sur lesquelles s'est engagée, avant l'effort du candidat, la réflexion de l'auteur, mais il est nécessaire que le barème explicite de l'épreuve elle-même ne soit conçu qu'autour des plus raisonnablement accessibles d'entre elles dans le temps imparti. Et je le répète, il faut, à mon sens, revoir le tout dans une cohérence d'approche qui n'est pas actuellement respectée.