Vie de l'Association

Le groupe de travail Après EVAPM Collège a analysé en 1991-92 les résultats fournis, à propos du calcul numérique, par les divers test EVAPM passés de 1987 pour la Sixième à 1990 pour la Troisième, et 1991 pour 6ème et 5ème «bis». De là une première réflexion soumise au Comité National du 21 juin 1991. Quelques amendements ont conduit au texte que voici, par ailleurs envoyé au Groupe Technique de maths du Conseil National des programmes.

Connaissance des nombres. Calcul numérique.

Texte adopté par le Comité National

le 21 juin 1992

> «Au quinzième siècle, savoir faire une division donnait le pouvoir. Dans l'école de Jules Ferry, il y a un siècle, c'était sans doute une promotion de savoir bien calculer (ce qui voulait dire faire des opérations sans faute). Aujourd'hui, ce qu'il faut, c'est savoir organiser des données pour pouvoir les traiter, organiser des calculs et les effectuer le plus efficacement possible à l'aides machines dont on dispose, avoir les moyens de vérifier les résultats, être capable de déterminer rapidement (ce qui ne signifie pas forcément sans papier ni crayon) l'ordre de grandeur d'un résultat ou d'une approximation. On remarquera que toutes ces connaissances et tous ces «savoir-penser» n'ont que peu à voir avec la bonne exécution à la main des techniques opératoires traditionnelles. Mais, en définitive, les machines ne font qu'amplifier une nécessité d'organisation.»
>
> *«Le Calcul Numérique» (COPREM))*

Ce texte de la COPREM insiste sur l'interaction et la complémentarité des différents modes de calcul : calcul à la main, calcul mental, calcul machine. La confrontation, d'une part entre les différents modes de traitement, et d'autre part entre un point de vue théorique et les calculs effectifs correspondants, a un effet très formateur. *(Pour plus de précision, voir ce même texte de la COPREM).*

Quelques compétences reprises du Cours Moyen et développées en Sixième:

- Effectuer sur des nombres décimaux courants des calculs de sommes, de différences et de produits ;
- Passer, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire décimale (et réciproquement): $3{,}2 = \frac{32}{10}$; $\frac{51}{100} = 0{,}51$.
- Ranger des nombres courants en écriture décimale.

ECRITURES DECIMALES ET FRACTIONNAIRES

Les élèves commencent à fréquenter les nombres décimaux dès le Cours Moyen; il apparaît, à la lumière d'EVAPM6 et de l'évaluation à l'entrée en $6^{ème}$, que les élèves sont loin de maîtriser le concept. De toute façon, ce concept n'est pas entièrement construit à l'entrée en $6^{ème}$ et c'est normal. Pour améliorer la connaissance des décimaux, il faut une longue pratique et il semble recommandé de manipuler des nombres d'au moins quatre chiffres décimaux.

Certaines habitudes (ex.: enseignement des décimaux à partir de la mesure, de la monnaie,... manière de lire les nombres) engendrent chez les enfants des représentations du type : *un nombre décimal est la juxtaposition de deux nombres entiers séparés par une virgule*. Il conviendrait de faire apparaître la rupture fondamentale existant entre **N** et **D** ou **Q** (à savoir le caractère de densité dans **R**). Le décimal sert à «approcher» les autres nombres.

D'autre part, un travail d'articulation entre les différents registres de représentation s'impose:

- **Langue naturelle**: une lecture usuelle dans la vie courante, et fréquente en classe, renforce dans la tête des élèves cette idée qu'un décimal est la juxtaposition de deux naturels séparés par une virgule 32,924 est lu «trente deux virgule neuf cent vingt quatre». On pourrait s'efforcer nous mêmes et inciter les élèves à faire selon les besoins et les situations, des lectures correctes donnant un sens au nombre: «trente deux unité neuf cent vingt quatre millièmes» ou «trente deux unités, neuf dixièmes, deux centièmes et quatre millièmes» ; on peut aussi passer à une lecture épelée: «Trente deux virgule neuf deux quatre». Bien sûr, si le nombre représente une grandeur et a alors une unité, on pourra dire par exemple: « trente deux mètres et neuf cent vingt quatre millimètres».

- **registre des figures:** Il est regrettable que la représentation des fractions à l'aide de figures géométriques, comme carrés, disques ou autres, ne soit pas une compétence exigible en 6ème. Les problèmes constatés concernant soit le statut de fraction, soit le changement d'écriture pourraient venir du fait que seulement un élève de 6ème sur deux sait colorier 1/4 de gâteau.«*Ne figurant pas dans les compétences exigibles, cette notion de retrouve donc dans les questionnaires d'approfondissement; c'est manifestement un abus. En effet, ces représentations assurent une maîtrise du sens (...)*» (EVAPM6/87, page 43).

Cet apprentissage permettrait e n outre de «*visualiser*» l'équivalence de plusieurs écritures pour un même nombre.

- **registre symbolique:** une compétence essentielle visée dès la 6ème pourrait être par exemple: «*Savoir écrire un nombre sous différentes formes appropriées à la situation dans laquelle il apparaît*» :

$$32{,}92 = \frac{3292}{100} = 32 + \frac{92}{100} = 32 + \frac{9}{10} + \frac{2}{100} = \frac{32920}{1000}$$

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{3}{4} = 75\% = 750\ ‰$$

Ceci permettrait également de faire prendre conscience aux enfants des rôles d'opérateur ou de mesure des nombres décimaux.

Dans l'apprentissage sur les décimaux, il faut donc garder les compétences exigibles telles qu'elles figurent au programme de 6ème, tout en veillant à ce que les techniques utilisées se développent en liaison avec les différentes écritures d'un nombre décimal, la mesure et les changements d'unité.

En 4ème, il apparaît que la simplification des fractions, dans l'optique d'une plus grande efficacité dans les calculs est loin d'être maîtrisée, et bien souvent refusée. Pour cela, on pourrait peut-être entraîner les élèves en 6ème et en 5ème, à décomposer un nombre en produit de facteurs (pas nécessairement premiers).

Les critères de divisibilité figurent au programme de 6ème, sans plus de précision : «*Les critères de divisibilité que l'on ne justifiera pas, s'appliqueront à la simplification d'écritures fractionnaires et à des exercices de calcul mental*». Il serait bon que la pratique des critères de divisibilité par 2, 3, 5, 10^n soit une compétence exigible, d'autres critères pouvant être utilisés en classe pour leur commodité. L'addition des fractions pourrait être aussi traitée dans son ensemble en 5ème, ce qui allègerait le programme de 4ème.

La pratique des techniques opératoires sur les fractions est assez bien maîtrisée. Mais l'apprentissage semble être purement algorithmique compte tenu des erreurs fréquentes que l'on rencontre (confusion entre les deux règles de calcul):
- mise au même dénominateur pour un produit;
- addition des numérateurs et dénominateurs entre eux pour une somme.

Au niveau de l'apprentissage, il faudrait donc peut-être insister d'avantage sur le (s) **sens de la fraction**:
- déno**mi**nateur qui désigne le **nom**, la partie de l'unité que l'on considère,
- **numéra**teur qui en désigne le **nombre,** la quantité: trois quarts, deux cinquièmes ...
- le "comptage" (deux cinquièmes et un cinquième) qui nécessite un même dénominateur pour l'addition,
- le "complément de nom" (ou l'opérateur) pour la multiplication comme "le double de", "les deux tiers de".

PUISSANCE DE 10 - PUISSANCE D'UN NOMBRE:

Si la connaissance de 10^{-n} semble *a priori* nécessaire, celle de a^{-n} ne l'est pas. Cette notation n'est qu'une commodité dont l'intérêt est d'élargir, en toute cohérence, le champ d'application des règles de calcul sur les puissances aux exposants négatifs. Mais la plupart des élèves de 4ème ne semblent pas aptes à l'accepter.

Malgré les précautions d'usage, voire les restriction, des commentaires et du libellé de la compétence sur le calcul des puissances: «Savoir utiliser **sur des exemples numériques, pour des exposants très simples**...» la partie finale de la compétence induit la connaissance de formules qui ne semblent pas du tout pertinentes pour la moitié des élèves. La formule $(a^m)^n = a^{m \times n}$ qui ne figure pas dans le programme de collège, mais qui est dans la plupart des manuels de 4ème, est à banir, et ceci devrait être explicité dans les commentaires : pour calculer $(a^6)^3$, l'élève peut très bien écrire $a^6 \times a^6 \times a^6$. **Plutôt que l'utilisation de formules, il vaut mieux revenir, dans chaque calcul, à la définition d'une puissance.**

RACINE CARRÉE

On retrouve, pour les racines carrées, la perte de sens rencontrée à propos des fractions et des puissances négatives d'un nombre lorsque le nombre n'est pas un décimal. Problème conceptuel lié à l'appropriation de l'écriture qui désigne la valeur exacte, et à l'usage des calculatrices qui donnent des valeurs approchées. C'est en définitive le même problème conceptuel que rencontrent les élèves pour les lettres qui désignent un nombre et en particulier à propos de l'écriture $-2y$ qui peut désigner un nombre positif !

VALEURS EXACTES-VALEURS APPROCHÉES :

Il apparaît que pour beaucoup d'élèves, l'écriture fractionnaire n'est pas un nombre (voir la remarque précédente); ces élèves ne conçoivent pas que, comme l'écriture décimale, l'écriture fractionnaire est une notation qui désigne un nombre. De plus, l'usage de la calculatrice incite à privilégier, comme résultat, l'écriture décimale. Mais elle entretient en même temps la confusion entre valeur exacte et valeur approchée. Il faudrait donc, dans les commentaires des programmes, développer et préciser la partie "calcul approché" et "ordre de grandeur" en liaison, en effet, avec l'usage de la calculatrice, et insister sur les notions de valeurs exactes et approchées.

Il faudrait aussi préciser le sens de VALEUR APPROCHÉE et APPROXIMATION DÉCIMALE comme cela a été fait dans la brochure EVAPM3/90 page 51 ; car il règne une grande confusion à ce sujet. On pourrait donner l'exemple suivant: 22/7 est une valeur approchée de π à 1/100 près car sa distance à π est inférieure à 1/100 ($22/7 \approx 3{,}142\ 857$) mais pas une valeur approchée **décimale** à 1/100 près.

PRIORITÉS OPÉRATOIRES - PROGRAMMES DE CALCUL-EXPRESSIONS NUMÉRIQUES-DISTRIBUTIVITÉ.

L'analyse EVAPM sur la "Gestion Mentale" du calcul montre les difficultés qu'éprouvent les élèves à lire une expression numérique et à organiser le calcul dans le sens d'une plus grande efficacité (liaison avec la distributivité). L'utilisation systématique de la calculatrice n'incite pas toujours à une "lecture" préalable au calcul, à une analyse de la structure de l'expression numérique ; une lecture "mot à mot" est en général suffisante dans l'utilisation de la calculatrice, et les élèves s'en contentent.

En liaison avec les priorités opératoires, on pourrait, dès la 5ème, entraîner les élèves à une lecture "en compréhension" faisant apparaître la structure de l'expression et en faisant utiliser le vocabulaire "somme", "différence", "produit", "quotient", "terme", "facteur", sur des expressions simples, dans l'optique d'expressions numériques plus complexes et d'expressions littérales en 4ème et 3ème ; il faudrait inscrire en 4ème une compétence de type traductif : passage d'une expression numérique ou littérale à un texte écrit en français et réciproquement (sur des expressions simples, bien sûr), pour inciter les élèves à lire "en compréhension" et non pas "mot à mot" ; par exemple $a^2 = b^2 + c^2$; le carré de a est égal à la somme des carrés de b et de c. (Voir aussi la question-thème AI 3-4-5 d'EVAPM3/90 page 60). Ce serait en particulier très utile pour la mise en équation en 4ème et la factorisation en 3ème. Pour la factorisation, les difficultés viennent en effet beaucoup de la confusion dans le vocabulaire: le professeur donne des explications avec des mots précis que les élèves ne connaissent pas.

INITIATION AUX ÉCRITURES LITTÉRALES.

Il apparaît dans les analyses d'EVAPM (6-5bis/91, 4/89 et 3/90) que, contrairement aux objectifs des programmes, l'initiation (la familiarisation) au calcul littéral par l'utilisation de formules (aires et volumes) est loin d'être performante! Le statut de la lettre qui désigne un nombre, une grandeur, est encore difficilement compris et accepté en 4ème-3ème. Il faudrait pourtant continuer, dès la 6ème, à "manipuler" des formules dans lesquelles les lettres représentent des grandeurs; ces formules doivent aussi être utilisées dans des problèmes de recherche conduisant à des équations à trou. Bien que la résolution d'équations du type $\frac{2{,}05}{\square} = 8{,}2$ ne soit exigible en 6ème, on peut très bien en proposer en classe.

La connaissance (récitation) des "formules" littérales concernant la DISTRIBUTIVITÉ (à partir de la 5ème) n'est peut-être pas indispensable. Par contre les deux formes d'écriture sont pratiques pour le calcul mental ; selon le problème, il est important de savoir choisir la forme la plus commode.

Il serait donc plus judicieux en 5ème de faire fonctionner cette propriété sur un grand nombre de situations très variées (calculer de deux façons différentes..., à l'occasion de techniques de calcul mental, de résolution de problèmes, du calcul de l'aire latérale d'un prisme, de l'aire d'un triangle à partir de l'aire des deux triangles rectangles déterminés par une hauteur ...) et de faire ainsi dégager progressivement la propriété qui intervient dans toutes ces situations sans en exiger pour autant la connaissance formelle. Il serait intéressant de proposer des situations montrant la supériorité de l'un des types de calcul, et pas toujours le même. En 4ème, les commentaires des programmes devraient inciter à faire établir les "formules" qui régissent développement et factorisation à partir d'activités géométriques.

En ce qui concerne les résolutions d'équations, les compétences visées en 5ème ne sont pas pertinentes car on peut très bien s'en passer dans tous les problèmes posés à ce niveau. Ne pourrait-on pas les aborder seulement en Quatrième à l'occasion de problèmes nécessitant une mise en équation, ces problèmes faisant éprouver le besoin d'apprendre les techniques de résolution.

Les inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues figurent seulement en bandeau dans le programme de 3ème, et le seul commentaire du programme à leur sujet est pour signaler qu'aucune compétence n'est exigible ! Il serait donc judicieux de les supprimer à l'occasion d'un réajustement des programmes, les difficultés rencontrées dans ce domaine par la majorité des élèves étant déjà suffisamment importantes.

CONCLUSION :

Pour faciliter la connaissance des nombres (décimaux fractions, puissances ou radicaux), il faudrait entraîner les élèves à écrire un nombre sous différentes formes. **Il faudrait aussi habituer les élèves à donner une écriture "méditée" des nombres, adaptée à l'activité qui est en jeu.**

Par ailleurs, à propos du calcul numérique, ou littéral, les élèves ont trop tendance, peut-être poussés par les professeurs (en particulier pour les élèves en difficulté), à vouloir se raccrocher à des formules, des automatismes, des mécanismes, pensant qu'ils sont le remède à leurs difficultés ou le passage obligé de la réussite. Il ne faut pas que ces automatismes qui seront bien sûr nécessaires, arrivent trop tôt ou précèdent la compréhension ; ils seraient alors complètement inutiles, voire nuisibles (voir aussi l'analyse d'EVAPM3/90 page 53).

Un travail commun s'impose donc entre les enseignants des écoles et ceux des collèges en vue d'assurer la continuité didactique des enseignements. Ce processus amorcé à l'issue des évaluations nationales CE2-Sixième, doit être poursuivi ; il nécessite des moyens de différentes natures et doit être encouragé par les autorités compétentes.