Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère: esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes»... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.):

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 210 (Georges COLLOMBAT, Chambéry)

Quel est le volume du solide de l'espace constitué de l'union (non disjointe) de deux cônes de hauteur H dont chacune des directrices est un même cercle *(C)* de rayon R, et dont les deux sommets se projettent verticalement en deux points diamétralement opposés du cercle *(C)* ?

ÉNONCÉ N°211 (François LO JACOMO, Paris)

A quelle condition sur les entiers a et d (vérifiant $1 \leq a \leq d$) existe-t-il b et c (entiers ≥ 2) tels que $(ad - bc)$ soit strictement positif et divisible par $(a + b + c + d)$?

a, b, c étant fixés (entiers ≥ 2), comment déterminer tous les entiers $d \geq 2$ tels que $(ad - bc)$ soit strictement positif et divisible par $(a + b + c + d)$?

ÉNONCÉ N°212 (Pierre BARNOUIN, Cabris)

Soient a et b deux entiers, et p un diviseur premier de $(a^2 + ab + b^2)$.

différent de 3. Montrer que : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p^3}$

Que peut-on dire de plus de l'équation $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p^k}$?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°196 (CONCOURS GÉNÉRAL 1991)

Soit S un point fixe d'une sphère (Σ). On considère les tétraèdres SABC inscrits dans la sphère (Σ) et dont les arêtes issues de S sont deux à deux orthogonales. Montrer que les plans (ABC) passent par un point fixe.

SOLUTION de René MANZONI (Le Havre) :

En désignant par K le centre de la sphère (Σ), on constate que

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

Le point G, défini par $\overrightarrow{SG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SK}$, est donc l'isobarycentre des points A, B, C. C'est dire que ce point fixe G appartient à tous les plans (ABC).

Autres Solutions :

Jean AYMES (Montauban), Hubert BARBERIS (Menton), Luc BARRIA (Serres Morlaas), René BENOIST (Palaiseau), Michel BIGOT (Cherbourg), Mireille BOURNAUD (Vitry s/Seine), Francis BRASSART (Arras), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), François CLAUSS (Marckolsheim), Henry COQUILLE (Chamonix), Jacques DAUTREVAUX (Saint-André), Hervé DEBRAY (Casablanca), Henri DEGRUTERE (Chaumont), Jean-Claude EMEILLAT (Guipavas), Robert FERREOL (Paris), Christian GAUTIER (Versailles), Thierry GUIRAUD (Thourotte), Michel HEBRAUD (Toulouse), Pierre JULLIEN (Meyreuil), Alain LARROCHE (Paris), Pierre MANAC'H (Lorient), A. MARCOUT (Sainte Savine), Y. MONTFORT (Cahors), Charles NOTARI (Noé), Maurice PERROT (Paris), Alain PICHEREAU (Saint-Yrieix), Roger QUENTON (Draguignan), Anne-Marie RAUCH (Strasbourg), Raymond RAYNAUD (Digne), Pierre RENFER (Ostwald), Jean-Paul ROUX (Unieux), Geneviève SAMBARD (Saint-Quentin), Michel TANGUY (Quimper), Mr VIDIANI (Fontaine lès Dijon)...

REMARQUES :

Plusieurs collègues rédigent systématiquement les solutions des problèmes de Concours Général (ou proposent ces problèmes à leurs élèves), et des revues les publient plus vite que la présente rubrique (cf. solution publiée dans *Quadrature*, septembre-octobre 1991, p. 51 ; transmise par Robert FERREOL).

Jean AYMES écrit : «J'en ai fait le prétexte d'un petit article qui devrait paraître dans la brochure APMEP sur la classe de première. Car j'estime que ce problème est un excellent exemple de ce qu'on peut de temps à autre tenter pour développer un esprit de recherche avec les programmes actuels : peu de contenu mathématique mais beaucoup de compétences en matière de recherche».

Francis BRASSART a rajouté, à l'intention de ses élèves de Terminale C, des questions intermédiaires, «car il s'agit d'une classe de niveau "moyen"».

ÉNONCÉ N° 197 (Dominique ROUX, Limoges)

Soient dans l'espace 8 points tels qu'il n'y en ait pas quatre dans un même plan. Chaque segment joignant deux quelconques d'entre eux est peint soit en bleu, soit en rouge. Soit B le nombre des triangles dont les trois côtés sont bleus et R le nombre des triangles dont les trois côtés sont rouges. Quelle est la plus petite valeur possible de $B + R$?

SOLUTION de l'auteur.

Désignons par A_i $(1 \leq i \leq 8)$ les 8 points. A chaque couple de segments concourants A_iA_j, A_iA_k, associons le «poids» P^i_{jk} égal à 2 si les deux segments sont de la même couleur, à - 1 sinon. Pour un triangle $A_i\,A_j\,A_k$ la somme des trois poids $P^i_{jk} + P^j_{ki} + P^k_{ij}$ est égale à 6 si les 3 côtés sont de la même couleur, à 0 sinon.

Soit $P^i = \sum\limits_{1 \leq j < k \leq 8} P^i_{jk}$ la somme des poids de tous les couples de segments passant par A_i, et $P = \sum\limits_{i=1}^{8} P^i$. Puisque chaque couple de segments concourants appartient à un triangle et un seul, P est égal à 6 fois le nombre des triangles dont les trois côtés sont de la même couleur : $P = 6(B + R)$. D'autre part, du point A_i peuvent partir soit 7 segments d'une couleur et 0 de l'autre couleur, soit 6 et 1, soit 5 et 2, soit 4 et 3. Les valeurs correspondantes de P^i sont $2\binom{7}{2} = 42$; $2\binom{6}{2} - 6 = 24$; $2\binom{5}{2} + 2 - 2\times 5 = 12$;

et $2\binom{4}{2} + 2\binom{3}{2} - 3\times 4 = 6$. Donc $P^i \geq 6$ et par suite, $P \geq 6 \times 8$.

D'où $B + R \geq 8$. Or, on peut trouver des configurations pour lesquelles $B + R$ est égal à 8, par exemple celle obtenue en peignant en bleu tous les segments reliant entre eux les points $A_1\ A_3\ A_5\ A_7$; en peignant en bleu tous les segments reliant entre eux les points $A_2\ A_4\ A_6\ A_8$, et en peignant en rouge tous les autres segments. Donc la plus petite valeur possible de $B + R$ est 8.

REMARQUE :

Ce résultat se généralise : la démonstration ci-dessus permet de prouver que s'il y a $n = 2p$ points, la somme $B + R$ est au moins égale à $p(p-1)(p-2)/3$, et s'il y en a $n = (2p + 1)$, elle est au moins égale à $(2p+1)p(p-2)/6$. Et une étude de la Sup4 du Lycée Corneille à Rouen pour $n \leq 12$ (corroborée par une étude informatique de Pierre BARNOUIN pour $n \leq 99$) semble attester que ces minimums sont atteints (à condition, lorsque n est impair, d'arrondir à l'entier supérieur).

Dans le premier cas ($n = 2p$), le résultat est effectivement atteint si, comme le propose la Sup4 du lycée Corneille, «on divise l'ensemble des n points en deux sous-ensembles de p points. On relie tous les points d'un sous-ensemble entre eux de la même couleur (rouge). On procède de même en utilisant la même couleur pour l'autre sous-ensemble. Tous les couples de points n'appartenant pas à un même sous-ensemble sont reliés en bleu».

Mais dans le second cas ($n = 2p + 1$), la solution est moins évidente. Il est clair, d'après la démonstration de Dominique ROUX, que l'optimum est atteint lorsque de chacun des n points (sauf au plus un) partent autant de segments rouges que de segments bleus. On peut donc procéder ainsi : on divise l'ensemble en deux sous-ensembles, l'un, E, de p points, l'autre F, de $(p + 1)$ points. A chaque point de E on associe par une injection f un point de F, qu'on lui relie par un segment rouge : tous les autres segments reliant un point de E à un point de F sont bleus, et on appelle M le point de F qui n'est relié par un segment rouge à aucun point de E. On groupe deux par deux les points de F (ou, si p est pair, les points de F à l'exclusion de M). Chacun des k couples ainsi obtenus ($k = E\,[(p + 1)/2]$) définit un segment bleu, mais tous les autres segments reliant deux points de F sont rouges, tout comme sont rouges tous les segments reliant deux points de E. Il en résulte que de tout point (sauf, lorsque p est impair, de M) partent autant de segments rouges que de segments bleus, ce qui suffit à prouver, d'après la démonstration de Dominique ROUX que $B + R = E\,[(2p + 1)p(p - 2)/6 + 1/2)]$.

Plus précisément, les triangles rouges sont composés soit de trois points de E, soit de trois points de F (du fait que f est injective) : dans le premier cas, on a $[p(p - 1)(p - 2)/6]$ triangles rouges, mais dans le second cas, on n'en a que : $[(p + 1)p(p - 1)/6 - k(p - 1)]$. Par ailleurs, il y a des triangles bleus : très précisément $k(p - 2)$ si p est pair (un de plus si p est impair), ayant pour base l'un des k segments bleus (P_iP_j) de F et pour sommet n'importe quel point de E sauf ceux (s'ils existent !) reliés à P_i ou P_j par un segment rouge. D'où le résultat.

Ce problème peut également être approfondi dans d'autres directions. Appelons «configuration minimale d'ordre n» une configuration de n points ayant un nombre minimum de triangles unicolores. Les configuration minimales d'ordre pair décrites ci-dessus admettent des sous-configurations minimales de n'importe quel ordre pair, mais n'admettent pas de sous-configurations minimales d'ordre impair (≥ 5), alors que les configurations minimales d'ordre impair décrites ci-dessus admettent des configurations minimales de tous ordres : cela permet de construire des configurations minimales d'ordre pair admettant des sous-configurations minimales de tous ordres. Toute sous-configuration d'ordre $4k$ d'une configuration minimale d'ordre $(4k + 1)$ est minimale. Mais pour un couple $(m\ ,\ n)$ vérifiant $m > n$, et une configuration minimale C_m d'ordre m, on ne peut pas toujours trouver de configuration minimale d'ordre n contenant C_m. La démonstration de tous ces résultats est laissée au lecteur.

Autre direction de recherche : que se passe-t-il si l'on dispose de trois couleurs pour colorier les segments ?

Autres solutions : Gilbert ROUX (L'Hay les Roses) avec ce commentaire (juin 1992) : «J'ai hésité à vous envoyer mon pavé. Je m'y suis résolu pour vous montrer à quelles extrémités vos problèmes peuvent conduire, à quels errements on peut être amenés si l'on tient à tout prix à trouver une solution, bref, pour vous montrer que vos problèmes peuvent mobiliser une bonne partie de l'énergie d'un malheureux enseignant de mathématiques obstiné. Et, pour tout dire, après 13 pages, arriver à conclure, ça prouve quand même un certain plaisir».

… et sept solutions incomplètes ou fausses !

ÉNONCÉ N° 198 (Dominique ROUX, Limoges)

Existe-t-il trois entiers non nuls dont la somme des carrés est un carré et dont la somme des cubes est un cube?

RÉPONSES

«On pourrait dire…Oh ! Dieu !…bien des choses en somme.
«En variant le ton, – par exemple, tenez :

Magistral (Raymond RAYNAUD, Digne),

«OUI.

«Compte-tenu des critiques formulées contre certains énoncés, je demande 20/20».

Erudit (Jean-Joël DELORME, Lyon),

«Dans "Les nombres remarquables" (Hermann, 1983), page 126, François Le Lionnais signalait la solution suivante, due à un certain A. Martin, en 1898 :

A = 11 868 013 975 030 087
B = 16 269 106 368 215 226
C = 88 837 226 814 909 894

(A, B, C) serait le plus petit triplet répondant à la question.»

Argumenté (Philippe DELEHAM, Reims):

«En 1917, Rignaux a proposé la solution suivante :

$x = n\,[12n^6(m^2+2n^2)^2(m^6-6m^3n^3-4n^6)+12n^3(m^2+2n^2)(m^3+n^3)g-g^2]$

$y = n\,[-12n^6(m^2+2n^2)^2(m^6+6m^3n^3-4n^6)+12n^3(m^2+2n^2)(m^3-n^3)g+g^2]$

$z = m\,[12n^6(m^2+2n^2)^2(m^6+8n^6)-24n^6(m^2+2n^2)g+g^2]$

où $g = m^8+8m^6n^2+12m^4n^4+5m^2n^6+16n^8$ avec m et n entiers choisis de façon à rendre carré parfait m^2+2n^2.

«J'ignore si c'est la solution générale. En faisant $n = 2$, $m = 1$, il vient $g = 4\,641$; $x = -\,8\,598\,978$; $y = 12\,694\,338$; $z = -\,10\,705\,599$».

Futé (personne, malheureusement…),

$1^2+2^2+(-2)^2=3^2$

$1^3+2^3+(-2)^3=1^3$

(Quelle note me donne Monsieur RAYNAUD ?)

Algorithmique (Pierre BARNOUIN, Cabris).

```
"DEF TAB 8:DIM Q(750),Z(10):T=TIMER:FOR N=1 TO 750:Q(N)=N*N*N:NEXT
"LONG FN P:X=X+1:Z(X)=N:PRINT R,"=^2  "C"+"B"+"A,""=^3  "N:END FN
FOR N=17 TO 749 STEP 2:I=X:WHILE I:IF N MOD Z(I)=0 THEN N=N+2
   I=I-1:WEND:FOR A=N-16 TO 1 STEP -16:D=Q(N)-Q(A):B=N-1:C=2
WHILE Q(B)>D:B=B-2:WEND:WHILE B>C:WHILE Q(B)+Q(C)<D:C=C+2: WEND
        IF D=Q(B)+Q(C) THEN K=A*A+B*B+C*C:R=USR 2(K):IF R*R=K THEN FN P
B=B-2:WEND:NEXT A,N:PRINT TIMER-T"sec"
```

```
75      =^2     14 + 70 + 23            =^3     71
119     =^2     34 + 114 + 3            =^3     115
551     =^2     18 + 426 + 349          =^3     493
755     =^2     198 + 714 + 145         =^3     721
16 sec
```

Solution qui s'appuie sur la remarque suivante :

1°- Pour que la somme des carrés de trois entiers sans facteur commun soit un carré (Q^2), l'un (A) doit être impair, et les deux autres (B et C) pairs. De plus, $Q^2 - A^2$ étant multiple de 8, B et C doivent être égaux modulo 4 et la somme de leurs cubes est alors multiple de 16.

2°-Pour que la somme des cubes de A (impair), B et C (pairs) puisse être un cube N^3, on doit avoir :

$$N^3 - A^3 = (N - A)(N^2 + AN + A^2) = B^3 + C^3$$

$N^2 + AN + A^2$, somme de trois impairs, étant impair, et $B^3 + C^3$ étant multiple de 16, $N - A$ est aussi nécessairement multiple de 16.

Les plus petites solutions irréductibles non triviales sont donc :

$70^2 + 23^2 + 14^2 = 75^2$	$70^3 + 23^3 + 14^3 = 71^3$
$114^2 + 34^2 + 3^2 = 119^2$	$114^3 + 34^3 + 3^3 = 115^3$
$426^2 + 349^2 + 18^2 = 551^2$	$426^3 + 349^3 + 18^3 = 493^3$
$714^2 + 198^2 + 145^2 = 755^2$	$714^3 + 198^3 + 145^3 = 721^3$

Par ailleurs, Charles NOTARI (Noé) fait remarquer que l'équation : $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ admet des solutions paramétrées : celle d'Euler (avec k, a et b rationnels)

$$x = k[1 - (a - 3b)(a^2 + 3b^2)],$$
$$y = k[(a + 3b)(a^2 + 3b^2) - 1],$$
$$z = k[(a^2 + 3b^2)^2 - (a + 3b)],$$
$$t = k[(a^2 + 3b^2)^2 - (a - 3b)].$$

qui peut se démontrer en remarquant que

$$(u^2 - w)^3 + (uw - 1)^3 = (u^3 - 1)(u^3 + 1 - 3uw + w^3),$$

car le membre de gauche est trivialement nul pour $u = 1$, $u = j$ ou $u = j^2$; dès lors, si l'on pose $x = -k(uv - 1)$, $y = k(uw - 1)$, $z = k(u^2 - w)$, $t = k(u^2 - v)$, (ce qui, sauf cas triviaux, est toujours possible, il suffit de prendre :

$$u = (x + y)/(t - z) \text{ et } k = (xz + yt)/[(t - z)(u^3 - 1)]),$$

l'équation $t^3 - x^3 = y^3 + z^3 \Leftrightarrow$ soit $k = 0$, soit $u^3 = 1$, soit $v = w$ (solutions triviales) soit $3u = v^2 + vw + w^2 = 3a^2 + c^2$ en posant $a = (v + w)/2$ et $c = (v - w)/2$, doù la paramétrisation ci-dessus, avec $c = 3b$. Toute solution non triviale peut donc être paramétrée ainsi de six manières différentes : $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ s'obtient pour les triplets $(k, a, b) = (1/2, 0, 1)$, $(1/3, 1, 1)$, $(1/9, -1/2, 3/2)$, $(7/13, 9/14, 13/14)$, $(19/63, -11/19, 21/19)$ et $(13/114, 10/13, 19/13)$.

L'autre solution paramétrée, celle de Ramanujan (a et b et $1/k$ entiers) :

$$x = k(3a^2 + 5ab - 5b^2),$$
$$y = k(4a^2 - 4ab + 6b^2),$$
$$z = k(5a^2 - 5ab - 3b^2),$$
$$t = k(6a^2 - 4ab + 4b^2),$$

se démontre, elle, en remarquant que $(u + v)^3 - (u - v)^3 = 2v(3u^2 + v^2)$ et que donc, pour que $(u + v)^3 - (u - v)^3 = (u' + v')^3 - (u' - v')^3$, il **suffit** que $v = 4v'$ et $3u'^2 + v'^2 = 4(3u^2 + v^2)$, soit $(u' - 2u)(u' + 2u) = 21v'^2$; si l'on pose : $v' = a^2 - b^2$, $u' - 2u = 3(a + b)^2$, $u' + 2u = 7(a - b)^2$, on trouve bien la solution annoncée.

Notons que la démonstration ci-dessus nous fournit une infinité d'autres paramétrages, si l'on pose plus généralement $v = n^2v'$ et qu'on décompose de diverses manières $(n^6 - 1)$; par exemple, pour $n = 4$:

$$x = k(33a^2 - 37ab - 31b^2),$$
$$y = k(72a^2 - 8ab + 76b^2),$$
$$z = k(31a^2 + 37ab - 33b^2),$$
$$t = k(76a^2 - 8ab + 72b^2).$$

On en déduit même, que pour peu que $3pq = (n^6 - 1)$:

$$(np + nq + 2n)^3 = (np + nq - 2n)^3 + (2n^3 - q + p)^3 + (2n^3 + q - p)^3.$$

Mais à la différence de celle d'Euler, ces paramétrisations ne fournissent pas toutes les solutions : parmi toutes les solutions irréductibles de $x^3+y^3+z^3=t^3$ déterminées par Pierre BARNOUIN (790 si $1000 > t > x > y > z > 0$, 1421 si $1000 > t > x > y > z > -y$), à peine 10% (73 avec $xyz > 0$, 12 avec $xyz < 0$) sont du type de Ramanujan, certaines pouvant être paramé-

trées de plusieurs manières différentes : $a = 5$ et $b = 2$ donne la même solution irréductible que $a = 1$ et $b = 0$. Par ailleurs, aucune des solutions de notre problème n'est atteignable par la méthode de Ramanujan, car si a et b sont premiers entre eux, x et z sont impairs, y et t sont pairs, donc :
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2 \pmod 4$.

Les solutions irréductibles de : $x^2 + y^2 + z^2 = s^2$, quant à elles, sont toutes (est-ce vraiment certain ?) de la forme :
$[a^2 + b^2 - c^2 - d^2]^2 + [2(ac + bd)]^2 + [2(ad - bc)]^2 = [a^2 + b^2 + c^2 + d^2]^2$
avec a, b, c et d entiers ($a + b + c + d$ impair) : obtient-on quelque chose en comparant ce paramétrage à celui d'Euler pour $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$?