Didactique

Point de vue sur…

Les activités géométriques et l'initiation au raisonnement déductif au collège

Annie Fauconnet

IREM de Marseille

Il y a deux types d'activités géométriques tout au long du collège.

1 - ***Soit l'objectif est de réaliser un dessin***, le plus précis possible, à partir des données numériques, (ou en reproduisant et complétant un dessin donné), et éventuellement, de l'utiliser pour faire des mesures, et calculer une aire par exemple.

2 - ***Soit l'objectif est de faire découvrir*** qu'une figure, construite pour respecter certaines contraintes, ou propriétés, possède alors d'autres *propriétés que l'on peut trouver par déduction*.

Les activités du premier type (dessin) sont prédominantes en classe de Sixième, mais restent un objectif tout au long du collège. Outre les connaissances techniques (vocabulaire et savoir-faire sur les tracés), elles impliquent un réel travail de réflexion : pour reproduire une figure, (par exemple un triangle ou un polygone), il faut d'abord l'analyser, choisir les mesures à faire et les instruments à utiliser, et ensuite réaliser des tracés dans un certain ordre. On peut demander aux élèves d'écrire leur programme de construction.

Mais à partir des activités de dessin, on peut aussi commencer à former les élèves à *une attitude scientifique, et à les initier au raisonnement déductif*, en ménageant toujours une étape de *mise en œuvre d'une propriété pour construire avant l'étape d'utilisation pour démontrer*.

Développement des activités du deuxième type (déduction).

Elles sont conduites tout d'abord sous la direction du professeur, pour établir les théorèmes et les propriétés à connaître (dans les activités de découverte), et elles prendront de plus en plus de place dans les exercices, en relation avec le développement des possibilités des élèves.

La première étape est *l'observation critique*, et sans a priori, des productions graphiques. Par exemple, en classe de Sixième, quand on fait tracer deux cercles de rayons donnés, centrés en des points donnés, tels que la distance des centres est égale à la somme des rayons, l'observation naïve peut faire supposer une zone de points communs aux deux cercles ; mais le recours au raisonnement permet de trancher: si l'on imagine que les deux cercles ont au moins un point commun en dehors de la droite des centres, alors on trouve une ligne brisée (d'un centre à l'autre), qui a la même longueur que le segment joignant les centres. Pour que ce soit encore plus évident pour les élèves, on peut leur faire imaginer que l'on regarde la figure avec un instrument grossissant!

Ainsi, on manifeste la *différence entre l'objet physique et son rôle de figure* (support d'un objet géométrique conceptuel). Il n'est pas question, bien sûr, de tenir ce discours aux élèves! Ils voient seulement que les deux cercles physiques ont une zone, plus ou moins étendue, de points communs, alors que les deux cercles idéalisés n'en ont qu'un.

De même, dans la mesure où *l'on ne peut tracer que des portions de droites, la notion de parallélisme est une pure invention conceptuelle*, sans vérification physique possible. Mais on peut la découvrir, par le raisonnement, à partir de l'étude de droites perpendiculaires à une même droite, quand on sait qu'il n'y a qu'une droite perpendiculaire à une droite donnée, passant par un point donné. De plus, on a ainsi un critère de parallélisme, qui est local et lié à l'image d'un rectangle.

D'autre part, depuis le début de la classe de Sixième, on habitue les élèves à utiliser certaines conventions de représentations, et certains *codages de propriétés* (égalité de longueurs, parallélisme, orthogonalité); cela aussi leur permet de prendre un peu conscience du statut d'une figure et de faire attention aux données qu'elle représente. De plus, on peut leur proposer de faire des *schémas à main levée*, portant les indications de l'énoncé (par exemple en Cinquième pour construire un parallélogramme ayant certaines dimensions imposées).

Enfin, les élèves ont l'occasion, notamment dans les *activités de découverte des propriétés* à savoir, de saisir, de façon plus ou moins consciente et explicite selon les enfants, *la relation entre les données et une propriété qui en résulte*: si l'on construit une figure de façon à ce qu'elle vérifie certaines propriétés, (par exemple en Sixième, un quadrilatère à diagonales perpendiculaires en leur milieu) alors qu'elle a d'autres propriétés qu'on peut trouver par déduction (les quatre côtés ont même longueur). Même si la compréhension est très imparfaite pour certains élèves, la démarche systématique de démonstration a un rôle formateur, car elle leur fait percevoir, au moins, qu'il y a une filiation entre les propriétés.

Pour encourager l'attention aux données, il faut systématiquement la stimuler en classe, et, pour cela, *utiliser les figures pour poser des questions et non pour affirmer des réponses*.

L'apprentissage des divers types de raisonnement se développe surtout en Quatrième, mais il est préférable *que les exercices de démonstration concernent d'abord un champ restreint de connaissances*, de façon à faire porter l'effort d'attention sur la saisie des hypothèses, la réalisation des figures et leur codage, et l'utilisation de théorèmes bien connus.

De plus, il vaut mieux poser des questions ouvertes plutôt que des questions sous la forme *«démontrer que»*. En effet, lisant la phrase «démontrer que la propriété P est vraie», les élèves enregistrent surtout «P est vraie», et cette affirmation rend la propriété encore plus évidente sur la figure. De plus, ils ont tendance à avoir la réaction qui est assez usuelle dans la vie courante: si tel fait est vrai, le fait en question est tellement plausible qu'on le tient pour vrai. Par contre, devant une question ouverte, il faut explorer, et chercher des arguments pour acquérir une conviction.

Il faut aussi se méfier des énoncés commençant de la façon suivante: «soit telle figure, (un quadrilatère par exemple), ayant telle propriété particulière...» Il faut bien expliquer aux élèves qu'il s'agit de *fabriquer* un quadrilatère ayant la propriété indiquée et non de chercher dans leur panoplie de quadrilatères particuliers habituels ceux qui ont cette propriété. Cette démarche d'invention, et non d'inventaire, est particulière aux mathématiques et nouvelle pour les élèves.

La distinction entre les deux types d'activités n'est pas toujours facile à faire pour les élèves.

Il faut donc que le professeur précise bien ce qu'il attend à l'occasion d'un exercice:
- soit un dessin très précis et, éventuellement, le programme de sa réalisation,
- soit une figure qui permet de visualiser les données, et de guider la recherche des propriétés qui s'en déduisent; une telle figure doit être codée (égalité de longueurs, orthogonalité, etc...).

L'ennui c'est que, parfois, dans ce type d'exercices, parmi les données, certaines sont numériques.

Pour compliquer la situation, il y a encore un type d'exercices, nécessitant d'adopter successivement les deux attitudes; par exemple, s'il est demandé de construire un parallélogramme selon certaines contraintes numériques de longueurs ou d'angles, il faut d'abord faire un schéma porteur des informations, avant de découvrir la manière de faire la construction, et de la réaliser.

Un tel *exercice de construction est proposé en application d'une méthode découverte et justifiée en classe*. Mais il ne paraît pas être un objectif de l'enseignement au collège, de proposer des problèmes de construction, nécessitant une phase d'analyse du problème, la mise au point d'un programme de construction, puis la phase de justification.

Caractérisations des parallélogrammes.

La caractérisation vectorielle est exigible en troisième, les autres caractérisations sont exigibles en quatrième, mais elles ne sont pas précisées dans le texte du programme, ni dans son commentaire. Or, il y a un énoncé traditionnel qui figure dans tous les manuels de quatrième (et même dans au moins un manuel de seconde!):

> «si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme». (voir NB page suivante)

On fait utiliser ce théorème aux élèves, de façon incorrecte, en ne leur demandant jamais (et pour cause, car ce serait bien trop compliqué), de *justifier*, à partir des hypothèses, que le quadrilatère est non-croisé. Cette pratique renforce leur tendance naturelle, pour faire des déductions, à prendre en considération, non seulement les hypothèses affichées, mais aussi certains renseignements qu'ils voient sur la figure.

Or la forme efficace de ce théorème est justement la forme vectorielle. Mais quand les élèves ont pris l'habitude d'utiliser la première forme citée, ils refusent de s'approprier la seconde.

Il est symptomatique à ce sujet, de constater que, sur deux cent sept élèves à qui, dans un contexte favorable à l'utilisation de la caractérisation vectorielle, on demandait de démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, dix élèves seulement ont utilisé ce moyen, et quarante trois ont eu recours aux côtés opposés parallèles et de même longueur (EVAPM 3, 1990, épreuve spéciale d'argumentation, déduction, expression).

N.B. Cette propriété est utilisée, après justification, pour *construire*, ou *tracer sur papier quadrillé*, un parallélogramme, à partir de deux segments parallèles et de même longueur: on veille à joindre les extrémités de façon convenable. De même on utilise, après justification, la construction d'un parallélogramme au moyen du compas, mais sans énoncer le théorème correspondant.