

Utilisation des arbres en géométrie : Barycentres et homothéties

Marie-Laure Chaillout

Sarcelles

J'ai fait cours sur les barycentres en seconde, du temps où les barycentres étaient au programme. Devant les difficultés que rencontraient beaucoup d'élèves pour construire le barycentre de plus de trois points, je leur ai fait construire des arbres pour les aider à faire des plans. Aucune propriété des arbres n'était démontrée : c'était simplement une technique qui «marchait». Elle ne devrait pas (en principe) remplacer la justification habituelle de la construction. Je dis «en principe» car les élèves adoptaient les arbres avec enthousiasme et j'avais énormément de mal à les convaincre que cela ne remplaçait pas les explications, qu'il ne s'agissait pas d'un symbole officiel et universellement connu.

Je réservais la composition des homothéties pour les heures réservées à l'approfondissement destinées aux élèves souhaitant une orientation en 1^{er} S.

N'ayant pas de classe de 1^{er} S, je ne fais plus de cours sur les barycentres (ce qui crée une certaine frustration : c'était une leçon qui «passait bien»), mais je sais par mes collègues que certains élèves de 1^{er} S rencontrent, eux aussi, à ce niveau, des problèmes de méthode.

Dans mon esprit, les justifications théoriques sont destinées aux professeurs plutôt qu'aux élèves : si je les ai trouvées, c'est que je me suis demandé pourquoi une telle technique convenait si bien aux barycentres. Lorsque j'ai eu découvert qu'il s'agissait en fait d'un symbole opératoire et d'une opération dont je connaissais les propriétés, je me suis sentie plus sûre de moi lorsque j'incitais les élèves à son utilisation.

On peut constater dans nos classes que le choix des symboles est un facteur...déterminant de la réaction des élèves devant un problème mathématique : une symbolique trop lourde leur apparaît peu performante, leur fait perdre le fil de leurs idées et aboutit à des attitudes peu dynamiques. Par contre, ils apprécient toute symbolique qui les aide à élaborer, puis visualiser leur stratégie.

Les organigrammes sont les outils les plus fructueux de ce point de vue, à condition d'être utilisés à bon escient.

Il se trouve que d'un point de vue technique, les arbres sont particulièrement bien adaptés à la symbolisation des barycentres.

Et cette représentation se justifie théoriquement.

\mathcal{E} étant l'ensemble des points de l'espace, la notion de barycentre permet de définir une opération que l'on peut noter $*$:

$$(\mathcal{E} \times \mathbf{R}) \times (\mathcal{E} \times \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{E} \times \mathbf{R}^*$$

$$((A, \alpha), (B, \beta)) \rightarrow (A, \alpha) * (B, \beta) = (G, \alpha + \beta)$$

où G est le barycentre du point A affecté du coefficient α et du point B affecté du coefficient β . Cette opération interne dans $\mathcal{E} \times \mathbf{R}$ est donc définie pour $\alpha + \beta \neq 0$. Les propriétés des barycentres se traduisent par la commutativité et l'associativité de l'opération $*$ ainsi que par une troisième propriété :

$$[(A, \alpha) * (B, \beta) = (G, \alpha + \beta) \text{ et } (A, \alpha\gamma) * (B, \beta\delta) = (G, \alpha\gamma + \beta\delta)] \\ \Rightarrow [G = G' \Leftrightarrow A = B \text{ ou } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \text{ ou } \gamma = \delta]$$

De cette propriété découle une propriété restreinte :

$$\gamma \neq 0 \Rightarrow [(A, \alpha) * (B, \beta) = (G, \alpha + \beta) \Leftrightarrow (A, \gamma\alpha) * (B, \gamma\beta) = (G, \gamma(\alpha + \beta))].$$

Comme toute opération $*$ peut être symbolisée par un arbre :

$$(A, \alpha) * (B, \beta) = (G, \alpha + \beta) \Leftrightarrow \underbrace{\quad (A, \alpha) \quad (B, \beta) \quad}_{(G, \alpha + \beta)}$$

D'un point de vue pédagogique, une telle représentation s'introduit intuitivement à partir de la notion physique de centre de masse : un point A muni d'un coefficient α et B muni d'un coefficient β «engendrent» (si $\alpha + \beta \neq 0$) un point G implicitement muni du coefficient $\alpha + \beta$. D'où l'arbre «généalogique» et l'équivalence suivants :

$$\begin{array}{c} (A, \alpha) \quad (B, \beta) \\ \text{┌──────────┐} \\ \text{└──────────┘} \\ \text{┆} \\ (G, \alpha + \beta) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta \neq 0 \\ \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0} \end{cases}$$

Les élèves adoptent d'emblée cette symbolisation «parce qu'elle marche» : pour la construction d'un barycentre de plus de deux points, chaque arbre possible devient un organigramme où apparaissent clairement les étapes successives de la construction. Pour un même barycentre, plusieurs arbres différents permettent de découvrir des droites concurrentes.

On peut également utiliser un tel arbre pour représenter une homothétie :

$$M' = h_{\Omega, k}(M) \Leftrightarrow (M, k) \quad (\Omega, 1 - k)$$

$$\begin{array}{c} \text{┌──────────┐} \\ \text{└──────────┘} \\ \text{┆} \\ (M', 1) \end{array}$$

Il devient un outil de démonstration pour chercher la nature de la composée de deux homothéties. Soit $f = h_{B, l} \circ h_{A, k}$.

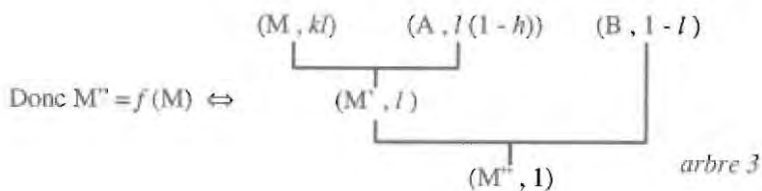
$$M' = h_{A, k}(M) \Leftrightarrow (M, k) \quad (A, 1 - k) \quad \Bigg| \quad M'' = h_{B, l}(M') \Leftrightarrow (M', l) \quad (B, 1 - l)$$

$$\begin{array}{c} \text{┌──────────┐} \\ \text{└──────────┘} \\ \text{┆} \\ (M', 1) \\ \text{arbre 1} \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} \text{┌──────────┐} \\ \text{└──────────┘} \\ \text{┆} \\ (M'', 1) \\ \text{arbre 2} \end{array}$$

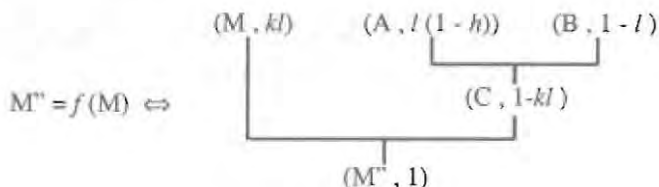
Composer les deux homothéties revient à «accrocher» l'arbre 2 à l'arbre 1, ce qui est possible grâce à la troisième propriété :

$$M' = h_{A, k}(M) \Leftrightarrow (M, kl) \quad (A, l(1 - k)) \quad \text{car } l \neq 0$$

$$\begin{array}{c} \text{┌──────────┐} \\ \text{└──────────┘} \\ \text{┆} \\ (M', l) \end{array}$$



Si $kl \neq 1$ l'associativité de l'opération $*$ permet de passer à :



Ce qui se traduit immédiatement par : f est l'homothétie de rapport kl et de centre C , C étant le barycentre de A affecté du coefficient $l(1-k)$ et de B affecté du coefficient $1-l$.

Si $kl = 1$ l'utilisation de l'associativité, dans le cas où elle est possible, débouche sur une impasse : on est donc obligé de traduire l'arbre 3 en termes d'égalités vectorielles, ce qui amène à :

$$M'' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = (l-1) \overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{M'M''} = (1-l) \overrightarrow{M'B} \end{cases} \text{ et donc } \overrightarrow{MM''} = (1-l) \overrightarrow{AB}$$

égalité dont on déduit immédiatement la nature de f .

On peut également utiliser les propriétés de l'opération $*$ pour chercher, dans le cas où $kl \neq 1$, les conditions pour que l'égalité $h_{B,l} \circ h_{A,h} = h_{A,h} \circ h_{B,l}$ soit vérifiée.

Si l'on pose :

$$\begin{array}{ccc} (A, l(1-k)) & (B, 1-l) & \text{et} & (B, k(1-l)) & (A, 1-k) \\ \underbrace{\hspace{10em}} & & & \underbrace{\hspace{10em}} & \\ (C, 1-kl) & & & (C', 1-kl) & \end{array}$$

L'opération $*$ étant commutative et munie de la troisième propriété, on a :

$$C = C' \Leftrightarrow A = B \text{ ou } 1 - k = 0 \text{ ou } 1 - l = 0 \text{ ou } 1/l = k.$$

Puisque $kl \neq 1$ donc $C = C' \Leftrightarrow A = B$ ou $k = 1$ ou $l = 1$, conditions faciles à traduire en termes de transformations.

ANNEXE 1

Démonstrations des théorèmes et définitions de l'homothétie données aux élèves

Démonstration

→ Soit T_1 le théorème :

$$\begin{aligned} [(A, \alpha) * (B, \beta) = (G, \alpha + \beta) \text{ et } (A, \gamma\alpha) * (G, \beta\delta) = (G', \gamma\alpha + \beta\delta)] \\ \Rightarrow [G = G' \Leftrightarrow A = B \text{ ou } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \text{ ou } \gamma = \delta]. \end{aligned}$$

La démonstration repose sur les propriétés des barycentres :

Les hypothèses peuvent se traduire par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta \neq 0 \text{ et } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \\ \alpha\gamma + \beta\delta \neq 0 \text{ et } \overrightarrow{AG'} = \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma + \beta\delta} \overrightarrow{AB} \end{array} \right.$$

Sous ces hypothèses :

$$G = G' \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} = \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma + \beta\delta} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A = B \text{ ou } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \text{ ou } \gamma = \delta$$

→ Soit T_2 le théorème :

$$\gamma \neq 0 \Rightarrow [(A, \alpha) * (B, \beta) = (G, \alpha + \beta) \Leftrightarrow (A, \gamma\alpha) * (B, \gamma\beta) = (G, \gamma(\alpha + \beta))]$$

- Ce théorème peut se démontrer directement :

$$\text{Si } \gamma \neq 0 \text{ alors } \left(\alpha + \beta \neq 0 \text{ et } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \right) \Leftrightarrow \left(\alpha + \beta \neq 0 \text{ et } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma + \beta\gamma} \overrightarrow{AB} \right)$$

- Il est intéressant de démontrer à l'aide de la logique formelle qu'il se déduit de T_1 .

En effet, soit P_1 la proposition $(A, \alpha) * (B, \beta) = (G, \alpha + \beta)$

et P_2 la proposition $(A, \gamma\alpha) * (B, \beta\delta) = (G', \alpha\gamma + \beta\delta)$

Puisque T_1 est un théorème

donc $(P_1 \text{ et } P_2) \Rightarrow (\gamma = \delta \Rightarrow G = G')$ est un théorème

donc $(P_1 \text{ et } P_2 \text{ et } \gamma = \delta) \Rightarrow (G = G')$ est un théorème

donc $(P_1 \text{ et } P_2 \text{ et } \gamma = \delta) \Rightarrow (G = G' \text{ et } P_2 \text{ et } \gamma = \delta)$ est un théorème

donc $(P_2 \text{ et } \gamma = \delta) \Rightarrow [P_1 \Rightarrow (G = G' \text{ et } P_2 \text{ et } \gamma = \delta)]$ est un théorème.

la proposition $G = G'$ et P_2 et $\gamma = \delta$

équivalent à $P_3 : [(A, \gamma\alpha) * (B, \gamma\beta) = (G, \gamma(\alpha + \beta))]$

la proposition P_2 et $\gamma = \delta$

équivalent à $(A, \gamma\alpha) * (B, \gamma\beta) = (G', \gamma(\alpha + \beta))$

G' n'ayant aucune autre occurrence dans le théorème, cette dernière proposition postule donc simplement l'existence d'un barycentre du point A muni du coefficient $\gamma\alpha$ et du point B muni du coefficient $\beta\gamma$.

Donc $(\alpha + \beta \neq 0 \text{ et } \gamma \neq 0) \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_3)$ est un théorème

donc $\gamma \neq 0 \Rightarrow [\alpha + \beta = 0 \text{ ou } (P_1 \Rightarrow P_3)]$ est un théorème

mais si $\alpha + \beta = 0$ alors $P_1 \Rightarrow P_3$ car P_1 est fausse.

Donc $\gamma \neq 0 \Rightarrow (P_1 \Rightarrow P_3)$ est un théorème.

Puisque $1/\gamma \neq 0$ donc $P_3 \Rightarrow P_1$ est un théorème.

Donc $\gamma \neq 0 \Rightarrow (P_1 \Leftrightarrow P_3)$ est un théorème qui découle de T_1 .

Définition d'une homothétie.

k étant un réel non nul et Ω un point de l'espace, on appelle homothétie de centre Ω et de rapport k , et l'on note $h_{\Omega, k}$, l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M fait correspondre le point M' défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

Il suffit de remplacer le mot «espace» par le mot «plan» pour obtenir la définition donnée en seconde.

Mais $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} + k \overrightarrow{MM'} \Leftrightarrow k M' M + (1-k) M' \Omega = \vec{0}$. Par conséquent, le point M' peut aussi bien être défini comme le barycentre du

point Ω muni du coefficient $(1 - k)$ et du point M muni du coefficient k , ce qui donne une seconde définition des homothéties équivalente à la première :

Dernière définition d'une homothétie :

k étant un réel non nul et Ω un point de l'espace, on appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application de l'espace dans lui-même qui, à tout point M fait correspondre le point M' barycentre de Ω muni du coefficient $1 - k$ et M muni du coefficient k .

ANNEXE 2

TD

Composition des homothéties (Niveau : fin de 2^e - début 1^{ère} S)

Soit deux homothéties $h_{A,h}$ et $h_{B,l}$

$$\begin{array}{ccccc} & h_{A,h} & & h_{B,l} & \\ & \xrightarrow{\quad} & M' & \xrightarrow{\quad} & M'' \\ M & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ & & f & & \end{array}$$

$$f(M) = M'' \quad ; \quad f(M) = h_{B,l}(h_{A,h}(M)) \quad ; \quad f = h_{B,l} \circ h_{A,h}$$

f s'appelle la composée de $h_{A,h}$ et $h_{B,l}$

- Définir de la même façon $g = h_{A,h} \circ h_{B,l}$
- Soit M et N deux points du plan. Construire $f(M)$ et $f(N)$ et ensuite $g(M)$ et $g(N)$ dans les cas suivants :
 - $A = B$ $k = 4$ $l = -1/2$ c) $A \neq B$ $k = 4$ $l = -1/2$
 - $A = B$ $k = 1/4$ $l = 2$ d) $A \neq B$ $k = 1/2$ $l = 2$
- Montrer que $h_{A,h}(M)$ est barycentre de $(A, 1 - k)$ et (M, k) . Sont-ce les seuls coefficients possibles?
- Montrer que si M' est barycentre de $(\Omega, 1 - k)$ et (M, k) , alors il existe une homothétie h de centre Ω et de rapport k telle que $h_{\Omega,k}$ telle que $h_{\Omega,k}(M) = M'$.

5) Traduire en termes de barycentres :

a) M' est l'image de M par $h_{A,4}$ b) M'' est l'image de M' par $h_{B,-1/2}$

6) Montrer qu'il existe un point C tel que M'' soit barycentre de C et M avec des coefficients à préciser. Peut-on en déduire la nature de $f = h_{B,-1/2} \circ h_{A,4}$?

7) Déterminer la nature de $g = h_{A,4} \circ h_{B,-1/2}$. Peut-on avoir $f = g$?

8) Montrer que $h_{B,2} \circ h_{A,1/2}$ est une translation. Et $h_{A,1/2} \circ h_{B,2}$? Peuvent-elles être égales ?

9) Cas général : Montrer que la composée de $h_{A,h}$ et $h_{B,j}$ est soit une homothétie, soit une translation.

10) Comparer $h_{B,j} \circ h_{A,h}$ et $h_{A,h} \circ h_{B,j}$.

un exemple de construction

ÉNONCÉ : Construire le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $1, -1$ et 2 .

SOLUTION : Il y a trois solutions possibles :

1) Par définition : $\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$ donc $\vec{BA} + 2\vec{GC} = \vec{0}$

$$\text{donc } \vec{CG} = 1/2 \vec{BA} \quad .$$

2) On peut aussi utiliser l'un ou l'autre des arbres suivants :

