Dans nos classes

Visions angulaires sur un terrain de football

Jean-Luc Gasser
Lycée Lavoisier - Mulhouse

Le but de cet article est de présenter une méthode géométrique de résolution d'un problème classique, dont un énoncé est: «Un joueur de football court sur une ligne parallèle à la ligne de touche d'un terrain. De quel(s) point(s) verra-t-il le but sous l'angle maximum?»

L'auteur propose une construction géométrique simple de l'unique point solution de ce problème, qui permet de tracer le parcours optimum d'un joueur et d'autres trajectoires s'y rapportant. Les méthodes de résolution mises en œuvre font appel au programme de Terminale C, et le problème pourra faire l'objet d'une activité à ce niveau.

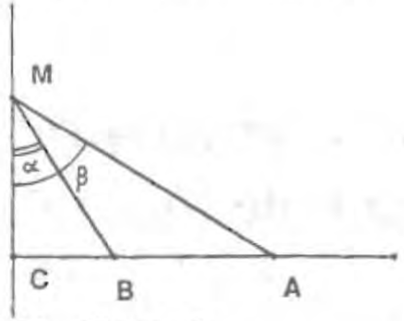
1-Le problème et une solution algébrique

Un joueur de football (point M) court sur la droite (D), et voit le but sous un angle $(\beta - \alpha)$ (figure 1). On cherche la position du point M sur (D) pour que cet angle soit maximum. J'appelle respectivement x, a, b les distances MC, BC et AC. Un calcul simple permet de trouver la distance x répondant à la question:

on a: $\tan \alpha = \frac{a}{x}$ et $\tan \beta = \frac{b}{x}$

d'où $\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha . \tan \beta} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}$

MC = x   BC = a   AC = b



(D) Figure 1

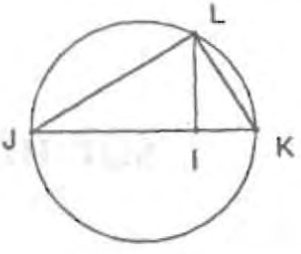


Figure 2

tan (β - α) est une fonction de x, qui est extrémale si sa dérivée par rapport à x est nulle.

Grâce à un calcul élémentaire, on trouve ;

$$x = \sqrt{ab} \text{ et } \tan(\beta - \alpha) = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

La valeur de l'angle correspondante est bien maximale, car la tangente est positive ($0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$) et elle tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Remarquons que x est égal à la moyenne géométrique de a et b.

Remarquons également que ce résultat n'est valable que si c est extérieur au segment $[AB]$. Mais si C est intérieur au segment $[AB]$, la position de M est alors évidente: M est confondu avec C et l'angle sous lequel est vu le but est 180°.

On peut alors construire M à la règle et au compas. La méthode classique est la suivante (figure 2): le triangle JLK est rectangle en L, et I est le pied de la hauteur issue de L. On a alors: $JI.IK = LI^2$ et par suite $LI = \sqrt{IJ.IK}$.

Cette construction n'est pas commode dans notre cas de figure, car elle nécessite de nombreuses manipulations.

2-Méthode géométrique de résolution

Il existe une autre méthode géométrique de construction qui utilise le cercle circonscrit au triangle *MAB*.

Reprenons le problème à zéro. Le raisonnement intuitif suivant permet d'affirmer sans calcul que l'angle β - α admet (au moins) un maximum : si *M* se rapproche de *C*, cet angle se rapproche de l'angle nul ; si *M* s'éloigne de *C*, en «allant vers l'infini», il tend également vers l'angle nul ; il admet donc au moins un maximum entre ces positions extrêmes.

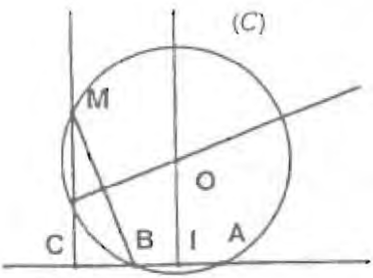


FIGURE 3

Soit *(C)* le cercle circonscrit au triangle *ABC* (figure 3). Son centre *O* est obtenu comme l'intersection de la médiatrice de *[AB]* et de celle de *[BM]*. Il est donc situé sur ***la droite fixe** (D)*, passant par le milieu *I* de *[AB]*. Plusieurs tracés expérimentaux sont donnés figure 4. Pour plus de clarté, je n'ai pas représenté chaque segment et sa médiatrice dans leur totalité, mais uniquement une portion de chacun d'eux qui permet de relier un point situé sur *(D)* au centre du cercle circonscrit. On observe alors une certaine symétrie autour du point particulier *X:* des points (M_1 , N_1), (M_2 , N_2), (M_3 , N_3) admettent respectivement les mêmes centres de cercle circonscrit O, O_2, O_3 à leurs triangles respectifs. Le point *O* est situé sur la perpendiculaire à *(D)* passant par *X* et le cercle circonscrit correspondant est alors tangent à *(D)*.

Cette observation permet de conjecturer puis de démontrer le résultat suivant:

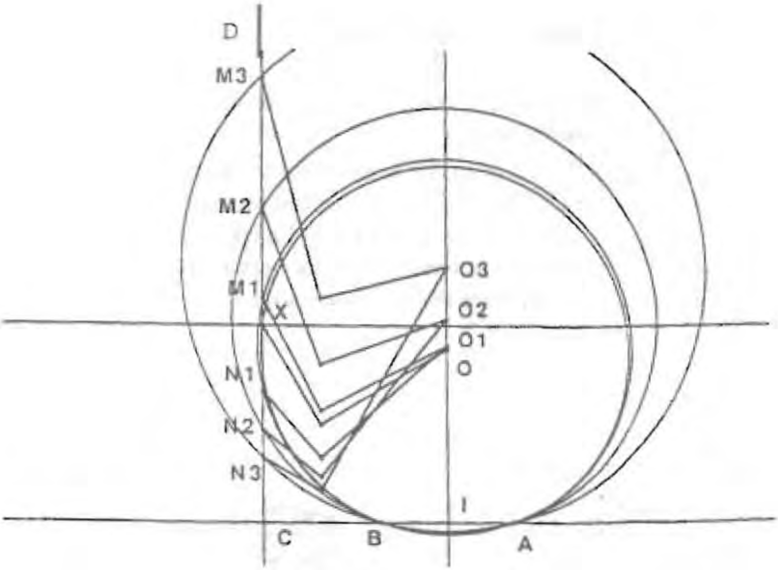


FIGURE 4 Observation de la position du cercle circonscrit

Théorème: Il existe un unique point M de (D) tel que l'angle $\widehat{AMB}$ soit maximum. Le cercle circonscrit au triangle MAB est alors tangent à (D) en M.

Preuve :

Analyse: d'après le théorème des angles inscrits, $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (comme le triangle ABM admet toujours l'angle $\widehat{AMB}$ aigu, c'est bien cette égalité qui est vérifiée). L'angle $\widehat{AMB}$ est maximum si et seulement si l'angle $\widehat{AOB}$ est maximum, donc si la distance OI, donc OA, est minimum. Or, la plus petite valeur que peut prendre le rayon du cercle circonscrit au triangle MAB est IC. On en déduit la position que doit nécessairement occuper le point M.

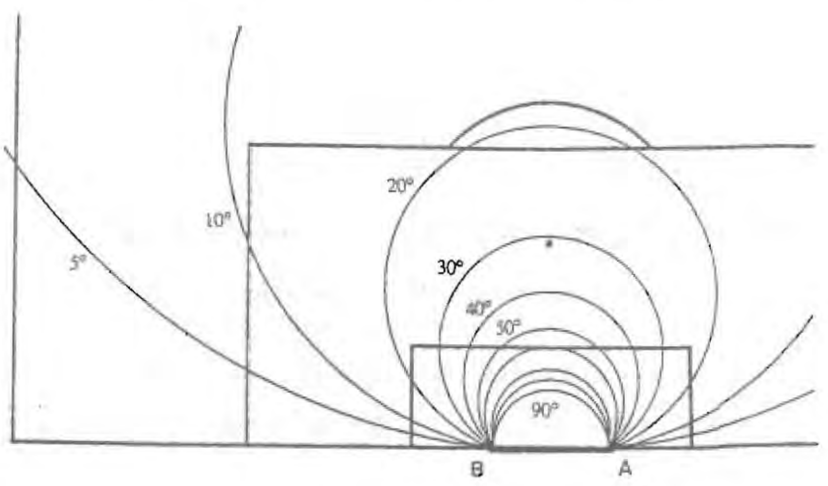
Synthèse: Soit alors le points O de (D) tel que $OA = OB = IC$, et soit M le projeté orthogonal de O sur (D). Par construction, $OA = OB = OM$, donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle MAB, et il est tangent à (D) en M. Le point M ainsi défini existe et est unique.

Nous disposons alors d'une construction à la règle et au compas du point M: le cercle de centre A de rayon IC coupe la médiatrice de $[AB]$ en O; la perpendiculaire à cette médiatrice coupe (D) en M, qui est le point recherché.
La solution à notre problème fournit également une autre construction géométrique de la moyenne géométrique de deux nombres d'après les résultats du paragraphe 1. Ce résultat se vérifie aisément au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OIA:

$$OI^2 = OA^2 - IA^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 = a\,b \quad \text{donc } OI = \sqrt{a\,b}\,.$$

3-Lignes de niveau équiangulaires

Le théorème de l'arc capable permet de déterminer le lieu géométrique des points sous lesquels «le segment $[AB]$ est vu sous un angle constant»: c'est un arc de cercle passant par les points A et B. Ce résultat est classique et je ne m'y attarderai pas. Sur la figure 5, j'ai représenté les lignes de niveau correspondant à des angles variant de 10° en 10° en décroissant à partir de 90° sur un terrain de football. Ce dernier est représenté à l'échelle, et les centres des cercles ont été placés après calcul de la tangente de l'angle $\widehat{AOI}$.



4-Parcours optimal et autres parcours

Le point C parcourant la droite (AB), le point X de (D) réalisant le maximum de l'angle $\widehat{AXM}$ décrit alors une courbe, qui est en quelque sorte le parcours optimal d'un joueur se dirigeant vers le but et désirant augmenter son angle de tir le plus possible (voir figure 6). Ce lieu géométrique a été obtenu point par point. Remarquons que cette courbe semble admettre une tangente perpendiculaire à (AB) en B. Ceci se vérifie aisément en observant son équation dans un repère d'origine B, d'axes (AB) et la perpendiculaire à (AB) en B.

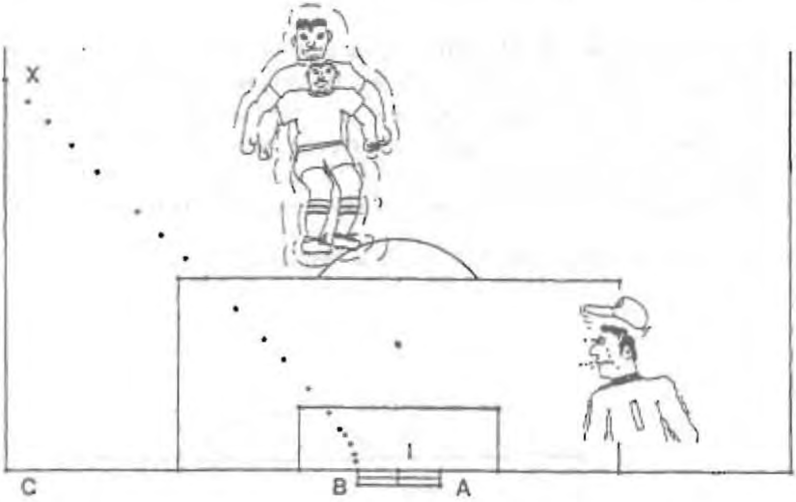


FIGURE 6 **le parcours optimal sur un terrain de football**

Afin de faire une observation plus fine, j'ai tracé les lieux géométriques en rapport avec le parcours optimal. Le point C étant fixé sur (AB), j'ai déterminé par le calcul les points M et N de (D) pour lesquels les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont égaux à 91%, 81%, etc... de l'angle de tir optimal. Les résultats sont donnés figure 7.

Il ne reste plus qu'à comparer ces résultats aux trajectoires effectivement suivies par les joueurs! Il est évident que leur intérêt n'est pas forcément de se diriger vers le poteau du but pour avoir à chaque seconde un angle de tir

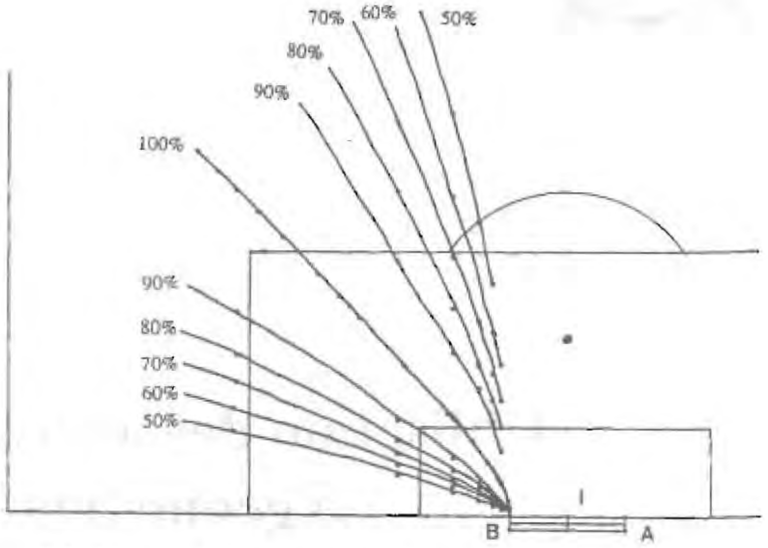


FIGURE 7 Le parcours optimal et d'autres parcours

optimum. Un écart de trajectoire qui permet de se retrouver en face du but sera certainement intéressant.

5-Conclusion

A partir d'un thème simple, plusieurs méthodes de résolution sont proposées, utilisant les nouveaux outils dont disposent les élèves de terminale C (arc capable, théorème de l'angle inscrit), ainsi que quelques notions de trigonométrie (tangente, formules d'addition) et d'analyse (dérivation). Une application pratique d'un lieu géométrique de points peut être mise en évidence.

Je voudrais également insister sur l'aide incomparable que m'a fourni le logiciel Cabri-Géométre™ (sur Macintosh™), sans lequel cet article n'aurait pas vu le jour. J'aurais en effet passé des dizaines d'heures (horribles!) à tracer toutes ces figures. L'utilisation intensive que j'en ai faite m'a amené à découvrir quelques limitations dans le cadre du problème traité: impossibilité d'imprimer un lieu géométrique et impossibilité de reporter une distance simplement sur la figure (par exemple tracer le cercle de centre A de rayon IC pour obtenir le point O, C étant donné). Mais ce logiciel est un outil formidable d'aide à la conjecture des propriétés qu'il serait difficile de déceler autrement: la géométrie sans la règle et le compas est aussi un plaisir.