Bulletin de l'APMEP n°386 - Décembre 1992

Etudes

Pavage de l'espace avec des polyèdres réguliers convexes

J. de Biasi
IREM de Toulouse

L'IREM de Toulouse a publié deux ouvrages de R. de BIASI consacrés aux pavages réguliers ou semi-réguliers du plan. Dans cet article, nous réunissons quelques résultats concernant un problème analogue dans l'espace. Précisons qu'il n'y a ici, de notre part, rien d'original : les cinq polyèdres réguliers convexes sont connus depuis l'antiquité et l'idée de paver l'espace avec de tels solides a fait l'objet d'un problème au concours commun "Mines et Ponts" de 1982.

I. Les cinq polyèdres convexes.

Un polyèdre convexe est dit régulier s'il est inscriptible dans une sphère et si ses faces sont des polygones réguliers convexes isométriques.

Pour un tel polyèdre, on note S, A, F, p, q respectivement le nombre de sommets, d'arêtes, de faces, d'arêtes limitant une face, d'arêtes aboutissant à un même sommet. Ainsi, pour le cube : $S = 8$, $A = 12$, $F = 6$, $p = 4$ et $q = 3$.

Entre les nombres S, A, F existe la relation d'EULER-POINCARÉ

$$S - A + F = 2 \quad (R).$$

Voici une démonstration de cette relation due à EULER et ... reprise par bien d'autres.

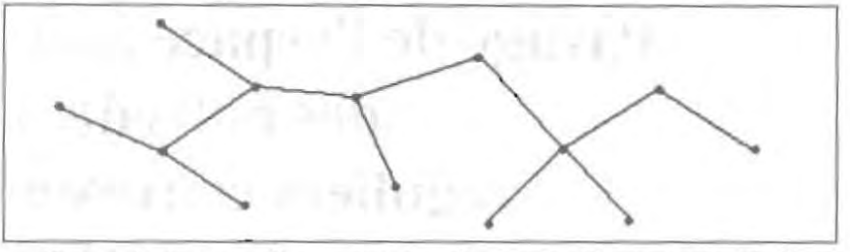
Considérons un graphe plan connexe ayant S sommets, A arêtes, F faces (régions limitées par les arêtes) et montrons que (R) est vraie pour ce graphe.

Raisonnons par récurrence sur A.

(R) est vraie si $S = 1$, $A = 0$ puisque dans ce cas $F = 1$.

Supposons que (R) soit vraie quel que soit S pour tout graphe de n arêtes. Pour un graphe G ayant $A = n + 1$ arêtes, deux cas se présentent :

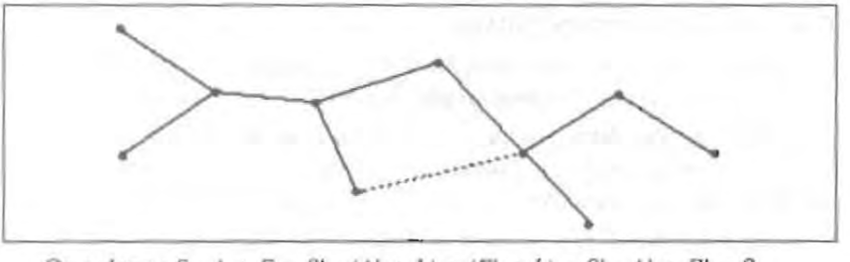
1°) *G n'a pas de cycles* ; G n'a donc pas qu'une seule face. Montrons qu'il existe un sommet qui est l'extrémité d'une seule arête.



Pour cela, partons d'un sommet quelconque : s'il est extrémité d'une seule arête, c'est terminé ; sinon, il est extrémité d'au moins deux arêtes et, en se déplaçant sur l'une d'elles, puis éventuellement sur une autre consécutive à celle-ci etc..., on aboutit nécessairement à une extrémité E puisque G n'a pas de cycles.

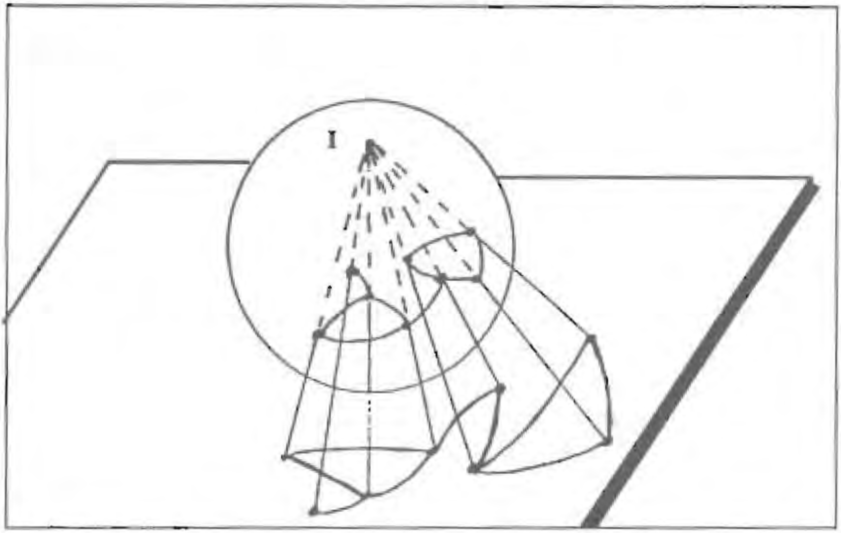
Soit alors le graphe G' obtenu en enlevant à G, E et l'arête dont il est l'extrémité. On a $S' = S - 1$, $F' = F$, $A' = A - 1 = n$, d'où : $S - A + F = (S' + 1) - (A' + 1) + F' = S' - A' + F' + 2$.

2°) *G possède un cycle.* Supprimons une arête de ce cycle. On obtient un graphe connexe G' ayant $S' = S$ sommets $A' = A - 1 = n$ arêtes et $F' = F - 1$ faces.



On a donc : $S - A + F = S' - (A' + 1) + (F' + 1) = S' - A' + F' = 2$.

Ainsi, la relation d'EULER-POINCARÉ est vraie pour tous les graphes plans connexes et par suite, par projection stéréographique pour tout graphe sphérique connexe et donc, pour tout polyèdre convexe.

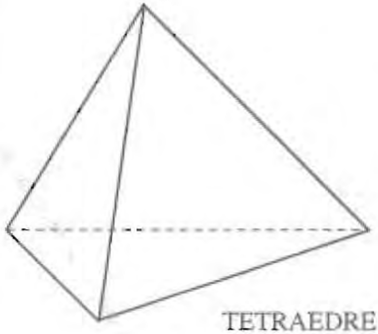


Contrairement au cas du plan où pour tout $p \geq 3$ il existe un polygone régulier convexe de p côtés, dans l'espace, il n'existe que 5 polyèdres réguliers convexes. Intuitivement ce résultat peut se justifier ainsi. Imaginons un parapluie, ayant q baleines équiréparties autour de sa pointe, passant de la position fermée à la position ouverte maximum (ou limite), les baleines, supposées rectilignes, étant alors dans un même plan. Dans la position initiale, les angles formés par les baleines consécutives ont une somme nulle et dans la position finale, cette somme vaut 360°. Dans un polyèdre régulier, il en résulte que la somme des angles formés par les arêtes consécutives aboutissant en un même sommet est elle-même strictement comprise entre 0° et 360°. Or, en un même sommet aboutissent au moins 3 arêtes ($q \geq 3$) et les angles correspondants sont donc inférieurs strictement à 120°. Comme les angles d'un polygone régulier convexe de p côtés mesurent $(p - 2)/p)$ 180°, c'est à dire successivement 60° pour le triangle équilatéral, 90° pour le carré, 108° pour le pentagone régulier, 120° pour l'hexagone régulier... (cette suite étant strictement croissante avec p), les seules possibilités pour un polyèdre régulier sont donc :

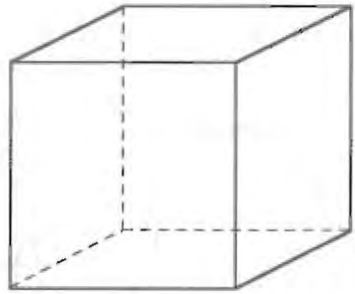
$p = 3$ faces : triangle équilatéral $\quad q \in \{3, 4, 5\}$
$p = 4$ faces : carré $\quad q = 3$
$p = 5$ faces : pentagone régulier $\quad q = 3$.

Il y a donc au plus 5 polyèdres réguliers convexes.

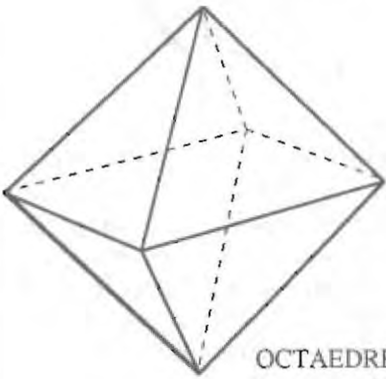
Redémontrons leur existence et leurs caractéristiques.



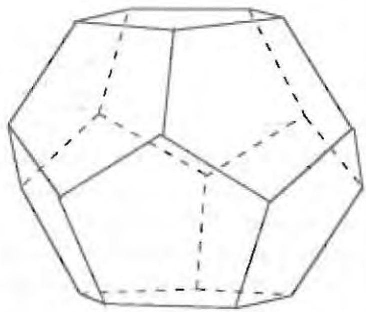
TETRAEDRE



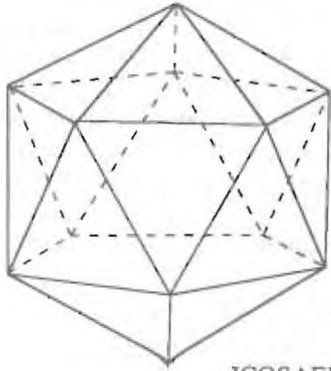
CUBE



OCTAEDRE



DODECAEDRE



ICOSAEDRE

Comme chaque face est limitée par p arêtes et que chaque arête appartient à deux faces, on a $2A = pF$. De manière analogue, puisque chaque arête est limitée par deux sommets, , on a $2A = qS$.

De ces égalités on déduit, grâce à la relation d'EULER-POINCARÉ :

$$S = \frac{4p}{2p + 2q - pq} \qquad A = \frac{2pq}{2p + 2q - pq} \qquad F = \frac{4q}{2p + 2q - pq}$$

Tous ces nombres doivent être positifs et en particulier on doit donc avoir $2p + 2q - pq > 0$ soit $(p - 2)(q - 2) < 4$. Les seuls couples $(p\ ,\ q)$ d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 3 et vérifiant cette inégalité sont : $(3\ ,\ 3)$, $(4\ ,\ 3)$, $(3\ ,\ 4)$, $(5\ ,\ 4)$, $(3\ ,\ 5)$.

Ces valeurs conduisent aux cinq polyèdres réguliers convexes classiques, connus et abondamment étudiés depuis l'Antiquité.

p	q	S	A	F	
3	3	4	6	4	Tétraèdre
4	3	8	12	6	Cube
3	4	6	12	8	Octaèdre
5	3	20	30	12	Dodécaèdre
3	5	12	30	20	Icosaèdre

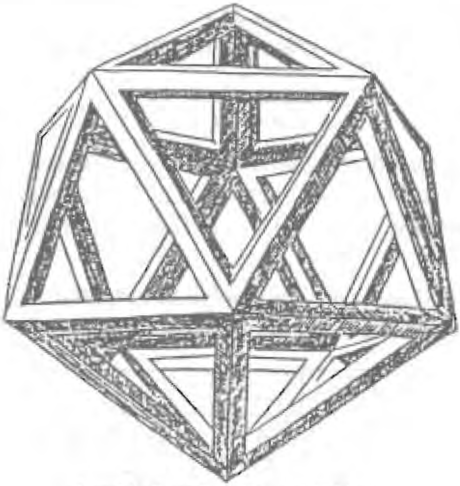
II.Pavage de l'espace avec des polyèdres réguliers.

On sait que le pavage du plan, avec un même type de polygones réguliers, est possible de plusieurs manières : avec des triangles équilatéraux, des carrés, des hexagones...

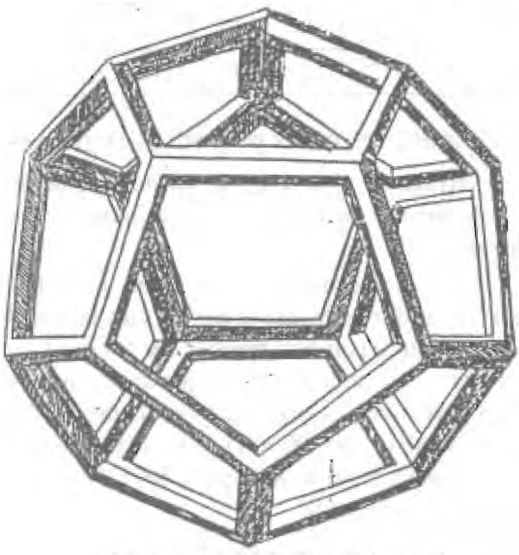
Pour l'espace, il est bien connu qu'en empilant des cubes isométriques, on peut le remplir (nous dirons encore le paver) sans laisser de vides. Mais, est-ce possible avec un autre polyèdre régulier que le cube ? Pour cela, il faudrait qu'autour d'une même arête, on puisse juxtaposer un nombre entier de ces polyèdres dont la somme des angles dièdres α correspondants soit égale à 360° (ainsi avec les cubes : $4 \times 90 = 360$). Il faudrait donc qu'il existe un entier naturel dont le produit par α soit égal à 360°. Nous allons voir qu'en fait, ceci n'est vrai que pour le cube.

Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

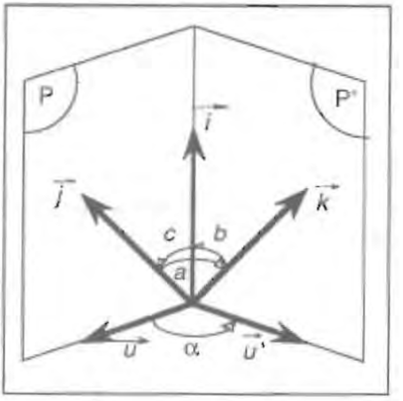
Soient deux demi-plans P et P' sécants suivant une droite D puis 3 vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, unitaires, avec $\vec{i}$ porté par D, $\vec{j}$ appartenant à P (resp. $\vec{k}$ à



Icosaèdre dessiné, par Léonard de Vinci,
pour le *De Divina Proportione* de Fra Luca Pacioli.



Dodécaèdre dessiné, par Léonard de Vinci,
pour le *De Divina Proportione* de Fra Luca Pacioli.



P') et enfin, 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, unitaires, $\vec{u}$ appartenant à P (resp. $\vec{u}'$ à P'), tous deux étant perpendiculaires à D.

Les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ définissent un trièdre. Notons a, b, c, α respectivement les angles $(\vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{k}, \vec{i})$, $(\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{u}, \vec{u}')$, et α le rectiligne du dièdre formé par les demi-plans P et P'.

D'une part, on a : $\vec{j}.\vec{k} = \cos a$;

D'autre part, on a : $\vec{j} = \vec{i}\cos c + \vec{u}\sin c$ et $\vec{k} = \vec{i}\cos b + \vec{u}'\sin b$ d'où $\vec{j}.\vec{k} = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos(\vec{u}, \vec{u}') = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha$.

Il en résulte la ***Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :***

$$\boxed{\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha}$$

Calcul de l'angle dièdre α d'un polyèdre régulier.

Nous noterons respectivement α_t, α_o, α_d , α_i cet angle pour le tétraèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre réguliers.

Tétraèdre régulier : Les arêtes issues d'un même sommet forment un trièdre pour lequel $a = b = c = 60°$.

Il en résulte : $\cos\alpha_t = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$ d'où $\alpha_t = 1{,}231$ rad $\approx 70{,}529°$.

Or, $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{(\sqrt{5} - 1)}{4} < \dfrac{1}{3}$ et $\cos\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$

D'où $\dfrac{2\pi}{6} < \alpha_t < \dfrac{2\pi}{5}$ et il n'existe donc pas $k \in \mathbf{N}$ tel que $k\alpha_t = 2\pi$.

Octaèdre régulier : Dans ce cas, $a = 90°$, $b = c = 60°$. Il en découle

$\cos \alpha_o = -\frac{1}{3}$ puis $\alpha_o \approx 1,910 \text{rad} \approx 109,41°$.

D'où $\frac{2\pi}{4} < \alpha_o < \frac{2\pi}{3}$ et il n'existe donc pas $k \in \mathbf{N}$ tel que $k\alpha_o = 2\pi$.

Dodécaèdre régulier : Ici $a = b = c = 3\pi/5$ (angle d'un pentagone régulier).

Or, $\cos \frac{3\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Il en résulte $\cos \alpha_d = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ puis $\alpha_d \approx 2,034$ rad $\approx 116,565°$.

Doù $\frac{2\pi}{4} < \alpha_d < \frac{2\pi}{3}$ et il n'existe donc pas $k \in \mathbf{N}$ tel que $k\alpha_d = 2\pi$.

Icosaèdre régulier : Ici $a = 3\pi/5$ et $b = c = \pi/3$ d'où l'on déduit : $\cos \alpha_i = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ puis $\alpha_i = 2,412$ rad $= 138,190°$ d'où $\frac{2\pi}{3} < \alpha_i < \frac{2\pi}{2}$ et il n'existe donc pas $k \in \mathbf{N}$ tel que $k\alpha_i = 2\pi$.

En conclusion, en n'utilisant qu'un même type de polyèdre régulier, on ne peut paver l'espace qu'avec des cubes.