Courrier des lecteurs

R.RAYNAUD a certainement étudié de près l'ouvrage de G.GLAESER «Analyse et Synthèse», une de nos récentes publications et nous fait part ici de quelques notes de lecture. «Bravo» dit l'auteur G.GLAESER, «je suis heureux d'avoir atteint mon objectif, à savoir soulever des questions et inciter les lecteurs à trouver leurs propres réponses. Il n'y a pas de manière unique d'arriver au but, et tout ce que dit R.RAYNAUD est une réponse plausible».

Analyse et synthèse

R.Raynaud
Digne

Dans la publication «Analyse et Synthèse» de l'A.P.M.E.P., G.GLAESER examine et commente les multiples sens que les mathématiciens ont donné à ces deux termes au cours des siècles.

Après l'avoir remercié de sa très interessante étude, j'exprime le regret qu'à l'occasion des problèmes de construction, de lieu géométrique et d'équation, il n'ait pas mentionné clairement une acception de ces deux mots très courante à partir des années 50.

Du *Bulletin* de septembre 60, j'extrais ce passage de la note préliminaire au programme de seconde :

> «L'étude systématique de problèmes spéculatifs, c'est-à-dire de problèmes proposant la recherche d'éléments dont l'existence doit être mise en cause (tels les problèmes de "lieu géométrique", les problèmes de "construction", les problèmes de "résolution" d'équations et d'inéquations...), permettra dde dégager un certain nombre d'idées générales concernant la conduite logique d'un raisonne-

ment : ANALYSE, SYNTHESE, emploi de conditions à la fois nécessaires et suffisantes, transformation d'un problème en un problème équivalent».

Dans ses exemples de "problèmes spéculatifs", G.Glaeser, au lieu ede présenter une ANALYSE et SYNTHESE au sens de la note, préfère exposer la démarche du "novice" habitué (à qui la faute ?) à cheminer dans le brouillard des "EQUIVALENCES IMPARFAITES", des transformations non régulières et des "REDUCTIONS" approximatives :

Exemple 23 *:* Etant donné un nombre positif a, résoudre dans **R** l'équation (E) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

Je cite l'auteur : *«Il est parfaitement raisonnable de substituer à (E) des équations (E') obtenues par des élévations au carré.*

L'opération se poursuit "droit devant soi". Le critère de progrès est la diminution du nombre des radicaux.

On aboutit à (E') $(a - x^2)^2 - (a + x) = 0$, *conscient de ce que toute solution de (E) satisfait à (E') sans que la réciproque soit assurée.»*

Après avoir expliqué comment factoriser le premier membre de (E'), l'auteur continue : « *(E') s'écrit alors :*

(E") $(x^2 + x + 1 - a)(x^2 - x - a) = 0$...» etc.

«Le bénéfice recueilli par cette réduction est ***qu'au lieu d'avoir à chercher les solutions de (E) dans R, il suffit maintenant de les chercher dans un ensemble fini ayant au plus 4 éléments.*** *Ce n'est plus qu'une* ***vérification*** *de routine.»*

Le passage que j'ai mis en relief, qui marque le progrès accompli est, **au sens de la "note'** rappelée,

1°) *la conclusion d'une **analyse**,*

2°) *l'amorce d'une **synthèse**,*

l'une et l'autre non déclarées.

Et encore cette synthèse est-elle suggérée par un mot qui ne convient pas : que vérifie-t-on ? Ce que l'on a imprudemment affirmé. Or, a-t-on dit que les solutions de E" étaient solutions de E ? Non. Il ne s'agit pas d'une **vérification**, mais d'une **mise à l'épreuve**.

J'ai un mauvais souvenir de mes débuts, quand à coups de «on a», «il vient», «on peut écrire», on passait de l'équation E à l'équation E". Après quoi, on «**vérifiait**» ... E avait des racines qui «**convenaient**», d'autres non.

Je ne fais pas à G.Glaeser le mauvais procès d'encourager une telle pratique. Mais le «**droit devant soi**» mécanique et la «**vérification de routine**» qu'il semble admettre risquent d'y conduire.

J'aurais donc préféré, ***bien dans le cadre de l'ouvrage***, une résolution de E par **analyse** et **synthèse** proclamées :

Soit S l'ensemble des solutions de E.

I) ANALYSE

Supposons S non vide et étudions un élément xo quelconque de S. x_0 est une solution de E.

Donc $\sqrt{a - \sqrt{a + x_0}} = x_0$ (1) (égalité).

De cette information relative à x_0, complète mais secrète, nous allons essayer de tirer des renseignements plus parlants ... mais aussi peut-être moins spécifiques :
Lorsque deux nombres sont égaux, leurs carrés sont égaux.

Donc $a - \sqrt{a + x_0} = x_0^2$ (2) (égalité).

Et $a - x_0^2 = \sqrt{a + x_0}$ (3) (égalité).

Donc $\left(a - x_0^2\right)^2 = a + x_0$ (4) (égalité).

Etc.

Donc $\left(x_0^2 + x_0 + 1 - a\right)\left(x_0^2 - x_0 - a\right) = 0$ (5) (égalité).

Et comme je dispose, «novice» averti, d'une recette -déjà utilisée entre (4) et (5)- pour résoudre les équations du second degré, j'enchaîne :

Cette **égalité** montre que x_0 est une racine des deux **équations** :

$$e_1 : x^2 + x + 1 - a = 0 \quad e_2 : x^2 - x - a = 0.$$

Désignons par S' l'ensemble des racines de e1 et e2 et concluons :

S est inclus dans S'.

Le problème n'est pas résolu, mais comme le dit G.Glaeser, le progrès est considérable, car la construction de S va se tenter maintenant, non plus à partir de l'immense **R**, mais à partir du petit ensemble S', qui a, au plus, 4 éléments.

Parenthèse :

1°) **L'analyse** a procédé par **égalités** affirmées, terrain **solide** pour le débutant, et qui permet une rédaction plus **facile** et plus **sûre** que celui des équations. Le passage des **égalités** aux **équations** a été clairement indiqué.

2°) Le mot de liaison entre une égalité et la suivante a été la conjonction «**donc**» qui marque la conséquence : de telle égalité et de tel théorème, au besoin rappelé, je **déduis** telle autre égalité. C'est «**donc**» qu'il faut utiliser et non «$\Rightarrow$» :

P étant une proposition **vraie** et Q une autre proposition, l'affirmation (P$\Rightarrow$Q) n'est qu'une manière pédante d'énoncer Q comme vraie sans invoquer le moindre lien causal entre P et Q.

Fin de la parenthèse.

Nous voilà donc au point de tenter la synthèse de S à partir de S'.

Mais, avant, ne pourrait-on affiner l'analyse ?

A l'occasion des égalités (1) puis (3), on note que $x_0 \geq 0$ et $a - x_0^2 \geq 0$

c'est-à-dire que $0 \leq x_0 \leq \sqrt{a}$.

Peut-être allégerons-nous alors la synthèse en précisant que

S est inclus dans l'intersection S" de S' et $[0\ ,\ \sqrt{a}\ ]$.

Etudions S" :

✱ L'équation e_2 a 2 racines de signes contraires.

- Celle qui est négative n'appartient pas à S".
- L'autre $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$, supérieure à $\sqrt{a}$, non plus.

✱ L'équation e_1 a 2 racines à condition que $a \geq \frac{3}{4}$.

- Si $a < 1$ elles sont toutes les deux négatives.
- Si $a \geq 1$ une seule est positive : $-\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$, et elle est inférieure à $\sqrt{a}$.

** Bref,

1°) **Si** $a < 1$ S" est vide. Notre hypothèse «S est non vide» nous accule à une contradiction. Elle est fausse. Donc S est vide. Et l'analyse nous a suffi pour conclure.

2°) **Si** $a \geq 1$ $S" = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \right\}$.

La synthèse va être tentée à partir d'un singleton.

II)SYNTHESE dans le cas où $a \geq 1$.

Posons maintenant $x_0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$, (définition qui n'est plus celle de l'analyse) et examinons si x_0 veut bien être solution de E. «Essayons» x_0, mettons-le à l'épreuve :

x_0, racine de e_1 , satisfait aux égalités (5) et (4).

$x_0^2 \leq a$ donc x_0 satisfait aux égalités (3) et (2).

$x_0 \geq 0$ donc x_0 satisfait à l'égalité (1).

Donc x_0 est élément de S.

III) CONCLUSION.

1° Si $a < 1$, alors $S = \varnothing$

2° Si $a \geq 1$, alors $S = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \right\}$.

Remarque 1.

Que l'on discute le bien fondé des noms d'analyse et de synthèse donnés aux deux démarches, c'est possible. Mais la méthode elle-même, qui est naturelle, qui sécurise le débutant et lui permet une rédaction simple, gardera son intérêt.

Remarque 2.

Comme le dit G.Glaeser, la résolution de E par enchaînements d'équivalences est autrement «fatigante» et tendue. Il la suggère sans commentaire :

$$(\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x) \Leftrightarrow (a-\sqrt{a+x} = x^2 \text{ et } x \geq 0) \Leftrightarrow \left((a-x^2)^2 = a+x \text{ et } x \geq 0 \text{ et } a \geq x^2\right)$$

Elle est bien difficile à concevoir et à rédiger pour nos «débutants».

1° Parce que les énoncés entre parenthèses n'étant des **propositions** que pour certaines valeurs de x, il leur faudra au moins donner un nom, par exemple D_a, à l'ensemble de ces valeurs, avant de pouvoir lancer les équivalences : $\forall x \in D_a$ ($\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$) $\Leftrightarrow$ ... etc.

Et qu'ils devront, en bout de chaîne, savoir expliquer pourquoi les solutions du système rationnel obtenu appartiennent à D_a.

2° Parce que les occasions de couper la chaîne ne manquent pas :

Soit pour effectuer un calcul annexe,

Soit pour rappeler le théorème clef :

«X étant un réel positif et Y un réel : $(\sqrt{X} = Y) \Leftrightarrow (X = Y^2 \text{ et } Y \geq 0)$»

Et l'expérience montre que *chaîne coupée est rarement bien renouée.*

Cependant, il serait souhaitable que nos élèves de seconde soient capables fde maîtriser ce type de raisonnement ; bien entendu, à l'occasion d'exemples *convenablement choisis.*

Celui de G.Glaeser me trouble :

Factoriser le premier membre de E' exige un tel métier, que celui qui en est capable a dépassé ou, je l'espère, n'a jamais rencontré, le stade supposé où l'on pousserait la mécanique «droit devant soi» à coup de réductions approximatives et «d'équivalences imparfaites». On peut résoudre le problème en toute sécurité par analyse et synthèse ou, mieux, par propositions «parfaitement» équivalentes, sans *«prendre consciemment le risque de perdre des solutions en route ou d'en introduire d'étrangères»* comme semble l'accepter l'auteur.

Me trouble également l'exemple 24 où un problème P est dit *«réduit»* à un problème P' qui n'a pas la même solution que P. Est-ce là un autre exemple de *«l'erreur volontaire qui sera corrigée plus loin»* comme dans l'exercice 25, ou bien est-ce le sens strict que j'attribue au mot **réduction** (comme au mot **équivalence**) s'accommederait aujourd'hui de traces *«d'imperfection»* ?

Ces quelques réserves, toutes personnelles, n'enlèvent évidemment rien à la qualité du travail de G.Glaeser.

Et j'en recommande la lecture à ceux qui ne le connaîtraient pas encore.