Courrier des lecteurs

Prononcez le mot «racine carrée», mais ne l'écrivez surtout pas : à partir du moment où vous y mettrez un«s», vous aurez déjà des ennuis ! A en juger par l'abondant courrier reçu sur la question, la notion n'est pas anodine chez les collègues et, quoiqu'on en dise, elle ne passe jamais inaperçue.

Certains, comme Léonard GALLARDO (Faculté des Sciences de Bretagne Occidentale), prennent position calmement mais fermement. Sa proposition lui vaut d'ailleurs une réponse de la part de la Commission «Mots». D'autres, comme Marc LECERRE (Académie de Nancy-Metz), s'étonnent de trouver dans la rubrique «Courrier» du *Bulletin* des avis personnels de lecteurs... Vous pourrez lire ci-dessous leurs diverses réactions, et, promis, après, on restera un moment sans parler de racines carrées, mais il fallait que tout cela soit dit.

Vous avez dit racine carrée ou racine*s* carrée*s* ?

Léonard Gallardo
Université de Bretagne Occidentale

Je partage l'indignation de notre collègue F.MARTIN (*Bulletin* n°380) concernant le sujet de Brevet des Collèges de l'Académie de Nantes qui posait des questions sur la racine carrée ne pouvant que désorienter les candidats au lieu de tester réellement leurs aptitudes mathématiques. Là s'arrête mon identité de vue avec F.Martin.

Je pense en effet qu'il n'est ni utile ni souhaitable en mathématiques de nommer tous les objets rencontrés sauf lorsqu'ils ont un caractère suffisamment universel (c'est-à-dire si on les retrouve dans de nombreuses autres questions).

Par exemple, il n'est pas utile de donner un nom spécial aux solutions de l'équation $x^2 + 2x - 5 = 0$. Par contre le plus petit nombre réel positif x tel que $\cos x = -1$ est assez important pour qu'on puisse le nommer π. D'ailleurs ce nombre est aussi la longueur du cercle de diamètre unité, etc...

Dans le même ordre d'idées, les solutions de l'équation $x^2 = a$ ($a > 0$) prises globalement n'ont pas d'intérêt. Mais si on nomme racine carrée de a (notée $\sqrt{a}$) celle qui est positive, l'autre est alors $-\sqrt{a}$. Cette définition classique de la racine carrée possède un caractère opératoire. En effet, la correspondance $a \to \sqrt{a}$ est une fonction (définie sur $\mathbb{R}_+$) qui peut être utilisée dans des calculs ultérieurs (par exemple pour résoudre $x^2 + 2x - 5 = 0$, ou des questions plus compliquées).

Nommer racines carrées les deux solutions de $x^2 = a$, revient à donner une importance à l'application «multivoque» $a \to \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ qui n'a aucune utilité mathématique. Dans l'intérêt des élèves, il me semble préférable de ne pas faire ce choix. Signalons à ce propos l'avis très polémique (mais qui a l'avantage de la clarté) d'un orfèvre en la matière. Voici en effet un extrait de ce qu'écrit Jean DIEUDONNÉ à la page 254-255 de son livre *«Calcul infinitésimal»* (Hermann 1968) concernant la racine carrée (d'un nombre complexe) :

«(8.6) Cette situation peut paraître choquante ; mais ce n'est pas y remédier que de dire, comme le font malheureusement beaucoup de manuels sur cette question, que l'on peut définir une prétendue «fonction multiforme» inverse de la fonction $z \to z^2$ en admettant que cette prétendue «fonction» a *deux* valeurs en chaque point $\neq 0$. Une telle «définition» n'est en fait que du *verbiage*, car les auteurs de ces manuels se gardent de donner la moindre règle de calcul sur les nouveaux objets mathématiques qu'ils prétendent définir, ce qui bien entendu rend la prétendue «définition» inutilisable ; il est facile de voir à quoi tient cette carence, car en admettant deux valeurs pour la prétendue «fonction» $\sqrt{z}$ entre lesquelles on ne fait pas de distinction, on est forcé d'admettre 4 valeurs pour $\sqrt{z} + 2\sqrt{z}$,8 valeurs possibles pour $\sqrt{z} + 2\sqrt{z} + 4\sqrt{z}$ et ainsi de suite, ce qui rend tout calcul impossible.»

En conclusion et contrairement à Antoine BODIN, je pense qu'il convient de trancher en faveur de la racine carrée. Laissons donc de côté les états d'âme ou d'opinion ; nous risquerions le reproche d'une nouvelle discussion sur le sexe des anges. Concentrons nos efforts sur d'autres questions ; il n'en manque pas ! Pour cela, souhaitons qu'à l'avenir, les programmes officiels soient rédigés avec beaucoup plus de rigueur afin que des élèves ne puissent être pénalisés par les choix différents que pourraient faire leurs professeurs face à des points laissés dans le flou.

RÉPONSE DE LA COMMISSION «MOTS»

Appeler «racines carrées de a » les deux solutions de $x^2 = a$ laisse intact l'intérêt de la fonction $a \longrightarrow \sqrt{a}$ (qu'on peut lire «radical de a») et ne suscite en rien l'introduction d'une «fonction multivoque (ou multiforme) ! Va-t-on s'interdire, sous ce prétexte, de parler *des* diviseurs d'un naturel, ou *des n* racines nièmes (complexes) d'un nombre complexe ?

Quant à la critique, fondée, de Dieudonnée, elle vise une «prétendue fonction» et plus encore le fait de désigner deux nombres différents par la même notation $\sqrt{z}$, elle ne concerne en rien notre débat sur *la* ou *les* racine(s) carrée(s).

Nous maintenons que l'existence de deux solutions pour $x^2 = a$ (et pour $x^2 + 2x - 5 = 0$ qui s'y ramène) est un fait important (même en géométrie, il est bon d'expliciter le référentiel : par exemple, si le théorème de Pythagore amène à l'équation $x^2 = 16$, il est bon de rappeler qu'ici x est positif, donc que $x = 4$) qui est mieux présent à l'esprit des élèves si on parle *des* racine*s* carrées de a.