Les Problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère: esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de «beaux problèmes»... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.):

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 207 (Marie-Laure CHAILLOUT, Sarcelles)

Combien y a-t-il de façons de payer une somme de 199,20F en pièces de 10 centimes, 20 centimes, 50 centimes, 1F, 2F, 5F ou 10F?

ÉNONCÉ N°208 (Eugène ERHARDT, Strasbourg)

Construire un point dont la somme des distances aux sommets d'un tétraèdre isocèle soit minimum (un tétraèdre «isocèle» est un losange gauche avec ses deux diagonales).

ÉNONCÉ N°209 (François LO JACOMO, Paris)

Montrer que pour tout entier $q \geq 1$ et pour tout réel y, il existe une infinité de réels x tels que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n^q+1}\right) = y$. Quelle est la plus petite solution $x > 0$ lorsque $q = 2$ et $y = 3$?

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 193 (Vincent THILL, Migenne)

a, b, c étant dans **N***, résoudre l'équation :

$$(4ab^2 - ac^2)^2 + (4b^3 - 3bc^2)^2 = c^6.$$

SOLUTION de Daniel PONASSE (Villeurbanne)

On transforme l'équation proposée : $(4ab^2 - ac^2)^2 + (4b^3 - 3bc^2)^2 = c^6$. (1)

en remarquant : $4ab^2 - ac^2 = a(4b^2 - c^2)$

$4b^3 - 3bc^2 = b(4b^2 - c^2) - 2bc^2$.

En posant, pour simplifier, $u = 4b^2 - c^2$, l'équation (1) devient :

$$a^2u^2 + b^2u^2 - 4b^2c^2u + 4b^2c^4 - c^6 = 0$$

$$a^2u^2 + b^2u^2 - 4b^2c^2u + 4c^4u = 0$$

et finalement : $\left(a^2 + b^2 - c^2\right)u^2 = 0$.

Il y a donc deux types de solutions :

1) $u = 0$, c'est-à-dire $c = 2b$ (a étant arbitraire).

2) $a^2 + b^2 = c^2$, dont on connaît bien toutes les solutions :

$$\left|\begin{array}{ll} a \text{ (ou } b) & = 2kpq \\ b \text{ (ou } a) & = k(p^2 - q^2) \\ \qquad c & = k(p^2 + q^2) \end{array}\right.$$

où p, q sont deux entiers ($p > q$) premiers entre eux et de parités différentes et k un coefficient de proportionnalité quelconque.

Autres solutions :

Guy BOUCHER (Paris), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), Jean COSTESEQUE (Toulouse), Jean-Joël DELORME (Lyon), Edgard DELPLANCHE (Créteil), André FLAMBARD (Versailles), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (Strasbourg), Marie-Nicole GRAS (Brésilley), Denis HARTEMANN (Cayenne), Mohammed IGUIDER (Sale, Maroc), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noé), Maurice PERROT (Paris), Roger QUENTON (Draguignan), Jean-Paul ROUX (Unieux), Pierre SAMUEL (Bourg la Reine), et deux solutions fausses.

Remarque (d'après Vincent THILL, Jean-Pierre FRIEDELMEYER et Edgard DELPLANCHE).

Il est clair que si $b \geq c$, $4b^3 - 3bc^2 \geq b^3 \geq c^3$: impossible ($a \neq 0$).

On peut donc poser $b = c \cos\theta \quad (0 < \theta < \pi/2)$ et l'équation devient :

$$\cos^2 3\theta + \left(\frac{a}{c \sin\theta}\right) \sin^2 3\theta = :$$

Si $\sin 3\theta \neq 0$, on doit avoir $a = c \sin\theta$, (d'où $a^2 + b^2 = c^2$.) ; Mais si $\sin 3\theta = 0$ (c'est-à-dire $b = c/2$), a peut être quelconque.

ÉNONCÉ N°194 (FERMAT, 1643)

Existe-t-il cinq triangles rectangles différents, à côtés de longueurs entières, ayant tous la même aire?

SOLUTIONS

Cet énoncé a suscité de nombreuses réponses intéressantes dont je m'efforcerai de faire la synthèse.

Pour trois triangles rectangles, Serge BOMPY (Villeparisis) rappelle que le problème a été posé par DIOPHANTE qui propose comme solution les triangles de côtés (40, 42, 58), (24, 70, 74) et (15, 112, 113), tous trois triangles rectangles d'aire 840.

Tout triangle rectangle d'hypoténuse c et de côtés a et b (a, b, c entiers) peut se paramétrer (éventuellement de plusieurs manières) sous forme: $a = \lambda\,|u^2 - v^2|$, $b = \lambda\,|2uv|$ et $c = \lambda\,(u^2 + v^2)$, avec $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$ et $2\lambda \in \mathbb{N}^*$ (aire du triangle $= \lambda^2\,|uv\,(u - v)\,(u + v)|$).

Charles NOTARI (Noé) signale que pour $\lambda = 1$, les trois couples $(u,v) = (77, 38), (78, 55), (138, 5)$ fournissent trois triangles rectangles dont l'aire commune 13 123 110 est le produit des neuf premiers nombres premiers hormis 17.

Marie-Nicole GRAS (Brésilley) propose des solutions paramétrées : $(u,v) = (s^2 + 3t^2, 4st), (s^2 + 3t^2, (s - t)(s + 3t)), (s^2 + 3t^2, (s - t)(s + 3t))$, fournissant des triangles d'aire commune

$$A = |4st\,(s - t)\,(s + t)\,(s - 3t)\,(s + 3t)\,(s^2 + 3t^2)|.$$

Pour certaines valeurs de s et t, il existe d'autres triangles rectangles à côtés entiers d'aire A: on les trouve en résolvant, à l'aide des formules de Cardan, $uv^3 - u^3v - A = 0$ pour $u \mid A$. Par exemple, $s = 16$ et $t = 7$ donnent $A = 6913932480$, et $s = 4$ et $t = 9$ donnent une aire quatre fois plus petite, d'où l'on déduit cinq triangles rectangles différents, de même aire A, associés aux couples $(u,v) = (403, 448), (403, 333), (403, 115), (414, 104), (558, 40)$ (les trois derniers triangles se déduisant également des couples $(u,v) = (259, 144), (259, 155)$ et $(259, 299)$ si l'on choisit $\lambda = 2$).

Il existe plusieurs manières de prouver que pour tout n, on peut trouver n triangles rectangles d'aires égales et de côtés entiers. L'une est expliquée par

Serge BOMPY (Villeparisis) et mise en œuvre par Philippe DELEHAM (Reims). Elle consiste à remarquer que, en s'aidant de l'identité complexe: $|(a^2 + 2iab + b^2)^2| = |a^2 + 2iab + b^2|^2$, si $a^2 + b^2 = c^2$ le triangle rectangle de côtés : $\left|\frac{a^2 - b^2}{2c}\right|$, $\left|\frac{2abc}{a^2 - b^2}\right|$ a une hypoténuse rationelle $\left|\frac{c^4 + 4a^2b^2}{2c\,(a^2 - b^2)}\right|$ et une aire $ab\,/\,2$ égale à celle du triangle rectangle de côtés a, b et d'hypoténuse c. Si donc on connaît $(n - 1)$ triangles rectangles, de côtés entiers et d'aires égales, on peut, à partir de l'un quelconque d'entre eux, construire un n-ième triangle rectangle de même aire et de côtés rationnels. Le résultat annoncé s'en déduit par récurrence, en multipliant tout par le dénominateur commun.

Si l'on part des trois triangles de Diophante, par exemple, de côtés (a,b,c) = (40, 42, 58), (24, 70, 74) et (15, 112, 113) par exemple, à partir du premier on construit le triangle $\left(\frac{41}{29}, \frac{29}{41}\times 1680, \ldots\right)$ et en multipliant tout par le dénominateur commun $D = 29 \times 41 \times 37 \times 1081 = 47\,556\,433$, on obtient la solution que nous propose, un peu brutalement, Philippe DELEHAM :

côté a	côté b	hypoténuse c
1 997 370 186	1 902 257 320	2 758 273 114
3 328 950 310	1 141 354 392	3 519 176 042
5 326 320 496	713 346 495	5 373 876 929
56 510 961 360	67 234 957	56 511 001 357
2 734 604 880	1 389 419 029	3 067 335 829

ces cinq triangles ayant la même aire $S = 840\,D^2$.

Mais cette solution, numériquement, est loin d'être optimale! Dominique ROUX (Limoges), qui a extrait le présent problème de la lettre de Fermat à Mersenne (1643) et cite également l'ouvrage de Sierpinski (p.47), envoie un document de Frenicle de Bessy (1693) publié dans les Mémoires de l'Académie des Sciences (tome 5, 1729), mentionnant plusieurs quadruplets («quaternaires») de triangles rectangles de même aire (le plus petit étant: (111,6160,6161), (231,2960,2969), (280,2442,2458) et (518, 1320, 1418), d'aire 341880) et plusieurs quintuplets («quinaires») de tels triangles, dont le plus petit:

TABLE DE QUATRE QUINAIRES
de Triangles qui ont une même aire.

2805,	52416,	52491,	
3168,	46410,	46518,	
6006,	24480,	25206,	aire 73513440
5236,	28080,	28564,	
8580,	17136,	29164,	

Si cette aire servoit à quelque Triangle primitif, elle seroit l'aire de six Triangles.

est sans doute d'après Philippe DELEHAM, la plus petite solution possible.
Signalons, pour conclure une autre démonstration de l'existence, pour tout n de n triangles rectangles à côtés entiers, de même aire (solution envoyée par Marie-Laure CHAILLOUT - Sarcelles-).

Appelons (a_k, b_k, c_k) , pour $1 \leq k \leq n$, les côtés de ces n triangles et posons: $a_k = c_k \sin \theta_k$, $b_k = c_k \cos \theta_l$; l'aire du triangle vaut $S_k = \left(\frac{c_k}{2}\right)^2 \sin 2\theta_k$

Si $t_k = \tan \frac{\theta_k}{2} = \frac{p_k}{q_k}$ est rationnel, (p_k et q_k entiers), il suffit que $C_k = \lambda_k\left(p_k^2 + q_k^2\right)$ (λ_k entier) pour que a_k, b_k et $S'_k = \left(\frac{p_k^2 + q_k^2}{2}\right)^2 \sin 2\theta_k$ soient entiers. Si en outre, pour tout k, $\frac{\sin 2\theta_k}{\sin 2\theta_{k-1}}$ est le carré d'un rationnel, $\frac{S'_k}{S'_{k-1}}$ est le carré d'un rationnel, ce qui entraîne que $\forall k$, $S'_k = \lambda\, \mu_k^2$ (μ_k entier et λ entier indépendant de k). Il suffira donc de poser $\lambda_k = \prod_{j \neq k} \mu_k$ pour que toutes les surfaces $S_k = \lambda_k^2 S'_k$ des triangles rectangles soient égales.

Or, si l'on définit par récurrence : $\tan \frac{\theta_{k+1}}{2} = t_{k+1} = \sin 2\theta_k = \frac{4t_k\left(1 - t_k^2\right)}{\left(1 + t_k^2\right)^2}$

$\frac{\sin 2\theta_k}{\sin 2\theta_{k-1}} = \frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{4\left(1 - \sin^2 2\theta_{k-1}\right)}{\left(1 + t_k^2\right)^2}$ est bien le carré d'un rationnel dès l'instant où t_k et $\cos 2\theta_{k-1}$ sont rationnels.

Marie-Laure CHAILLOUT impose en outre que $\theta_1 \in \left]0 , \frac{\pi}{4^n}\right[$ ce qui permet d'affirmer que $\theta_k \in \left]0 , \frac{\pi}{4^{n-k+1}}\right[$ vu que $\frac{\theta_{k+1}}{2} < \tan \frac{\theta_{k+1}}{2} = \sin 2\theta_k < 2\theta_k$

d'où tous les $\theta_n \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Cette condition ne semble pas nécessaire, mais même avec $\sin\theta_1 = \frac{3}{5}$, les calculs semblent trop laborieux pour être menés à terme.

ÉNONCÉ N°195 (Dominique ROUX, Limoges)
Partant d'un triangle ABC, on construit le symétrique de chaque sommet par rapport au côté opposé. Comment doit-on choisir ABC pour obtenir ainsi un triangle équilatéral?

SOLUTION de Marie-Nicole GRAS (Brésilley)

On désigne A' le symétrique de A par rapport à (BC), par B' le symétrique de B par rapport à (AC) et par C' le symétrique de C par rapport à (AB). On désigne par a = BC, b = AC, c = AB, A = $\widehat{BAC}$, B = $\widehat{ABC}$, C = $\widehat{ACB}$ et par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Les triangles A'BC, AB'C et ABC' sont égaux au triangle ABC, et on a :

$$\widehat{C'AB'} = 3A \text{ ou } 2\pi - 3A,$$

$$\widehat{A'BC'} = 3B \text{ ou } 2\pi - 3B,$$

$$\widehat{B'CA'} = 3C \text{ ou } 2\pi - 3C.$$

Donc dans le triangle A'B'C, on a

$$A'B'^2 = A'C^2 - 2CA'\,CB' \cos 3C = b^2 + a^2 - 2ab\cos 3C.$$

Or $\cos 3C = \cos C(1 - 4\sin^2 C) = \cos C\,(1 - 4c^2/(4R^2))$

et donc $2ab\cos 3C = 2ab\cos C\,(1 - c^2/R^2) = (a^2 + b^2 - c^2)\,(1 - c^2/R^2)$

et donc $A'B'^2 = a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\,(1 - c^2/R^2)$

$$= c^2\,(R^2 + a^2 + b^2 - c^2)/R^2.$$

De même $\quad B'C'^2 = a^2\,(R^2 + b^2 + c^2 - a^2)/R^2$

et $\quad C'A'^2 = b^2\,(R^2 + c^2 + a^2 - b^2)/R^2.$

On a donc $A'B'^2 = A'C'^2$

$$\Leftrightarrow c^2\,(R^2 + a^2 + b^2 - c^2) = b^2\,(R^2 + c^2 + a^2 - b^2)$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - b^2)\,(R^2 + a^2 - b^2 - c^2) = 0.$$

On a donc

$$A'B' = A'C' \Leftrightarrow (c^2 - b^2)\,(R^2 + a^2 - b^2 - c^2) = 0,$$

$$B'C' = B'A' \Leftrightarrow (a^2 - c^2)\,(R^2 + b^2 - c^2 - a^2) = 0,$$

$$C'A' = C'B' \Leftrightarrow (b^2 - a^2)\,(R^2 + c^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

Supposons que $a \neq b$ et $c \neq a$; alors on a

$$R^2 + b^2 = a^2 + c^2$$
$$R^2 + c^2 = a^2 + b^2$$

ce qui, par différence, entraîne $b^2 = c^2$.

Donc le triangle ABC est isocèle; on suppose que $b = c$. Alors A'B' = A'C' et on a B'C' = B'A' si et seulement si $(a^2 - c^2)(R^2 - a^2) = 0$. Or, dans un triangle, si $R = a$, alors $\dfrac{a}{\sin A} = 2R = 2a$, donc $\sin A = 1/2$ et donc $A = 30°$ ou $A = 150°$.

Donc, pour obtenir un triangle A'B'C' équilatéral, on doit choisir ABC de l'une des trois formes:

(i) équilatéral

(ii) isocèle, avec l'angle au sommet égal à 30°,

(iii) isocèle, avec l'angle au sommet égal à 150°.

Autres solutions:

Edgard DELPLANCHE (Créteil), René MANZONI (Le Havre), Maurice PERROT (Paris), deux solutions incomplètes et deux solutions fausses.

COURRIER DES LECTEURS

1 - Suite à l'énoncé 187 et aux croquis de Sébastien LECLERC qui l'accompagnent, Philippe DELEHAM (Reims) informe que l'approximation $\sin \dfrac{\pi}{7} \approx \dfrac{7}{3}$ était connue de RABELAIS et de DÜRER (1525). Il mentionne beaucoup d'autres approximations, de $\tan \dfrac{2\pi}{7} \approx \dfrac{5}{4}$ à $\tan^8 \dfrac{3\pi}{7} \approx \dfrac{7}{3}\left(19\,397 + 32\sqrt{1\,469\,503}\right)$ avec des références bibliographiques:

Jean-Claude CARREGA *Théorie des corps*

La règle et le compas

G.DOSTOR *Théorie générale des polygones étoilés*

(Gauthiers-Villars 1880).

Par exemple, si l'on pose $Y = \cos X = \dfrac{93 + 9\sqrt{427}}{103 + 10\sqrt{427}}$,

on a $\cos X = \cos \pi/7 - 1{,}526\,04\ldots 10^{-10}$, et l'erreur (de 0,000072546728") est difficilement perceptible sur une calculette..

En effet, l'identité :

cos 4X + cos 3X = (8Y^4 - 8Y^2 + 1) + (4Y^3 - 3Y)

$\Leftrightarrow$ 2cos X/2 cos 7X/2 = (1 + Y) (8Y^3 - 4Y^2 - 4Y + 1)

soit sin (7/2(X - π/7)) = cos X/2 (4Y (1 - Y) (2Y + 1) - 1);

$$\text{or } 4Y(1-Y)(2Y+1) = \frac{7\left(\sqrt{427}-20\right)\left(62-3\sqrt{427}\right)}{\left(103+10\sqrt{427}\right)^3}$$

$$\text{d'où } \sin(7/2\,(X-\pi/7)) = \frac{189\cos X/2}{\left(103+10\sqrt{427}\right)^3\left(\sqrt{427}+20\right)\left(62+\sqrt{427}\right)}$$

2 - Gheorghe-Joan VELCIOV, 27 ans, professeur de mathématiques en Roumanie, nous fait parvenir une étude de la suite de Fibonacci visant à majorer $\left|\text{Log}\left(\frac{F_{n+k}}{F_n}\right) - k\,\text{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right|$.

Par ailleurs, étant donné les difficultés qu'il éprouve, dans son pays, à se procurer des ouvrages et des revues mathématiques, il souhaite correspondre avec des collègues français. Vous pouvez lui écrire à l'adresse suivante:

Gheorghe-Joan VELCIOV
1977 Dustestii-Vechi
nr.550, jud. Timis,
ROUMANIE.