Etudes

Introduction au calcul Leibnizien

G.Wallet
Université de Poitiers

Ce texte est la rédaction d'un exposé fait pour l'APMEP à Poitiers le 24 avril 1991 ainsi qu'à l'Université de Limoges le 15 mai 1991.

A propos de l'analyse infinitésimale, P.Cartier a utilisé l'image suggestive de «littérature clandestine des mathématiques». En effet, les pratiques variées que l'on regroupe sous ce terme, après avoir permis la naissance du calcul différentiel et intégral aux XVII° et XVIII° siècles, ont peu à peu disparu de la scène publique de la science mathématique, pour ne plus exister que sous la forme de techniques heuristiques qu'une tradition orale continue à colporter tant bien que mal. Plutôt mal que bien d'ailleurs, car l'aspect rigoriste et formel de notre enseignement ne laisse aucune place à nos vieux infinitésimaux, si bien que les étudiants que nous formons actuellement sont en général incapables de les utiliser. Cette incapacité est d'ailleurs l'un des signes de notre réussite pédagogique : l'incompréhension du débutant se dévoile lorsqu'il tente d'utiliser des entités sémantiquement infinitésimales du genre «le plus petit nombre réel strictement positif»... Il me semble que cette tradition est en fait en danger : il suffirait que nos collègues physiciens nous imitent dans notre rejet pour que peut-être elle disparaisse.

Pourtant, avec l'apparition de l'analyse non standard au début des années 60, cette situation aurait dû se modifier. Issue de la logique mathématique contemporaine, l'analyse non standard ([DD] [DR] [N1] [Robe] [Robi]) est une théorie moderne qui met en place et justifie une approche de l'analyse basée sur des entités infinitésimales. Création du mathématicien américain A.Robinson, cette nouvelle branche des mathématiques a connu un développement important et de brillants succès dans le monde de la recherche. Cependant, on ne peut pas dire que l'analyse infinitésimale soit à nouveau clairement sortie de sa réclusion. En effet, le champ non standard est conçu majoritairement comme un domaine sophistiqué et formel, peuplé d'ultrafiltres, d'ensembles d'idéalisation et de standardisation... Bref, selon ce point de vue, l'analyse non standard est tout au plus une récente et respectable spécialité des mathématiques en tant que telle réservée à quelques connaisseurs avertis, et n'ayant que bien peu de rapports avec la fraîcheur, la naïveté et parfois la légère irresponsabilité du calcul infinitésimal des Anciens.

Cette opinion ne prend pas en compte le fait que, parallèlement à des développements complexes et spécialisés, l'analyse non standard est à l'origine de tentatives prometteuses pour fonder des versions radicalement élémentaires d'une analyse infinitésimale moderne. On doit ces travaux à E. Nelson, G. Reeb, R. Lutz, P. Cartier et Y. Perrin, J.-L. Callot et quelques autres que je dois oublier ([Cal] [Car] [L] [N2] [N3] [R]). La version présentée ici a pour origine une idée de R.Lutz développée en 1987 dans un article de la *Gazette des Mathématiciens*. Sous l'étrange nom de ZFL, cette théorie a été appliquée avec succès par son créateur à de nombreux problèmes issus de la physique, ainsi que par J.-L. Caillot à des questions d'équations différentielles, de perturbations singulières et d'analyse complexe.

Le point de vue développé dans les pages suivantes est simple, presque ridiculement simple. Il est légitime de se demander pourquoi il aura fallu attendre la fin des années 80 pour qu'il soit formulé. Les blocages ne sont pas techniques, ainsi que le lecteur pourra bientôt en juger. Alors, pourquoi ? Il est possible que les obstructions majeures à l'avènement d'une analyse infinitésimale simple et moderne soit d'origine philosophique ... Non pas la philosophie explicite et reconnue comme telle, qui en général intéresse peu les mathématiciens, mais celle, implicite et quasi-spontanée qui accompagne nos discours et notre enseignement. Cette dernière s'épanouit particulièrement sur le terreau de la théorie naïve des ensembles. C'est pour cela qu'il m'a paru nécessaire de désenclaver l'analyse infinitésimale de l'univers ensembliste et formel dans lequel on la présente habituellement. De l'appellation ZFL, il me semble que l'on peut gommer sans inconévnients le Z et le F de Zermelo et Fraenkel. Bien entendu, ces deux noms n'ont rien d'infamant, ils sont seulement sans lien intrinsèque avec le sujet. Il ne reste alors que le L, celui de Leibniz, et une technique élémentaire et puissante : le *calcul Leibnizien*.

1-Quelques idées communes sur les nombres.

Lors de la deuxième moitié du siècle dernier, un point de vue nouveau sur les nombres s'est peu à peu imposé avec l'arithmétisation de l'analyse. Ce tour de force s'est fait parallèlement à l'instauration d'un fondement unique à l'immense diversité de l'activité mathématique : la notion d'ensemble. Cette thèse est devenue le credo presque unanime de notre communauté. Tout «objet mathématique» digne de ce nom doit être en dernière instance un ensemble, et l'activité mathématique par excellence est la manipulation des ensembles. Ce paradis cantorien dans lequel nous sommes douillettement installés permet une belle économie de la pensée en unifiant sous une même dénomination des notions très diverses. C'est le cas des nombres qui depuis, se définissent simplement comme les éléments de quelques ensembles infinis fondamentaux : **N**, **Z**, **Q**, et **R**. Parmi les avantages supposés de la vision ensembliste, il y a celui de la conception des mathématiques qui s'en dégage en tant que science descriptive des ensembles. On «décrit» l'ensemble des nombres réels comme on le ferait pour un coléoptère ou une molécule. C'est ainsi que l'arithmétique apparaît comme la science naturelle des nombres, et l'analyse comme celle des fonctions numériques. On est alors tout prêt du point de vue philosophique désigné sous le nom de platonisme. Selon ce dernier, le mathématicien découvre un monde qui préexiste à son investigation et le langage formel est le moyen adéquat de cette exploration.

A première vue, la conception platonicienne et naïve des ensembles et des nombres ne semble pas avoir d'inconvénients techniques. Bien au contraire, elle donne une solide assurance au sujet mathématicien qui a ainsi l'impression de travailler avec des objets nets et précis, presque concrets. Fort de cette assurance, il peut aborder de plein pied les problèmes que notre communauté qualifie d'importants...

Cependant, il subsiste une conséquence fâcheuse : nous avons tous un peu trop tendance à penser que les nombres (réels par exemple) sont des objets parfaitement définis, que le formalisme qui en rend compte est arrivé au stade ultime de la perfection et qu'il n'y a plus à revenir la dessus. Le domaine des nombres réels semble complètement circonscrit, verrouillé même, puisque depuis Cantor, Dedekind, Méray, Heine et Weierstrass, nous savons le «construire». Cette construction exclut la notion confuse de nombres infinitésimaux, et si l'on tient à introduire de telles entités, cela nécessitera obligatoirement un montage artificiel et extérieur au domaine familier de nos bons vieux nombres réels.

2-Ordre et ordre de grandeur dans le champ numérique.

La relation d'ordre habituelle $\leq$ est une relation fondamentale du champ numérique qui permet de comparer les nombres. Ainsi, les propositions du type

$$1 \leq 2$$

$$1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$$

sont douées de sens par la mathématique classique. Il n'en est pas de même pour les propriétés «être grand», «être très grand», «être petit», «être très petit». Ainsi, les propositions

$$10^{-27} \textit{ est très petit}$$

$$10^{10^{10}} \textit{ est très grand}$$

ne sont pas mathématiquement fondées, alors qu'à certains égards, elles paraissent pertinentes. Plus généralement, c'est la notion *d'ordre de grandeur* qui n'a pas trouvé sa place dans la mathématique instituée. Cette situation est curieuse car, au delà du discours strictement mathématique, il nous arrive fréquemment de raisonner, voire même de calculer, sur les ordres de grandeur. L'usage très général du langage ne nous permet pas de disqualifier une assertion du genre :

$$\textit{Si } x \textit{ est très grand, alors } \frac{1}{x} \textit{ est très petit et } x + \frac{1}{x} \textit{ est très grand}$$

Qui plus est, ce type de calcul pré-mathématique peut s'avérer très utile pour notre description de la réalité. D'ailleurs l'ingénieur et le physicien en font grand usage, et pour l'étudiant en sciences, il n'y a guère qu'en cours de mathématiques que ces pratiques soient strictement interdites. Il y a là une sorte de paradoxe avec lequel il va falloir s'expliquer.

Ce serait néammoins commettre une injustice que d'insinuer que les mathématiques ont rejeté sans motif les ordres de grandeur hors de leur royaume. Pour cela, ils avaient au moins deux excellentes raisons :

1- Une première, énoncée depuis les constructions par Cantor et Dedekind de l'ensemble **R** des nombres réels: puisque **R** d'une part ne possède manifestement pas d'infinitésimaux, d'autre part est caractérisé par la propriété d'être «un corps totalement ordonné, archimédien et complet», il est *logiquement impossible* d'introduire de nouveaux nombres sans perdre l'une de ces magnifiques propriétés. La violence avec laquelle Cantor a lui-même rejeté les infinitésimaux est remarquable (il a utilisé à leurs propos le terme de «tigres de papiers»).

2- Une raison plus ancienne (confer par exemple la critique de Berkeley) selon laquelle l'usage de nombres infinitésimaux conduit inévitablement à des contradictions. Voici un exemple d'une telle aporie :«Soit N un entier positif infiniment grand. Le nombre $h = 1/N$ est donc infiniment proche de 0. Si k est un nombre entier tel que kh soit infiniment proche de 0, alors $(k + 1)h$ est aussi infiniment proche de 0 (car $(k + 1)h = kh + h$). Ainsi, on montre par récurrence que Nh est infiniment proche de 0. Or, $Nh = 1$...».

3-Essai de formalisation des ordres de grandeur.

3.1.Malgré les bonnes raisons précédentes, on peut néammoins tenter de formaliser la notion pré-mathématique d'ordre de grandeur. Pour cela, il faudrait par exemple énoncer des règles qui gouvernent l'usage de l'adjectif «très grand». En fait, il est techniquement plus simple de travailler avec le contraire de «très grand», dont on convient que c'est l'adjectif «limité». Cependant, il ne faut pas se méprendre: il n'est pas question de *définir*, au sens habituel qu'a ce terme en mathématiques, la propriété "x est limité». Cela n'est pas possible! Mais on peut essayer de recueillir et condenser, sous la forme de quelques propositions transparentes, les principes essentiels du calcul pré-mathématique sur les ordres de grandeur. Il est judicieux de retenir au moins les trois lois suivantes, dans lesquelles les variables désignent des nombres (entiers, rationnels ou réels) :

(LIM1) 1 *est limité.*

(LIM2) Si *y est limité et* $|x| \leq |y|$, *alors x est limité.*

(LIM3) Si x et y *sont limités, alors* $x + y$ *et* xy *sont limités.*

Est-ce suffisant? Certainement pas, car pour qu'il y ait des ordres de grandeurs différents, il est nécessaire de supposer que tous les nombres ne sont pas limités. Or si l'on se restreint aux trois règles précédentes, on n'exclut pas l'interprétation selon laquelle toute entité numérique est limitée. Il faut donc rajouter:

(LIM4) *Il existe un nombre non limité.*

3.2. Ces quatre principes minimaux étant dégagés, est-il possible de fonder, en s'appuyant uniquement sur eux, une authentique pratique mathématique qui ne bouleverserait en aucun cas la belle ordonnance des nombres réels? Oui, à condition d'adopter résolument le point de vue *syntaxique*. Selon ce dernier, rien ne doit être retranché de la structure du système numérique existant. Peu importe que l'on soit un adepte de l'intuitionnisme ou un disciple de l'infini cantorien. Il est même concevable que le système numérique se réduise aux seuls nombres rationnels, et pourquoi pas à un ensemble fini de tels nombres. L'astuce syntaxique consiste à enrichir le langage sans «casser» l'architecture préexistante quelqu'elle soit. La procédure est simple: il faut ajouter à notre vocabulaire mathématique le nouveau terme «limité». Cet adjectif n'est pas défini dans l'ancien système mais sa syntaxe est gouvernée par les règles (LIM1), (LIM2), (LIM3) et (LIM4).

3.3. Voilà comment il est possible de contourner sans effort la première cause qui interdisait l'introduction des ordres de grandeur en mathématiques. Du moins, sans effort technique, car sur le plan philosophique, il en va autrement. En effet, adopter ce point de vue syntaxique nécessite de malmener quelque peu le platonisme ambiant (1). Il faut accepter que les nombres ne sont pas des objets prédéfinis mais des formes, des règles que les hommes inventent pour décrire et agir sur le monde. Ces règles ne sont pas figées. Elles sont susceptibles d'évoluer et d'ailleurs, elles évolueront à coup sûr dans l'avenir. Il ne tient qu'à nous de les enrichir d'ores et déjà pour permettre l'introduction des ordres de grandeur. Scientifiquement, la seule question à se poser est la suivante: que vaut la mathématique que l'on veut développer sur cette base ?

4-Premiers pas dans le calcul Leibnizien.

4.1. Résumons les préceptes, tels que nous venons de les dégager, de ce que nous appelons le calcul Leibnizien:

❶ Ne rien retrancher à ce que l'on sait sur les nombres réels.

❷ Rajouter le terme «limité» à notre langage.

❸ S'appuyer sur les axiomes (LIM1), (LIM2), (LIM3) et (LIM4).

(1) Mon propos peut amener le lecteur à penser que ce type de mathématique nécessité une lucidité philosophique hors du commun. En fait, il est possible d'en faire une lecture platonicienne et ensembliste, par exemple en postulant que l'ensemble des nombres réels a toujours contenu des infinitésimaux et que nous venons simplement de nous donner les moyens d'en parler

Une règle implicite est, comme d'habitude, d'éviter soigneusement les contradictions. Cela n'a rien de spécifique à notre calcul, sauf que, en vertu de la seconde raison énoncée dans le paragraphe 2, nous savons que les paradoxes nous guettent. Avant de les affronter franchement, acceptons de faire quelques pas dans le calcul Leibnizien.

Voici en vrac quelques premières conséquences des axiomes:

➡ 0 est limité.

➡ y est limité si et seulement si $|y|$ l'est.

➡ 3, 4, 5, …, 10 sont limités.

➡ $\sqrt{2}$, e , π sont limités.

➡ Un nombre non limité positif est plus grand que tout nombre limité.

4.2. Il est bon d'introduire un jeu de définitions pour mettre en place la structure mathématique des ordres de grandeur numériques. Il s'agit maintenant d'authentiques définitions internes à notre théorie.

DÉFINITIONS

◊ *Un nombre x est **très grand** s'il n'est pas limité. On note cette propriété $x \approx \infty$ avec la précision $x \approx +\infty$ si x est positif, $x \approx -\infty$ sinon.*

◊ *Un nombre x est **très petit** s'il est nul ou si son inverse est très grand. On note cette propriété $x \approx 0$.*

◊ *Un nombre x est **appréciable** s'il n'est ni très grand, ni très petit.*

◊ *Si x et y sont des nombres tels que $x - y \approx 0$, on dit qu'ils sont **très proches** et on note $x \approx y$.*

Remarque. La terminologie introduite par ces définitions n'est pas habituelle. Traditionnellement, on utilise plutôt l'adjectif «infiniment grand» à la place de «très grand» et «infiniment petit» à la place de «très petit». Ce choix, très ancien, a l'évident inconvénient d'établir un lien implicite avec la «métaphysique de l'infini» et tout ce que véhicule cette dernière (images troublantes, vestiges de l'esprit…). Or, il est important de remarquer que le calcul sur les ordres de grandeur dont nous établissons les fondements *n'a strictement aucun rapport avec la problématique de l'infini.* Aucun infini ne s'est glissé dans la présentation du calcul Leibnizien, et il serait regrettable de lui laisser maintenant une place par l'adoption d'un vocabulaire favorisant les glissements sémantiques. Par ailleurs, on aurait pu se contenter d'utiliser les adjectifs communs «grand» et «petit» ; mais il y a alors risque de confusion du fait que les expressions «plus grand que» et «plus petit que » sont déjà utilisées pour la relation d'ordre usuelle.

On peut caractériser les notions introduites en fonction des seuls nombres entiers :

PROPOSITION 1.*Soit* x *un nombre réel. Alors :*

(i) *Le nombre* x *est limité si et seulement si il existe un entier naturel limité* n *supérieur ou égal à* $|x|$.

(ii) *Le nombre* x *est très grand si et seulement si* $|x|$ *est supérieur ou égal à tout entier naturel limité.*

(iii) *Le nombre* x *est très petit si et seulement si, pour tout entier naturel* n *non nul,* $|x|$ *est inférieur ou égal à* $\frac{1}{n}$.

(iv) *Il existe des entiers naturels non limités.*

Démonstration.

Pour tout nombre x, on désigne par $[x]$ sa partie entière. Puisque $[x] \leq x \leq [x] + 1$, il apparaît que x est limité si et seulement si $[x]$ l'est. Ainsi, on déduit de (LIM4) l'existence d'un nombre entier naturel non limité. La proposition est alors claire. ❒

4.3. Il est maintenant possible d'établir les premières propriétés de *l'arithmétique des ordres de grandeur*, par exemple sous la forme des tables d'addition et de multiplication suivantes dans lesquelles on utilise les abréviations **t.g.** pour très grande, **app.** pour appréciable,**t.p.** pour très petit,s et **lim.** pour limités.

+	t.p.	app.	t.g.
t.p.	t.p.	app.	t.g.
app.	app.	lim.	t.g.
t.g.	t.g.	t.g.	?

x	t.p.	app.	t.g.
t.p.	t.p.	t.p.	?
app.	t.p.	app.	t.g.
t.g.	?	t.g.	t.g.

Une autre propriété dont nous aurons besoin dans la suite:

PROPOSITION 2.:

(i) *Une somme d'un nombre limité de nombres limités est limitée.*

(ii) *Une somme d'un nombre limité de nombres très petits est très petite.*

(iii) *Un produit d'un nombre limité de nombres très proches de* 1 *est très proche de* 1.

Démonstration :

Soit n un entier naturel limité et une suite $(x)_{i=1,\dots,n}$ de nombres. Désignons par μ le plus grand des nombres $|x_i|$ pour $i = 1, \dots, n$.

Alors: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq n\,\mu$.

Si x_i est limité (respectivement très petit), il en est de même pour μ, d'où les assertions *(i)* et *(ii)*.

Si chaque x_i est très proche de 1, on peut écrire:

$$x_i = 1 + \varepsilon_i \text{ avec } \varepsilon_i \approx 0,$$

et $$\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

où les σ_j sont les fonctions symétriques élémentaires:

$$\sigma_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_j} \quad .$$

Alors, $\left|\sigma_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\right| \leq \left(|\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n|\right)^j$.

D'après ce qui précède, $|\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n|$ est très petit et il en est de même pour $\left(|\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n|\right)^j$ car $\left(|\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n|\right)^j \leq |\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n|$.

Finalement, $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est très petit et l'assertion *(iii)* est démontrée. ❐

Remarque : Nous n'avons pas démontré qu'un produit d'un nombre limité de nombres limités est lui-même limité. Avec notre axiomatique, cela est vraisemblablement impossible. En particulier, nous ne savons pas montrer que :

(*) *Si* $x \in \mathbf{R}$ *et* $n \in \mathbf{N}$ *sont limités, alors* x^n *est limité.*

Alors qu'il est possible de prouver sous les mêmes hypothèses que

$x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots, x^{10}$ *sont limités*

(ce point technique est étudié plus en détail dans la remarque 2 du paragraphe 5). Le lecteur pressé peut y voir une contrainte artificielle traduisant la faiblesse de notre approche. Cette vision est superficielle! Il est au contraire hautement significatif que (*) ne soit pas démontrable à partir de nos axiomes. Cela tient au fait que x^n est une *fonction exponentielle* de l'entier n, et l'effet bien connu de croissance démesurée de cette fonction justifie amplement le caractère non logiquement dérivable de (*). Cependant le contraire de l'assertion (*) ne semble pas plus démontrable. Sous réserve qu'aucune contradiction n'apparaisse, on est donc libre d'adjoindre aux axiomes (LIM1), (LIM2), (LIM3) et (LIM4) l'assertion (*). Cela est une affaire de choix. La théorie sans l'axiome (*) est plus fine, car elle prend bien en compte le phénomène de croissance exponentielle. Cette option peut se révéler intéressante, par exemple pour des calculs de complexité d'algorithme. Inversement, la facilité technique qu'offre l'axiome (*) est peut-être nécessaire pour développer une analyse un peu générale.

5.Que faire des paradoxes?

5.1. Il est temps d'affronter les paradoxes qui paraissent surgir naturellement de toute manipulation d'infinitésimaux numériques. Il est clair que l'exemple d'aporie du paragraphe 2 peut être repris tel quel, à condition de remplacer *infiniment grand* par *très grand* et *infiniment petit* par *très petit*. Faut-il y voir une contradiction inéluctable prouvant l'échec définitif de notre tentative?

A vrai dire, c'est une position curieuse que d'avoir diabolisé la contradiction en mathématiques, au point d'en faire un drame qu'il faut éviter à tout prix (2). C'est ne pas comprendre que les paradoxes qui surgissent au cours de notre travail d'élaboration sont au contraire une formidable aide pour affiner l'outil que nous forgeons. Il suffit de garder son sang-froid et d'analyser les causes structurelles des contradictions.

Dans l'exemple du paragraphe 2, l'origine de la contradiction est claire : elle tient en l'application du mode de raisonnement par récurrence à la propriété $\mathcal{P}(k)$ suivante : $kh = 0$. Ceci nous amène à opérer une distinction

(2) La mathématique définitivement non contradictoire à laquelle rêvait D.Hilbert m'a fait irrésistiblement penser à une corrida débarassée à tout jamais de taureaux.

importante relative à la nature des propositions que nous pouvons former dans notre calcul des ordres de grandeur.

→ D'une part, il y a les propositions dont la constitution ne nécessite pas l'utilisation du nouveau terme «limité». Ce sont celles que l'on veut formuler dans «l'ancien système numérique». Pour elles, rien n'est changé, nous pouvons continuer à les manipuler selon nos bonnes vieilles habitudes et en particulier leur appliquer sans restriction la récurrence.

→ D'autre part, il y a les nouvelles propositions, celles qui se construisent de près ou de loin à l'aide du terme "limité". Celles-là, nous les appelons les ***propositions asymptotiques***. Par exemple,

x *est limité*

$x \approx 0$

$$x \approx \frac{\sin z}{y}$$

sont des propositions asymptotiques. Une proposition asymptotique peut être équivalente à une proposition usuelle. Ainsi, la proposition

$x \approx 0$ et $x \in \mathbf{N}$

est équivalente à $x = 0$. On convient d'appeler ***proposition strictement asymptotique*** une proposition asymptotique équivalente à aucune proposition usuelle. La proposition $\mathcal{P}(k)$ suivante

$n \in \mathbf{N}$ et x *est limité*

est strictement asymptotique. En effet, si elle était équivalente à une proposition usuelle, on pourrait lui appliquer une récurrence et prouver que

$\forall n \in \mathbf{N}$ n *est limité*

ce qui est contraire à (LIM4). De même, on montre facilement que les propositions $x \approx +\infty$ et $x \approx 0$ sont strictement asymptotiques, et on peut en concevoir de beaucoup plus complexes.

5.2. Pour éviter les contradictions analogues à celles de l'exemple du paragraphe 2, il suffit de tenir compte de la particularité des propositions strictement asymptotiques : *il ne faut pas leur appliquer le mode de raisonnement par récurrence*. Pour elles, comme pour les autres propositions, les règles usuelles de la logique déductive sont valables, mais la forme élaborée d'induction que constitue la récurrence est réservée aux propositions usuelles. Il est remarquable que cette contrainte n'a rien d'artificiel mais correspond au contraire à une *nécessité structurelle du raisonnement sur les ordres de grandeur*. Il est dans la nature du calcul Leibnizien que les propositions strictement asymptotiques ne soient pas récurrentes. Qui plus est, par un retournement surprenant, cette spécificité des propositions strictement asymptotiques peut se révéler un puissant outil démonstratif (voir plus loin la démonstration du lemme de Robinson).

Remarques.

1- On peut concevoir un mode de raisonnement par récurrence qui pourrait s'appliquer de manière plus raisonnable aux propositions strictement asymptotiques. C'est le ***principe de récurrence limité*** que l'on peut énoncer sous la forme :

(**)*Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition telle que $\mathcal{P}(0)$ soit vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$. Alors, pour tout naturel n limité, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.*

Cependant, il n'est pas possible de justifier (**) à partir de nos axiomes. A nouveau, on se trouve face à l'alternative : admettre ou rejeter (**). Remarquons, en passant que (**) implique (*).

2- Etant donné un nombre limité x, comment peut-on démontrer que x^{100} est limité? Il est tentant de procéder ainsi :

$$\begin{array}{lcl} x \ \textit{limité} & \Rightarrow & x^2 = x\,x \ \textit{limité} \\ x^2 \ \textit{limité} & \Rightarrow & x^3 = x^2\,x \ \textit{limité} \\ & \vdots & \\ x^{99} \ \textit{limité} & \Rightarrow & x^{100} = x^{99}\,x \ \textit{limité}. \end{array}$$

Le problème dans l'écriture précédente est que les trois petits points sont une sorte de récurrence cachée. En effet, rien n'empêche d'utiliser cette forme de raisonnement en remplaçant 100 par n'importe quel entier n, par exemple

$$n = 10^{10^{10}}$$

ce qui est manifestement injustifié (3). On peut imaginer que «la bonne démonstration» consiste à produire *explicitement* les 100 implications

$$x^n \ \textit{limité} \quad \Rightarrow \quad x^{n+1} \ \textit{limité}.$$

La chose est pensable, mais à la limite du raisonnable : le lecteur doit être capable de vérifier la présence de tous les intermédiaires. Une démonstration

(3) Trois petits points ne peuvent pas être une abréviation pour une démonstration de $10^{10^{10}}$ lignes que personne ne verra jamais.

correcte, c'est-à-dire acceptable par tous, est plutôt :

$$x^2 = x\,x \quad \textit{limité}$$

$$x^4 = x^2\,x^2 \quad \textit{limité}$$

$$x^8 = x^4\,x^4 \quad \textit{limité}$$

$$x^{16} = x^8\,x^8 \quad \textit{limité}$$

$$x^{32} = x^{16}\,x^{16} \quad \textit{limité}$$

$$x^{64} = x^{32}\,x^{32} \quad \textit{limité}$$

$$x^{36} = x^{32}\,x^4 \quad \textit{limité}$$

$$x^{100} = x^{64}\,x^{36} \quad \textit{limité}.$$

Ainsi, x^n est limité pour tout entier n pour lequel nous pouvons exhiber une démonstration concrète sans récurrence de cette propriété. Cette contrainte syntaxique génère un *horizon* dans la classe des entiers n : la frontière floue où cette procédure devient effectivement impossible. Loint d'être un artefact, l'existence d'une frontière floue est essentielle à ce type de raisonnement. On retrouve là le «paradoxe» du tas de sable : à partir de combien de grains de sables obtient-on un tas? L'aspect paradoxal disparaît lorsque l'on comprend que la question n'a pas de sens. Pour rassurer le lecteur, il est bon de noter que les questions du genre "*Est-ce que* x *limité implique* x^{100} *limité ?*" n'ont rien de fondamental dans notre calcul. Tout au plus peuvent-elles se poser de manière annexe au cœur d'une démonstration plus productive.

5.3. Depuis l'axiomatisation de la théorie des ensembles et la «construction» dans ce cadre de **R** l'ensemble des nombres réels, il est devenu naturel de considérer qu'il y a équivalence entre une propriété mathématique $\mathcal{P}(x)$ (où x est une variable représentant un nombre réel arbitraire) et le sous-ensemble suivant P de **R**

$$\mathrm{P} = \{x \in \mathbf{R} \,/\, \mathcal{P}(x)\}.$$

Autrement dit, on convient qu'à toute propriété $\mathcal{P}(x)$ est associée, par principe, une partie P de **R** telle que, pour $x \in \mathbf{R}$:

$$x \in \mathrm{P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(x).$$

Ce principe fait partie, à mon sens, des facilités un peu trompeuses que nous offre le paradis de Cantor. Toujours est-il qu'il n'y a aucune raison de l'appliquer aux propositions strictement asymptotiques. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la proposition

$$x \approx 0.$$

Si l'on suppose qu'il existe une partie **I** de **R** telle que

$$x \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{I}$$

il apparaît que, **I** étant non vide et borné, il devrait posséder une borne supérieure α strictement positive. Mais :

$$\alpha \in \mathbf{I} \Rightarrow \quad 2\alpha \in \mathbf{I}$$
$$\alpha \notin \mathbf{I} \Rightarrow \quad \alpha/2 \notin \mathbf{I}$$

d'où une contradiction. Ainsi, une proposition strictement asymptotique ne définit pas une ***propriété extensive*** des nombres (c'est-à-dire équivalente à l'appartenance à un ensemble). Ce fait peut paraître scandaleux à un mathématicien formé à la seule théorie des ensembles et pour lequel la rencontre avec un «objet mathématique» qui ne soit pas un ensemble doit être tout à fait exceptionnelle. Pour ma part, je trouve plutôt rassurant d'exhiber une authentique propriété mathématique qui soit irréductible à la donnée d'une liste d'objets.

Conclusion.

Une proposition strictement asymptotique n'est en général ni récurrente ni extensive. C'est le prix, en vérité bien faible, qu'il faut payer afin d'éviter les contradictions du calcul Leibnizien. Les fondements de ce calcul étant maintenant solidement établis (4), il est possible d'aborder l'analyse avec cet outil.

6.Une démonstration d'Euler revisitée.

Dans le cadre de cette brève introduction, on se contentera de justifier, dans le calcul Leibnizien, un résultat (et sa démonstration) dû à Euler. Pour cela, on aura besoin de la propriété suivante (dégagée, dans l'analyse non standard, par A.Robinson).

---

(4) A mon sens, établir solidement les fondements d'une théorie signifie en éclaircir suffisamment le fonctionnement pour qu'elle soit communicable, par exemple sous la forme d'un enseignement.

LE LEMME DE ROBINSON. *Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que $u_n \simeq 0$ pour tout n limité. Alors, il existe un nombre entier très grand μ tel que $u_m \simeq 0$ pour tout m vérifiant $0 \leq m \leq \mu$.*

Démonstration : Désignons par $C(n)$ la proposition :

$$\forall\, k\ (0 \leq k \leq n \Rightarrow |u_k| \leq \frac{1}{n+1}).$$

Par hypothèse, on a l'implication :

$$n \text{ limité} \qquad \Rightarrow \qquad C(n).$$

Puisque la proposition "n est limité" est strictement asymptotique, l'implication inverse est fausse. Donc :=

$$\exists\, \mu \simeq +\infty \qquad C(\mu).$$

Le lemme en découle. ❐

Cette démonstration illustre l'utilité technique du caractère strictement asymptotique de certaines propositions. L'énoncé obtenu appartient à une famille plus générale de résultats que l'on nomme les ***principes de permanence***. A ma connaissance, ces principes n'ont pas d'équivalents dans le calcul infinitésimal des Anciens. Il est plaisant de constater que ce lemme nous permet de compléter, de notre point de vue, une démonstration d'Euler concernant la fonction exponentielle [E].

THEOREME.

Soit ν un nombre entier positif très grand. Alors :

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \simeq \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k!}$$

Démonstration :

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} \equiv \sum_{k=0}^{\nu} C_{\nu}^{k} \frac{1}{\nu^{k}}$$

$$C_{\nu}^{k} \frac{1}{\nu^{k}} = \frac{\nu\,(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{k!}\,\frac{1}{\nu^{k}} = 1\,(1-\frac{1}{\nu})\ldots(1-\frac{k-1}{\nu})\,\frac{1}{k!}$$

On suppose que ν est très grand. Alors, pour tout k limité :

$$j \in \{0,1,\ldots,k-1\}\quad 1-\frac{j}{\nu} \cong 1$$

On sait d'après la proposition 2 du paragraphe 4 que le nombre ε_k défini par

$$1\,(1-\frac{1}{\nu})\ldots(1-\frac{k-1}{\nu}) = 1+\varepsilon_k$$

est très petit. Pour tout entier n limité, on a

$$\sum_{k=0}^{n} C_\nu^k \frac{1}{\nu^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k!}$$

et, toujours d'après la proposition 2 du paragraphe 4, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k!}$ est très petite. On a prouvé que, pour tout entier limité n :

$$\sum_{k=0}^{n} C_\nu^k \frac{1}{\nu^k} \cong \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

(Jusqu'à cette dernière ligne, la démonstration est à peu près celle d'Euler).

En vertu du lemme de Robinson, il existe un entier μ très grand, inférieur ou égal à ν tel que :

$$\sum_{k=0}^{\mu} C_\nu^k \frac{1}{\nu^k} \cong \sum_{k=0}^{\mu} \frac{1}{k!}$$

Pour conclure, il suffit de s'assurer que :

$$\sum_{k=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{k!} \cong 0 \text{ et que } \sum_{k=\mu+1}^{\mu} C_\nu^k \frac{1}{\nu^k} \cong 0,$$

ce qui résulte des majorations classiques :

$$\sum_{k=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(\mu+1)!} \sum_{j=0}^{\nu-\mu-1} \left(\frac{1}{\mu+1}\right)^j \leq \frac{1}{\mu(\mu!)}$$

$$0 \leq C_\nu^k \frac{1}{\nu^k} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)}{\nu^k} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!} \quad \square$$

Remarque. Si l'on admet (*) comme axiome, on peut démontrer de manière identique que $\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu \cong \sum_{k=0}^{\nu} \frac{x^k}{k!}$ pour tout x limité et $\nu \approx +\infty$, ce qui correspond plus précisément au résultat d'Euler. A nouveau apparaît un lien entre la fonction exponentielle et (*)...

BIBLIOGRAPHIE

[Cal] **J.L.Callot,** *Trois leçons d'analyse infinitésimale,* à paraître dans les actes du Colloque *Le continu Mathématique* (Cerisy-la-Salle, Septembre 1990).

[Car] **P.Cartier,** *Was sind und was sollen die zahlen ?* dans H.Barreau et J.Hartong éditeurs, *La mathématique non standard,* Editions du CNRS, Paris 1989.

[DD] **A.Deledicq et M.Diener,** *Leçons de calcul infinitésimal,* Armand Colin, Paris 1989.

[DR] **F.Diener et G.Reeb,** *Analyse Non Standard,* Hermann, Paris 1989.

[E] **L.Euler**, *Introduction à l'analyse infinitésimale*, traduit du latin par J.B.Labey, Chez Bachelier imprimeur-libraire, Paris 1835.

[Lo] **C.Lobry**, *Et pourtant, ils ne remplissent pas* **N** *!,* Aléas Editeur, 1989.

[L] **R.Lutz,** *Rêveries infinitésimales,* La Gazette des Mathématiciens, 34, octobre 1987.

[N1] **E.Nelson,** *Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis*, Bull.Amer.Math.Soc. 83 (1977), 1165-1198.

[N2] **E.Nelson,** *Predicative arithmetic*, Princeton University Press, 1986.

[N3] **E.Nelson,** *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton

University Press, 1987.

[R] **G.Reeb,** *Mathématique non standard (essai de vulgarisation),* Bulletin de l'A.P.M.E.P., 328 (1981) p.259-273.

[Robe] **A.Robert,** *Analyse non standard,* Presses polytechniques romandes, Lausanne 1985.

[Robi] **A.Robinson,** *Non Standard Analysis,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London 1966.