*Journées nationales - Lyon 1991*

# L'universalité des mathématiques

Conférence inaugurale des journées APM de Lyon (Octobre 1991) "Mathématiques sans frontières".

**Gilbert Arsac,**
**Université Lyon I.**

## Introduction.

La conférence inaugurale des journées de l'APM se doit de porter sur le thème choisi : mathématiques sans frontières. Si le titre de celle-ci, "l'universalité des mathématiques", est un peu différent, c'est qu'il renvoie à la première commande dont, à tort ou à raison, je me souviens...à un état peut-être archaïque du thème des journées, auquel je suis resté attaché, d'abord sans intention profonde, mais en lui trouvant par la suite un avantage : la revendication d'universalité des mathématiques apparaît spontanément, on le verra, dans les déclarations des mathématiciens, ce qui n'est pas le cas de l'expression "mathématiques sans frontière" dont je considère par ailleurs qu'elle est synonyme.

Comme cette prétention à l'universalité des mathématiques risque peut-être d'agacer nos collègues scientifiques, je voudrais commencer par la justifier de manière factuelle, quitte à encourir le reproche d'une certaine superficialité, avant de la développer en faisant le pari de rester le plus près possible de la démarche du mathématicien. Je vais donc montrer d'abord brièvement l'universalité de fait des mathématiques sous un double aspect : universalité culturelle, universalité des applications. Je le ferai de plus dans le souci de préparer la discussion à laquelle je me livrerai ensuite en soulignant d'entrée de jeu les problèmes que soulève déjà une simple tentative de description.

Je voudrais aussi annoncer d'emblée que je laisserai beaucoup de questions non tranchées même si parfois j'esquisserai des réponses possibles. En effet, d'une part je ne voudrais pas oublier qu'en tant qu'enseignants nous n'avons pas à imposer à nos élèves nos opinions quant à la nature de l'activité mathématique. Toute définition trop stricte de cette activité risque d'en majorer un seul aspect qui n'est peut-être pas celui qui convient à tel élève ou à tel collègue. D'autre part, pour certaines questions, c'est un plaisir de les laisser ouvertes. Combien d'entre nous n'ont-ils pas ressenti un certain soulagement en apprenant qu'une démonstration récemment proposée du théorème de Fermat se révélait finalement inexacte et qu'ils pouvaient continuer à rêver sur ce problème ?

## Universalité culturelle des mathématiques.

Commençons par l'aspect culturel: à l'époque actuelle, les mathématiques sont universelles en ce sens que les mêmes mathématiques se trouvent développées sur toute la terre. Il existe bien sûr des nuances, des écoles, mais elles n'empêchent nullement un mathématicien de n'importe quelle nationalité de rentrer en contact avec un autre mathématicien, quelle que soit l'origine de ce dernier. Les problèmes de traduction sont d'ailleurs particulièrement faciles à traiter en mathématiques. A. Connes va jusqu'à affirmer : *elles (les mathématiques) sont absolues, universelles, et donc indépendantes de toute influence culturelle* (Changeux J. P., Connes A., 1989). Cependant, comme cette universalité est aussi celle de toutes les sciences contemporaines, il nous faut aller un peu plus loin et nous n'éviterons pas ici un petit détour historique: si la physique au sens actuel est universelle, sa date de naissance que l'on peut fixer conventionnellement à Galilée est plus récente et elle s'est développée à partir de ce seul point de départ sans qu'on puisse repérer dans les autres civilisations des pierres d'attente l'ayant plus ou moins anticipée. Au contraire, en un certain sens, les mathématiques existent dans toutes les civilisations bien que nos mathématiques actuelles soient héritières d'une seule tradition, qui prend son origine en Grèce. Nous pouvons d'ailleurs, dès ce premier pas, repérer la difficulté et le danger qu'il y aurait à énoncer des opinions trop tranchées : si nous définissons l'activité mathématique comme reconnaissable à la préoccupation de résoudre un certain type de problèmes arithmétique ou géométrique, nous trouvons en effet des mathématiques chez les Egyptiens, les Babyloniens, les Mayas, les Chinois, pour ne citer que des représentants des grandes civilisations. En revanche, si nous nous attachons au caractère démonstratif et rigoureux des mathématiques, nous aurons tendance à situer leur origine essentiellement dans les mathématiques grecques. Finalement, la situation actuelle des mathématiques résulte de la diffusion d'un certain type de mathématiques, essentiellement grecques, puis arabes, puis occidentales, à partir d'un centre initial, mais qui a pu rencontrer dans d'autres civilisations une base préexistante. Sur cette rencontre entre, par exemple, les mathématiques chinoises et la tradition euclidienne, et ses difficultés, notre collègue Martzloff (1987) a écrit d'excellentes choses. Retenons-en une dualité dans la définition de l'activité mathématique, soit comme résolution d'un certain type de problèmes, soit comme déroulement d'un discours logiquement architecturé, ces deux définitions n'étant pas a priori contradictoires.

L'universalité des mathématiques se traduit aussi dans le temps par le fait que les théories mathématiques ne deviennent pas fausses avec le progrès de la science. Au plus, une théorie mathématique devient moins importante, tombe en désuétude : la géométrie non euclidienne ne rend pas fausse la géométrie euclidienne. C'est avec une certaine émotion que nous pouvons lire et comprendre, pour l'essentiel, les textes d'Euclide et Archimède. Il n'en est pas de même des autres sciences dans lesquelles certaines théories peuvent devenir fausses, n'avoir plus qu'un intérêt historique, que l'on pense par exemple au phlogistique, substance dont l'existence était supposée pour expliquer les phénomènes de combustion, à l'éther, fluide censé vibrer sous l'action de la lumière et justifiant ainsi le caractère ondulatoire de celle-ci, à l'astronomie de Ptolémée.

## Universalité des applications des mathématiques.

Les mathématiques sont aussi universelles actuellement par leurs domaines d'application, ce qui aurait peut-être bien surpris leurs pères grecs. Je serai ici plus bref puisqu'il s'agit d'une remarque qui est actuellement largement et fréquemment développée et qui l'a d'ailleurs été aux journées de Rouen (1988) de notre Association, dans l'exposé de Jean-Jacques Duby (1989, bull. n° 370), directeur scientifique d'IBM France, dont j'ai retenu qu'il n'avait pas pu trouver un domaine des mathématiques n'ayant pas d'application. De même, au colloque *"mathématiques à venir"*, la caractérisation des mathématiques comme sciences des modèles et de la modélisation des phénomènes naturels ou sociaux avait été présentée comme tellement évidente qu'elle avait provoqué des protestations de certains mathématiciens présents, trouvant qu'on faisait la part trop belle aux mathématiques appliquées. Ce dernier épisode souligne que l'accent mis sur l'applicabilité universelle des mathématiques est une évolution en partie récente et en tous cas non unanime du discours des mathématiciens qu'il faut bien se garder, ainsi que je le faisais remarquer en introduction, de dogmatiser (on peut se reporter pour un point de vue plus réservé sur l'universalité des applications des mathématiques à Dieudonné,1987, ou à Godement,1963, préface). Quoi qu'il en soit, cette universalité des mathématiques dans leurs applications ne laisse pas d'être mystérieuse et on ne s'étonnera pas de trouver citée deux fois dans des articles de vulgarisation des mathématiques contemporaines (Delahaye, 1991) l'heureuse formule de Wigner sur *l'applicabilité déraisonnable des mathématiques*". Notons tout de suite que cette applicabilité universelle nous renvoie à au moins deux types d'explications : les uns retrouvent dans cette universalité la trace d'une structure mathématique du monde d'une manière en somme Pythagoricienne, les autres y voient la marque de la structure de notre pensée, et même maintenant du fonctionnement de notre cerveau. Dans les deux cas, les mathématiques apparaissent comme la manière privilégiée dont nous disposons pour penser le monde.

## L'universalité du point de vue des mathématiciens.

Je voudrais maintenant rentrer dans le vif du sujet et, comme promis, regarder du côté des mathématiciens pour examiner la manière dont ils ressentent ou non cette universalité des mathématiques et comment ils la présentent. En fait, si l'on élimine l'introspection et le recours aux grands classiques comme les écrits de Poincaré ou Hadamard, il ne reste pas beaucoup de lieux où les mathématiciens expriment leurs sentiments sur ce genre de questions. On trouve plus facilement des écrits d'épistémologues qui cherchent à comprendre d'un point de vue d'observateur le fonctionnement des mathématiques. Si cette dernière démarche est indispensable, ne serait-ce que pour le didacticien que je suis, elle présente toujours le risque d'une rigidification, de la mise en valeur de certains aspects seulement de l'activité mathématique. Il ne faut pas oublier que l'activité du mathématicien précède celle de l'épistémologue, et que le travail de ce dernier n'est pas de poser des règles auxquelles la science devrait se plier, mais de comprendre quels sont les principes sous-jacents à l'activité scientifique. Bachelard n'hésite pas à rappeler que ce principe s'applique même à la logique dans sa relation à l'arithmétique en ce sens que si l'arithmétique se révélait contradictoire, on devrait réformer la logique pour rendre compte de la contradiction[1]. J'ai été fort surpris de constater que à la suite de la lecture du livre par ailleurs excellent de Morris Kline, Mathématiques, la fin de la certitude (Kline,1989), certains collègues philosophes et spécialement intéressés à la philosophie des sciences voyaient les mathématiciens en proie à une sorte de désarroi et d'incertitude permanents...

J'ai donc cherché des lieux où les mathématiciens soient amenés à s'exprimer sur leur science et j'ai trouvé cette expression, d'une part dans des articles de vulgarisation où le besoin d'expliquer ce que sont les mathématiques à un public non mathématicien amène à expliciter ce qui, entre mathématiciens est ordinairement implicite ou de l'ordre de la conversation privée, et aussi dans une partie de la thèse de notre collègue Jacques Nimier, publiée à l'IREM de Lyon (1989) sous le titre d'*entretiens avec des mathématiciens*. Ce qui m'a frappé alors dans ces textes, et ceci bien antérieurement à l'organisation de ces journées, c'est l'apparition du thème de l'universalité, et son lien très fort avec le thème de la vérité : les mathématiques permettent d'atteindre une vérité, voire même la vérité. Et me voici maintenant au cœur du sujet que j'ai choisi de traiter : universalité et vérité en mathématiques, à condition d'ajouter "du point de vue des mathématiciens". Et tout de suite, une petite remarque du didacticien que je suis : lorsqu'on collabore avec des didacticiens de la physique, on voit qu'ils sont toujours frappés par l'importance chez les mathématiciens du discours sur la vérité et l'erreur, qui leur semble fort éloigné du discours du physicien...Ceci tendrait à laisser soupçonner qu'il y a bien là quelque chose de particulier aux mathématiciens.

Voici maintenant quelques citations caractéristiques provenant de mathématiciens suffisamment divers pour que l'on puisse éliminer l'hypothèse qu'il ne s'agisse que de l'expression de la philosophie d'un mathématicien particulier, sans pour autant avoir la prétention de présenter des résultats "statistiquement significatifs"...

- *ça* [les mathématiques] *représente essentiellement le langage théorique universel. C'est-à-dire qu'à mon avis, les seules possibilités rigoureuses d'accéder à une pensée ayant validité universelle se font par les mathématiques ou par des lois mathématiques;* (Thom in Nimier, 1989).

et plus loin : *dans la mesure où c'est une pensée universelle, c'est aussi une voie d'accès à la réalité, autrement dit, pour moi, l'ontologie est (dans la mesure où j'ai une métaphysique, ce qui reste à voir, évidemment) assez platonicienne ou pythagoricienne; et en ce sens, je pense que le fond des choses dans le monde est mathématique même là où apparemment il n'y en a pas.*

- *c'est curieux, cet espèce de tissu qui s'est développé là, dans l'humanité et où tous les mathématiciens se comprennent entre eux; c'est ça aussi le plus remarquable; c'est la seule chose humaine où vous pouvez dire à quelqu'un: voilà, vous vous êtes trompé à cet endroit, ça c'est faux, et il est obligé de le reconnaître. Voyez-vous ailleurs où on puisse dire à quelqu'un: vous vous êtes trompé, c'est faux ?* (Pisot, in Nimier, 1989)

- *les mathématiciens [...] ont cherché à établir un discours contraignant pour l'autre [...] parce qu'il est capable, par sa forme, d'interdire le refus de son contenu [...] c'est un discours dans lequel il y a essentiellement une cohérence propre et à partir du moment où vous avez admis les prémices nous serons toujours d'accord.* (Lichnerowicz in Nimier, 1989)

- *La formation d'un mathématicien [...] Il s'agit d'entrer dans un monde nouveau que la vérité a choisi pour se manifester, alors que l'évidence du quotidien couvre une profonde insignifiance.* (Ekeland, 1989)

- *La formation qu'il a reçue doit avoir fait de lui un autre homme, pour lequel le mode de pensée naturel est celui que décrit Pascal*[2] *il doit être incapable de raisonner faux* (Ekeland.loc cit).

L'unanimité ci-dessus derrière laquelle on voit tout de même apparaître un spectre de positions philosophiques largement ouvert illustre tout d'abord la distance entre la certitude quotidienne du mathématicien et l'incertitude que pourrait laisser attendre la lecture de Kline (1989) ou la célèbre phrase de Russell : *les mathématiques sont une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai.* Lui fait écho l'affirmation de Ekeland (loc cit) : *...cette question des fondements est bien loin de l'expérience quotidienne de la plupart des mathématiciens.* Apparemment, les mathématiciens sont persuadés que ce qu'ils disent est vrai, mais au fait, de quoi parlent-ils, et finalement, comme dit Ponce Pilate, "Qu'est-ce que la vérité ?"

## En quoi les mathématiques sont-elles vraies ?

Comme je l'ai annoncé, je ne chercherai pas ici à répondre sur le terrain philosophique à cette question, mais je vais examiner comment des mathématiciens, en particulier ceux que j'ai cités y répondent eux-mêmes.

Remarquons tout d'abord que le caractère relativement absolu pour beaucoup d'entre eux de la vérité, indispensable pour aboutir à l'universalité, exclut une origine démocratique, fondée seulement sur une adhésion majoritaire. Laissez ici le didacticien glisser encore un mot et souligner que l'un des apprentissages visés dans l'enseignement des mathématiques est justement "qu'en mathématiques, la majorité n'a pas toujours raison". La vérité mathématique, se voulant non subjective, communicable, irréfutable, doit s'appuyer sur quelque chose d'extérieur au mathématicien.

L'examen des textes que j'ai utilisés fait effectivement apparaître de tels éléments extérieurs.

Comme on peut s'y attendre, le *monde physique ou social* est une référence qui apparaît à plusieurs reprises et qu'on a d'ailleurs déjà rencontrée dans les propos de Thom ci-dessus. On connaît d'ailleurs la position classique de Lebesgue (1931) qui attribue à l'expérience quotidienne la preuve de la vérité de l'arithmétique; un énoncé comme 2x2 = 4, expression symbolique traditionnelle de la vérité universelle des mathématiques, provient d'abord pour lui d'une expérience élémentaire, facilement répétable. Au contraire, chez les mathématiciens que j'ai consultés, l'allusion au réel existe certes, mais n'est pas la référence primordiale en ce qui concerne le caractère de vérité des mathématiques.

- *les mathématiques, c'était déjà ma vocation, mais aussi des mathématiques en rapport avec le réel* (Lichnerowicz, in Nimier, 1989)

Cependant, en dehors de la position de Thom qui voit dans le monde une structure sous-jacente de type mathématique, la réalité physique ou sociale apparaît plutôt aux mathématiciens actuels comme champ d'application qui souligne le caractère universel des mathématiques plutôt qu'il ne garantit leur validité: c'est en ce sens que l'applicabilité des mathématiques est "déraisonnable".

Autrement dit, ces mathématiciens ne voient pas dans une correspondance entre les résultats mathématiques et la réalité du monde extérieur la justification essentielle de leur certitude. Mais laissons leur la parole et voyons pourquoi, en un certain sens, ils ne font pas confiance à ce monde et s'ils ont mieux à proposer.

- *nous sommes actuellement incapables de définir la limite de ce qu'on appellera un être vivant et un être non vivant, ce qui est très grave pour un mathématicien* ( Lichnerowicz, in Nimier, 1989).

- *en apparence tout au moins, toute création mathématique semble être une découverte; tout mathématicien se défend, mais il a tendance à être platonicien, en ce sens qu'il a tendance à croire qu'il a découvert quelque chose de préexistant à lui* (Lichnerowicz, loc cit.).

- *l'inconvénient et l'un des avantages de la physique il me semble, c'est que l'on a le contrôle expérimental, mais on n'a pas le contrôle du mathématicien sur la cohérence logique qui donne, d'une certaine manière, plus de sécurité* (Malgrange, in Nimier, 1989).

- *C'est nous qui mettons une géométrie dans l'espace qui nous entoure [...] et il se trouve que ça colle bien, c'est un miracle. Alors les gens ont bien mélangé cela, mais ils n'ont absolument rien compris à ce qu'était la théorie de la relativité...c'est une autre géométrie qu'on projette sur l'espace et qui colle un peu mieux que l'euclidienne, voilà tout...[...] Le raisonnement, c'est abstraction pure, évidemment, suscité par la réalité, et encore ?* (Pisot in in Nimier, 1989).

- *il s'agit d'entrer dans un monde nouveau, que la vérité a choisi pour se manifester, alors que l'évidence du quotidien couvre une profonde insignifiance [...] l'émergence d'une vision intérieure dont les objets paraissent finalement plus réels, en tous cas plus intéressants, que ceux de l'expérience commune.* (Ekeland, loc cit).

- *ils sentent une vie interne des objets mathématiques et leur recherche n'est qu'une inlassable méditation sur celle-ci.* (Ekeland, loc cit).

- *une de leurs tâches* [3]*(les referees) est justement de vérifier que le travail présenté est conforme aux normes en vigueur.* (Ekeland, loc cit).

- *d'une part, il existe indépendamment de l'homme une réalité mathématique brute et immuable, d'autre part nous ne la percevons que grâce à notre cerveau [...] Je pense que le mathématicien développe un "sens", irréductible à la vue, à l'ouïe et au toucher, qui lui permet de percevoir une réalité tout aussi contraignante mais beaucoup plus stable que la réalité physique, car non localisée dans l'espace-temps.* (Connes 1989).

Je pense que ces extraits vous auront convaincu qu'on voit apparaître, au delà des différences individuelles, deux grandes idées au sujet de la vérité mathématique: d'une part, elle s'impose de façon plus contraignante que la vérité physique attestée par l'expérience, d'autre part elle est contraignante parce qu'elle concerne des objets qui ont une existence indépendante de nous, mais aussi parce qu'elle obéit à des règles de cohérence interne impérieuses. Certes, je n'ai cité ici que de simples extraits coupés de leur contexte, mais je vous invite à vérifier que la lecture complète des textes ne fait que renforcer les affirmations ci-dessus.

Cette position des mathématiciens peut être caractérisée du point de vue philosophique comme une position réaliste, le réalisme étant défini de la manière très simple suivante : il consiste à admettre l'existence des objets en dehors du fait que nous les connaissions ou non. Ce réalisme se précise en mathématiques sous la forme suivante : *les mathématiques sont l'étude scientifique d'entités mathématiques existant objectivement, de même que la physique est l'étude d'entités physiques. Les affirmations des mathématiques sont vraies ou fausses en fonction des propriétés de ces entités, indépendamment de notre capacité de déterminer lesquelles sont vraies* (Maddy, 1990, p. 21). L'ensemble des textes que j'ai cités met en évidence, de manière beaucoup plus massive que je ne m'y attendais en commençant à préparer cette conférence, le parti pris réaliste, traditionnellement appelé platonisme, de beaucoup de mathématiciens contemporains. Ce parti pris est tout à fait conscient et affirmé : on voit par exemple Alain Connes le défendre avec acharnement contre les arguments matérialistes de J.P. Changeux qui l'attaque au nom de la biologie et du matérialisme (Changeux J. P., Connes A., 1989).

Bien que j'aie affirmé ne pas vouloir faire un exposé philosophique, je dois donc ici reconnaître qu'il existe une philosophie des mathématiques, privilégiée en ce qu'elle est la philosophie spontanée du mathématicien, le platonisme. Que ce soit une philosophie spontanée n'est pas diffile à concevoir puisque, comme le remarque Maddy (1990), d'une manière générale le réalisme est évident et inévitable psychologiquement bien qu'il soit difficile à justifier philosophiquement. Ajoutons cependant pour être complet, que l'universalité des mathématiques est difficile à expliquer dans une perspective non platonicienne au sens large, c'est-à-dire si l'on refuse un statut aux objets abstraits (Cléro J. P., 1990, p. 39) Je vais donc maintenant jeter un coup d'œil rapide sur l'histoire de cette philosophie "naturelle" des mathématiciens et montrer comment les mathématiciens actuels retrouvent un vieux débat philosophique qui date en fait de Parménide (début du cinquième siècle av. J. C.), le premier à avoir distingué deux voies de la connaissance et à avoir jeté les bases d'une critique de la connaissance. Je serai forcément schématique: l'intérêt ici est de souligner la permanence d'un certain type de problèmes, non de débattre des doctrines qui visent à les résoudre.

## Vérité et opinion : les deux voies de la connaissance selon Parménide.

Pour Parménide, il existe deux voies de la connaissance, qu'il distingue d'ailleurs par les types de vérité qu'elles permettent d'atteindre :

- la première voie est celle de la doxa qui en demeure à la sphère du sensible et que l'on traduit en Français par le terme d'opinion. Elle conduit à une connaissance commune contradictoire. Ainsi Socrate, dans un dialogue avec Parménide relaté ou imaginé par Platon, convient avec son interlocuteur que leur recherche ne doit pas s'égarer dans les objets visibles et s'y appliquer, mais porter sur ceux qu'on saisit surtout par la pensée car, en en restant aux premiers, explique Socrate, on tomberait aisément sur des contradictions. (Platon, Parménide, trad Chambry, 1967).

- la deuxième voie est celle de l'aletheia, que nous traduisons en Français par vérité. Elle concerne la connaissance d'objets de pensée, et ne peut d'ailleurs se comprendre véritablement du point de vue de l'histoire de la pensée que dans une perspective animiste où toutes les choses comportent un intérieur spirituel. C'est seulement pour ces objets de pensée qu'on pourra arriver à une connaissance vraie et non contradictoire, à la vérité.

Pour Parménide, comme pour Platon, ce monde des objets de pensée est le seul réel, alors que le monde sensible est illusoire (c'est le sens du mythe de la caverne), de plus seul les objets de pensée peuvent être soumis à des raisonnements rigoureux. Il y d'ailleurs une interdépendance très grande entre la nature des objets de pensée sur lesquels on travaille et la possibilité d'effectuer à leur propos des raisonnements non contradictoires. Ce monde des objets de pensée est en outre libéré des contraintes de l'espace et du temps[4].

## Un écho contemporain.

Bien sûr, nos mathématiciens contemporains ne sont pas des Grecs du début du cinquième siècle avant Jésus Christ, occupés à introduire la rationalité dans le cadre d'une pensée animiste, ce qui est une caractérisation possible de l'entreprise parménidienne, cependant, certaines convergences restent frappantes, comme le lecteur l'a sans doute déjà perçu:

- la mise à distance de la réalité comme source de la connaissance. Je dois d'ailleurs avouer ma surprise : lorsque j'ai commencé à réfléchir à cet exposé, je m'attendais à trouver plus fréquemment que je ne l'ai fait, un recours au réel physique pour expliquer l'origine des notions mathématiques.

- le caractère de vérité absolue et intemporelle, donc universelle, des mathématiques. On retrouve dans cet absolu, dont le caractère non démocratique a été souligné, l'origine religieuse de l'aletheia.

- le caractère non sensible, mais en quelque sorte plus réel que le monde physique, du monde des objets mathématiques.

- le caractère rationnel, non contradictoire, cohérent, de ce monde où la certitude est plus sûre que dans le monde physique, non soumise à l'usure du temps, où fonctionnent des règles[5].

La différence essentielle entre ces mathématiciens et les disciples de Parménide est que, outre qu'ils ne sont pas animistes (encore que la nature exacte de ces objets de pensée qu'ils manipulent soit bien sujette à caution...), ils attachent une grande importance aux applications des mathématiques à la physique, nous y reviendrons à propos de la notion de modèle...).

## Un peu d'histoire.

Un bref survol historique incite à penser que ces positions de mathématiciens sont aussi le fruit de l'histoire, et que l'élimination quasi-complète, au niveau du discours, de la référence au monde physique comme source de vérité est une attitude qui n'a pas toujours été celle des mathématiciens. Je prendrai ici deux exemples du début du 19ème siècle, d'ailleurs bien classiques : le développement des géométries non euclidiennes sur le continent et celui de l'algèbre abstraite en Angleterre.

L'histoire des géométries non-euclidienne est assez bien connue: à partir du moment où l'on commence à soupçonner que l'on peut développer une théorie logiquement cohérente en supposant que par un point il peut passer plus d'une parallèle à une droite donnée tout en gardant par ailleurs les autres axiomes euclidiens, on dispose de deux géométries concurrentes. Posons nous naïvement la question : laquelle est vraie ? Notons d'ailleurs que historiquement, il fallut une trentaine d'années après la publication des travaux de Lobatchevsky et de Bolaï, pour que cette question fût véritablement posée tant il semblait évident que la géométrie euclidienne était la vraie géométrie, la (plus tard, les...) géométrie non-euclidienne apparaissant comme une curiosité suspecte, voire illégitime.

En fait, les deux arguments, d'ailleurs non compatibles, en faveur de la vérité de la géométrie euclidienne étaient à l'époque les suivants:

- un argument repris de la philosophie de Kant, suivant lequel l'espace était une catégorie a priori de notre pensée, nous permettant avec d'autres, comme le temps, d'interpréter le monde extérieur. Ainsi, la géométrie euclidienne, reflet d'une structure fondamentale de notre pensée, était la seule possible, et des axiomes comme celui des parallèles (cinquième postulat) ou le fait que par deux points passe une droite et une seule, exprimaient cette structure fondamentale.

- un argument "expérimental" : la géométrie euclidienne était vraie parce qu'elle correspondait à une description correcte de l'espace.

Voici quelques points de vue de cette époque : *aucune personne intelligente et de bonne foi ne peut douter de la vérité des propriétés principales des droites parallèles, telles qu'elles ont été avancées par Euclide dans ses éléments, voilà deux mille ans* (Hamilton, cité par Kline 1980).

*Le deuxième axiome d'Euclide (l'axiome des parallèles) ne nécessite aucune démonstration, constitue une partie de notre notion de l'espace, de l'espace physique de notre expérience.* (Cayley, cité par Kline 1980).

Deux siècles après, nous savons que ces deux arguments n'ont pas résisté. Il me semble important de noter deux choses :

- c'est l'évolution des mathématiques elles-mêmes qui remet en cause la notion de vérité en mathématiques ou tout au moins le discours, non mathématique, sur le statut de cette vérité.

- une théorie épistémologique peut apparaître comme un obstacle au développement des mathématiques : il semble bien que ce soit par crainte du qu'en dira-t-on, et en particulier de la prééminence des idées kantiennes, que Gauss renonça à publier ses découvertes personnelles sur la géométrie non euclidienne.

L'exemple de l'algèbre abstraite (Richards, 1980) confirme ces deux conclusions : vers les mêmes années, un certain nombre de mathématiciens anglais développent ce qui nous apparaît maintenant comme l'algèbre abstraite: étude des propriétés de structures algébriques définies axiomatiquement. Cependant, un examen plus précis de leurs écrits fait apparaître qu'ils vont rester sur le seuil de cette algèbre abstraite et permet d'en préciser les raisons. Pour eux en effet, un tel système algébrique, c'est-à-dire pour reprendre l'expression de l'époque, un ensemble de symboles manipulés suivant des règles fixées mais sans que leur signification soit précisée, s'il était seulement cohérent logiquement ne serait pas vrai. La vérité d'une théorie mathématique repose d'abord, de leur point de vue, sur sa relation avec un objet extérieur et deuxièmement seulement sur sa cohérence logique. De Morgan a à ce sujet une image parfaitement claire: il imagine un puzzle représentant la carte de l'Europe mais que l'on chercherait à reconstituer en n'utilisant que l'envers des pièces. On pourrait dit-il, devenir très performant dans la reconstitution du puzzle sans avoir lá moindre idée de ce qu'il représente. De même ajoute-t-il, un étudiant pourrait devenir très performant dans la manipulation d'une famille de symboles assujettis à un ensemble de règles, mais, ce ne serait pas faire de l'algèbre. On voit ici comment les convictions épistémologiques de De Morgan le retiennent sur le seuil d'une étude des structures pour elles-mêmes.

Ces opinions sont liées à une position épistémologique générale dominante dans la société anglaise de l'époque, de type "inductiviste", sur la vérité scientifique. Ici encore, cette position (cf Richards, loc cit.) apparaît comme un obstacle au développement des mathématiques, obstacle dont le dépassement est une conséquence inévitable des travaux de ces algébristes. Ce type de travaux conduira plus tard à une autre notion de vérité mathématique, véhiculée par le formalisme. Le formalisme, qui voit dans les mathématiques un enchaînement logique déduit à partir d'axiomes portant sur des symboles, vrai pourvu qu'il soit non contradictoire, mais indépendamment de toute interprétation des symboles apparaît comme une prise de position en partie de circonstance permettant de rendre compte d'un aspect de la vérité mathématique.

L'exemple de l'intuitionnisme est encore plus frappant: là aussi, la volonté de réglementer les mathématiques au nom d'une conception de l'activité mathématique et de la vérité des énoncés qui aboutit dans la pratique, en limitant par exemple l'usage du principe du tiers exclu au cas des ensemble finis, au sacrifice de certains résultats fondamentaux est violemment rejetée. On connaît la formule célèbre de Hilbert à ce propos: *personne ne nous chassera du paradis que Cantor a créé pour nous*. Et pourtant les arguments intutionnistes ne manquent pas d'intérêt... Il est curieux de constater qu'ils ont apparemment plus d'écho en dehors des mathématiques qu'à l'intérieur...témoin le débat initié par J. P. Changeux (Changeux et Connes, 1989) sur les mathématiques constructivistes, que l'on peut rattacher à la tradition intuitionniste, et où J. P. Changeux se réfère d'ailleurs à M. Kline (1980).

## Conclusions.

Il est temps maintenant de nous rapprocher de la conclusion de cette enquête. Notre petit détour historique avait pour but de montrer comment les positions que nous avons relevées chez un certain nombre de mathématiciens contemporains représentent un retour à une très vieille problématique, à travers une histoire dont nous avons simplement fait sentir la nécessité de l'étudier, sans pouvoir la développer. On trouve dans cette histoire que la vérité mathématique a sa source d'abord dans l'accord avec la nature (en fait les axiomes euclidiens relèvent de ces évidences) ensuite dans la rigueur interne à l'édifice mathématique, éventuellement dans la concordance entre les deux. Nous voyons chez nos contemporains disparaître l'accord avec la nature, mais sans que la vérité se réduise à la cohérence logique des mathématiques: la nécessité de supposer des objets extérieurs qui n'appartiennent pas au monde sensible et dont la mathématique est une description, une exploration, ramène au réalisme mathématique et redonne vie à la vieille position platonicienne que l'on retrouve d'ailleurs chez Einstein, Gödel, Thom. Il n'est donc pas étonnant de voir apparaître sous le titre *Realism in mathematics* (Maddy, 1990) une nouvelle tentative pour parvenir à donner au réalisme spontané du mathématicien une assise philosophique en montrant, conformément d'ailleurs aux positions de Gödel, que les ensembles ont une existence objective. On considère souvent que cette affirmation est contredite par un célèbre résultat, dû d'ailleurs à Gödel lui-même, qui assure en gros que toute axiomatique de l'arithmétique laisse dans cette science des propositions indécidables[6]. Ce résultat est usuellement présenté comme un argument très fort contre le réalisme: comment peut exister un ensemble, celui des nombres entiers, dont on sait à l'avance qu'on ne saura pas décrire ses propriétés ? La réponse d'Alain Connes, à laquelle je vous renvoie, est très brièvement la suivante : le résultat de Gödel montre simplement que la réalité des nombres entiers est trop riche pour être décrite à l'aide d'un système fini d'axiomes, ce qui n'est pas une propriété aberrante pour un objet qui existe en lui-même, indépendamment de notre volonté éventuelle de le saisir dans un système fini d'axiomes. Il y a ici une convergence avec le réalisme mathématique de Maddy qui conclut également que si l'hypothèse du continu est indécidable dans le système d'axiomes de Zermelo, c'est que ce système n'est pas une description suffisante de la réalité[7].

Avant de parvenir à la conclusion définitive, je voudrais revenir sur la relative absence de référence au monde physique et social dans ce qui précède, tout d'abord pour lever un malentendu éventuel : la description que j'ai faite de l'état d'esprit de nos mathématiciens contemporains insiste sur le fait qu'ils ne voient pas dans la référence à la réalité physique la source de la vérité des mathématiques. Il ne faudrait pas prendre ceci pour un message déguisé en faveur d'un enseignement coupé de toute application. Le colloque "mathématiques à venir" de Palaiseau avait insisté sur les mathématiques comme science des modèles, donc sur un aspect de l'universalité des mathématiques tourné vers les applications, en l'espèce la capacité à modéliser les phénomènes les plus variés. En fait, la notion de modèle recouvre peut-être une solution moderne à la vieille alternative des deux voies de la connaissance de Parménide : instrument d'une connaissance efficace de la réalité, le modèle ne tire pas sa vérité de cette adaptation toujours provisoire, mais de sa nature mathématique. Une belle phrase d'Einstein (1921) résume bien ce double aspect des mathématiques : *pour autant que les propositions des mathématiques se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.* Einstein concède cependant ensuite que les mathématiques en général, et la géométrie en particulier, doivent leur existence à notre besoin de savoir quelque chose sur le comportement des objets réels. Mais le caractère déraisonnable de l'applicabilité universelle des mathématiques reste aussi mystérieux[7]...

J'en viens maintenant à des conclusions plus précises et plus en rapport vers nos préoccupations d'enseignants.

Le plus frappant dans cette affaire est le contraste extraordinaire entre le succès des mathématiques comme activité humaine universellement reconnue comme vraie et la difficulté d'en rendre compte de façon cohérente, comme si cette activité était trop riche pour se laisser enfermer dans une vue unique. Je pense que c'est la conclusion essentielle pour des enseignants de mathématiques dont la fonction première est de donner goût aux élèves pour les mathématiques: celles-ci ne constituent pas un champ de ruines, comme semblent l'avoir cru certains lecteurs de Kline (1980) sur la foi peut-être du titre : "mathématiques, la fin de la certitude". C'est plutôt l'histoire des interprétations successives des mathématiques qui est un tel champ.

Pour autant, je ne lance pas un appel à l'obscurantisme (lisez Kline !) je pense au contraire que la connaissance des diverses doctrines relatives aux mathématiques, à leur nature, au type de vérité qu'elles permettent d'atteindre conduit à une plus grande tolérance même si la voie du réalisme platonicien est toujours la plus facile. Notons que J. P. Delahaye (1991), dans un article sur le réalisme en mathématiques et en physique, après avoir souligné les difficultés soulevées par cette philosophie, conclut : *il ne peut y avoir de pensée scientifique sans réalisme, tout en admettant qu'il y a de véritables problèmes.* Ceci explique la place privilégiée que nous avons accordée au réalisme dans notre exposé. Cependant, s'il est une leçon constante des petits bouts d'histoire que nous avons abordés c'est bien que toutes les réglementations de l'activité mathématique que l'on a inventées ont dû céder finalement devant la vie des mathématiques, mais non sans avoir été souvent un handicap momentané pour leur développement. L'épistémologie est au service des mathématiques et non l'inverse, ce qu'exprime bien Maddy : les principes doivent être jugés du point de vue de la science (de leur fécondité) et non la science par des principes fixés une fois pour toutes. Nous devons tolérer chez nos élèves et nos étudiants aussi bien les petits Fourier sûrement plus proches de la "doxa" que les petits Hilbert plus proches de l'"aletheia".

## Notes :

- 1: cf Bachelard,1940, ch 6, ou il écrit par ailleurs : *l'arithmétique n'est pas fondée sur la raison. C'est la doctrine de la raison qui est fondée sur l'arithmétique élémentaire.*

- 2 : il s'agit d'une référence à *"De l'esprit géométrique"* de Pascal que l'on trouve actuellement édité en collection de poche chez Flammarion par exemple.

- 3 : l'auteur parle ici des "referee" : un "referee" est un mathématicien reconnu, à qui une revue demande de contrôler la qualité d'un article proposé par un autre mathématicien, avant que sa publication soit acceptée.

- 4 : la présentation faite ici est très schématique. Les idées de Parménide y sont présentées dans une forme modifiée par Platon, qui s'est préoccupé de la possibilité de donner un statut aux objets des mathématiques, ce qui n'était pas le cas de Parménide. Ce statut est d'ailleurs différent dans ses détails de celui des objets du réalisme mathématique. En ce sens, l'appellation de platonisme pour désigner le réalisme mathématique est un peu abusive, mais elle est traditionnelle et finalement sans grand inconvénient pratique.

- 5 : ces positions n'ont pas fait l'unanimité chez les Grecs. D'une manière générale, des positions opposées ont été défendues par les sophistes.

- 6 : une proposition indécidable est un énoncé arithmétique, candidat en somme à devenir un théorème, et dont on peut prouver qu'il est impossible, à partir du système d'axiomes que l'on a choisi, de démontrer, ni qu'il est vrai, ni qu'il est faux.

- 7 : notons que par contre, Connes et Maddy divergent sur le type d'existence qu'ils attachent aux objets mathématiques: Maddy cherche à établir que les objets mathématiques ont une existence de même nature que ceux de la physique, ce qui n'est pas le cas de Connes.

## BIBLIOGRAPHIE


Augereau J. F., 1991, Jacques Louis Lions, lauréat du prix du Japon, La déraison des mathématiques, *Le Monde*, 8 Mai 1991.

Bachelard F., 1940, *La philosophie du non*, PUF, Paris.

Changeux, J. P., Connes A., 1989, *Matière à pensée*, Odile Jacob, Paris. 267 pages.

Cléro J. P., 1990, *Epistémologie des mathématiques*, Nathan, coll. Repères philosophiques, Paris, 128 pages.

Delahaye, J. P., 1991, Le réalisme en mathématiques et en physique, *Pour la Science*, n° 159, Janvier 1991, p. 34-42.

Dieudonné, J. 1987, *Pour l'honneur de l'esprit humain, les mathématiques aujourd'hui*, Hachette, Paris, 316 pages.

Duby, J. J., 1989, De l'utilité des mathématiques et des mathématiciens, *bulletin de l'APMEP*, n° 370, Sept 1989, p. 536-545.

Einstein, 1921, La géométrie et l'expérience, traduction M. Solovine, in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, Gauthier-Villars Paris, 1972.

Ekeland, I., 1989, L'expérience mathématique, *Etudes*, mars 1989, n° 370/3, p. 333-344.

Godement, R., 1963, *Cours d'algèbre*, Hermann, Paris, 663 pages.

Greenberg M. J. 1972, *Euclidean and non-euclidean geometries, development and history*, second edition, Freeman 1980, San Francisco, 400 pages.

Kline M. 1980, *Mathématiques, la fin de la certitude*, traduction française chez Christian Bourgois, 1989, 664 pages.

Lebesgue H, 1931, *Sur la mesure des grandeurs*, Monographies de l'enseignement mathématique n°1, Gauthier Villars, Paris, 184 pages.

Maddy, P., 1990, *Realism in mathematics*, Clarendon press, Oxford, 204 pages.

Martzloff J. C., 1987, *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris, 375 pages.

Nimier, J. 1989, *Entretiens avec des mathématiciens*, IREM de Lyon, publication n°67, 109 pages

Platon, *Théétète, Parménide*, traduction E. Chambry, Flammarion, Paris, 1967.

Richards, J. L., 1980, The art and the science of british algebra: a study in the perception of mathematical truth, *Historia Mathematica*, vol 7, n° 3, August 1980, p. 343-365.

Schmitz F., 1988, *Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques*, PUF, Paris. 281 pages.

Zafiropoulo, J.,1950, *L'école éléate*, Belles Lettres, 303 pages.

## GUIDE DE LECTURE DE LA BIBLIOGRAPHIE

L'ouvrage le plus complet est celui de Morris Kline, bien qu'on puisse en contester le titre, les mathématiciens contemporains que l'on a cités ne semblant pas être en perte de certitude...Il comporte un exposé détaillé de diverses doctrines concernant la source de la vérité en mathématiques que nous n'avons fait qu'effleurer. Le livre de J. P. Changeux et A. Connes montre une belle défense de la position réaliste en mathématiques par le dernier nommé. Le livre de P. Maddy, en anglais, recense également les diverses épistémologies tendant à justifier la vérité des mathématiques, il expose au passage les critiques classiques contre la position réaliste (platonicienne) puis essaie de mettre sur pied un platonisme moderne résistant à ces critiques, en partant du principe que le platonisme étant la philosophie naturelle du mathématicien doit pouvoir être justifié. L'article de Delahaye a l'avantage de donne,r moyennant une lecture brève, l'essentiel des arguments pour et contre le réalisme en mathématiques et en physique. Le livre de Greenberg est une bonne histoire de la géométrie en général et de ses axiomatiques et surtout des géométries non euclidiennes à propos desquelles l'essentiel est cependant dit dans Kline. La brochure de Nimier montre un éventail de positions de mathématiciens contemporains à propos du réalisme et de la vérité en mathématiques. Il a été beaucoup utilisé dans cet article. L'ouvrage de Schmitz introduit à la pensée de Wittgenstein sur ce sujet, enfin l'ouvrage de Zafiropoulo contient une très bonne description de la pensée de Parménide. L'article de Richards mérite une place à part: il analyse les rapports entre épistémologues et algébristes dans l'Angleterre du dix-neuvième siècle.